SU 1578

SKRYPTY UCZELNIANE

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM.STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Janina Niedoba
Wiesław Niedoba

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE I CZĄSTKOWE

ZADANIA Z MATEMATYKI

Pod redakcją
Bogdana Choczewskiego

Wydanie trzecie

UCZELNIANE WYDAWNICTWA NAUKOWO-DYDAKTYCZNE KRAKÓW 2001

1578 pozycja wydawnictw dydaktycznych
Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie

ISSN 0239–6114

Redaktor Naczelny Uczelnianych Wydawnictw
Naukowo-Dydaktycznych: *prof. dr hab. inż. Andrzej Wichur*

Z-ca Redaktora Naczelnego: *mgr Beata Barszczewska-Wojda*

Recenzent: *prof. dr hab. Jan Janas*

Projekt okładki i strony tytułowej: *Beata Barszczewska-Wojda*

Opracowanie edytorskie i korekta: *Ewa Kmiecik*

Układ typograficzny i skład komputerowy systemem TEX:
Jacek Kmiecik, preTEXt
tel. 0 501 494 601, e-mail: info@pretext.com.pl

Redakcja Uczelnianych Wydawnictw Naukowo-Dydaktycznych
al. Mickiewicza 30, 30–059 Kraków
tel. (012) 617-32-28, tel./fax (012) 636-40-38 e-mail: wydagh@uci.agh.edu.pl

Spis treści

Przedmowa

Pomysł napisania tej serii skryptów powstał kilkanaście lat temu w zespole pracowników Zakładu Równań Funkcyjnych Instytutu Matematyki AGH, prowadzących zajęcia z matematyki ze studentami Wydziału Górniczego.

Zawarte w serii przykłady i ćwiczenia mają służyć studentom jako pomoc przy studiowaniu matematyki, a prowadzącym zajęcia ułatwić organizowanie samodzielnej pracy studentów.

Opracowano kilka podręczników z tej serii, odpowiadających działom matematyki, realizowanym w ramach podstawowego wykładu matematyki na większości studiów w AGH. Przyjęto wspólne zasady dla wszystkich skryptów: liczba przykładów i zadań jest ograniczona do kilkunastu na każdy tydzień zajęć; sposób rozwiązywania zadań danego typu objaśniono na przykładach; każdy rozdział jest poprzedzony częścią teoretyczną, zawierającą definicje i twierdzenia potrzebne do zrozumienia przykładów i rozwiązywania zadań. Większość zadań pochodzi z pozycji wymienionych w spisie literatury, ale w każdej części są też zadania pomysłu autorów.

Seria składa się z następujących skryptów:

Lech Anczyk: *Szeregi liczbowe i funkcyjne* (SU 1067);

Andrzej Gonet: *Obliczanie całek funkcji jednej zmiennej* (SU 987);

Janina Niedoba, Wiesław Niedoba: *Równania różniczkowe zwyczajne i cząstkowe* (SU 1578);

Wiesław Niedoba: *Miara i całka, rachunek prawdopodobieństwa* (SU 1038);

Sylwester Przybyło, Andrzej Szlachtowski: *Wstęp do analizy matematycznej. Elementy algebry i geometrii analitycznej* (SU 1039).

W trzecim wydaniu niniejszego skryptu przedstawiono metody rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych. Szerzej zostały opisane metody macierzowe dla liniowych układów równań zwyczajnych rzędu pierwszego. Zadania z liniowych równań cząstkowych rzędu drugiego dotyczą ich klasyfikacji i rozwiązań podstawowych zagadnień granicznych dla równań typu hiperbolicznego. Ostatni rozdział ma nieco odmienny charakter i jest poświęcony pewnym metodom numerycznym, głównie różnicowym, rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych różnych typów.

Kraków, luty 2001

Bogdan Choczewski

ROZDZIAŁ 1.

Równania różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego

1.1. Uwagi ogólne

DEFINICJA 1.1. *Równaniem różniczkowym zwyczajnym nazywamy równanie zawierające zmienną niezależną x, nieznaną funkcję y, oraz jej pochodne y', y'', ..., $y^{(n)}$*

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

gdzie $F\colon R^{n+2} \to R$.

DEFINICJA 1.2. *Rząd równania* (1.1) *jest równy n, jeżeli w równaniu* (1.1) *występuje pochodna $y^{(n)}$, natomiast nie występują pochodne rzędów wyższych niż n.*

DEFINICJA 1.3. *Rozwiązaniem równania* (1.1) *w $[a, b]$ nazywamy funkcję y o tej własności, że*

$$\bigwedge_{x\in[a,b]} F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

DEFINICJA 1.4. *Problemem początkowym Cauchy'ego dla równania* (1.1) *nazywamy następujące zagadnienie:*
Znaleźć rozwiązanie równania (1.1) *spełniające warunek początkowy* (1.2)

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \tag{1.2}$$

gdzie: $x_0 =\in]a, b[$, y_0, $y_1, \dots, y_{n-1}$ są zadanymi liczbami.

DEFINICJA 1.5. *Całką szczególną równania* (1.1) *nazywamy rozwiązanie zachowujące jednoznaczność rozwiązania problemu początkowego Cauchy'ego.*

DEFINICJA 1.6. *Wykres całki szczególnej nazywamy krzywą całkową.*

DEFINICJA 1.7. *Zbiór wszystkich całek szczególnych równania* (1.1) *nazywamy całką ogólną.*

Definicja 1.8. *Rozwiązanie odznaczające się tym, że w każdym punkcie jego wykresu zagadnienie Cauchy'ego nie ma jednoznacznego rozwiązania, nazywamy rozwiązaniem osobliwym.*

1.2. Równania rzędu pierwszego — istnienie i jednoznaczność rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego

Definicja 1.9. *Niech* $f\colon R^2 \supset Q \ni (x,y) \to f(x,y) \in R$. *Mówimy, że* f *spełnia warunek Lipschitza ze względu na zmienną* y*, jeżeli istnieje* $k > 0$*, takie że dla dowolnych* $(x,y_1) \in Q$*,* $(x,y_2) \in Q$ *jest spełniona nierówność*

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant k\,|y_1 - y_2|\,.$$

Rozważmy problem początkowy Cauchy'ego (1.1a), (1.1b):

$$y' = f(x,y) \tag{1.1a}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{1.1b}$$

gdzie: $x_0 \in]a,b[$, $y_o \in [c,d]$, *oraz* $f\colon [a,b] \times [c,d] \to R$.

Twierdzenie 1.1. *Jeżeli* f *jest ciągła i spełnia warunek Lipschitza ze względu na* y *w* $[a,b] \times [c,d]$*, to istnieje* $\delta > 0$*, takie, że w przedziale* $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ *problem początkowy* (1.1a), (1.1b) *posiada dokładnie jedno rozwiązanie.*

1.3. Metody rozwiązywania równań różniczkowych rzędu pierwszego

1.3.1. Równania o rozdzielonych zmiennych

Równanie postaci

$$X(x)\,\mathrm{d}x + Y(y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{1.3}$$

nazywamy równaniem o rozdzielonych zmiennych.

Całką ogólną tego równania jest

$$\int X(x)\,\mathrm{d}x + \int Y(y)\,\mathrm{d}y = 0$$

lub

$$\int\limits_{x_0}^{x} X(x)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{y_0}^{y} Y(t)\,\mathrm{d}t = C.$$

Uwaga 1.1. Równanie $m(x)n(y)\,\mathrm{d}x + m_1(x)n_1(y)\,\mathrm{d}y = 0$ jest równoważne alternatywie

$$\frac{m(x)}{m_1(x)}\,\mathrm{d}x + \frac{n_1(y)}{n(y)}\,\mathrm{d}y = 0 \quad \vee \quad m_1(x) = 0 \quad \vee \quad n(y) = 0,$$

natomiast równanie

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f_1(x)f_2(y)$$

można zapisać w postaci

$$\frac{\mathrm{d}y}{f_2(y)} = f_1(x)\,\mathrm{d}x \quad \vee \quad f_2(y) = 0.$$

Są to tak zwane równania o rozdzielających się zmiennych.

Przykład 1.1. Rozpatrzmy równanie

$$x(1+y^2)\,\mathrm{d}x + y(1+x^2)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Po rozdzieleniu zmiennych mamy

$$\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{y}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = 0,$$

skąd po scałkowaniu otrzymujemy całkę ogólną wyjściowego równania w postaci $(1+x^2)(1+y^2) = C^2$.

Przykład 1.2. Rozwiązać równanie

$$2y\sqrt{by-y^2}\,\mathrm{d}x - (b^2+x^2)\,\mathrm{d}y = 0,$$

stąd

$$\frac{\mathrm{d}x}{b^2+x^2} - \frac{\mathrm{d}y}{2y\sqrt{by-y^2}} = 0 \quad \vee \quad y\sqrt{by-y^2} = 0.$$

Po scałkowaniu mamy

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{b} + \sqrt{\frac{b-y}{y}} = C.$$

Jest to całka ogólna wyjściowego równania.

Z warunku $y\sqrt{by-y^2} = 0$ otrzymujemy $y = 0 \vee y = b$. Zauważmy, że rozwiązanie $y = b$ jest rozwiązaniem osobliwym, ponieważ przez każdy punkt (x_0, b) tej krzywej przechodzi jedna z krzywych całkowych rozwiązania ogólnego (jest naruszona jednoznaczność rozwiązania); $y = 0$ jest rozwiązaniem szczególnym.

Zadania

Rozwiązać równania:

1. $(x+2x^3)\,\mathrm{d}x + (y+2y^3)\,\mathrm{d}y = 0$
2. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = 0$
3. $2x\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0$
4. $\operatorname{tg} x \sin^2 y\,\mathrm{d}x + \cos^2 x \operatorname{ctg} y\,\mathrm{d}y = 0$
5. $y - xy' = a(1+x^2y')$

Rozwiązać problem początkowy Cauchy'ego:

6. $(1+e^x)yy' = e^x, \quad y(0) = 1$
7. $(xy^2+x)\,\mathrm{d}x + (x^2y-y)\,\mathrm{d}y = 0, \quad y(0) = 1$
8. $y'\sin x = y\ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
9. Znaleźć krzywe, w których odcinek stycznej zawarty między osiami współrzędnych, jest podzielony na połowy w punkcie styczności. Wyznaczyć krzywą przechodzącą przez punkt $M(2,3)$.

Odpowiedzi

1. $x^2+y^2+x^4+y^4 = C^2$
2. $\arcsin x + \arcsin y = C$
3. $x^2 - \sqrt{1-y^2} = C \quad \vee \quad y = 1 \quad \vee \quad y = -1$
4. $\operatorname{ctg}^2 y = \operatorname{tg}^2 x + C$
5. $y = \dfrac{Cx}{1+ax} + a$
6. $2e^{\frac{y^2}{2}} = \sqrt{e}(1+e^x)$
7. $1+y^2 = \dfrac{2}{1-x^2}$
8. $y = 1$
9. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\dfrac{y}{x}, \quad xy = C, \quad xy = 6$

1.3.2. Równania sprowadzalne do równań o rozdzielających się zmiennych

Równanie postaci

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.4}$$

gdzie $f\colon R \to R$ — ciągła, jest równaniem jednorodnym.

W równaniu (1.4) wprowadzamy nową zmienną zależną

$$u = \frac{y}{x},$$

skąd

$$y' = u + xu'.$$

Po wstawieniu do (1.4) i rozdzieleniu zmiennych mamy:

$$\frac{\mathrm{d}u}{f(u) - u} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \vee \quad f(u) = u \quad \vee \quad x = 0.$$

W równaniu

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(ax + by + c) \tag{1.5}$$

wprowadzamy nową zmienną zależną

$$u = ax + by + c.$$

Dalej postępujemy analogicznie jak w przypadku (1.4).

Natomiast w równaniu

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{1.6}$$

przy założeniu że $\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \neq 0$ i $f\colon R \to R$ jest funkcją ciągłą, wprowadzamy nowe zmienne: niezależną ξ i zależną η, jak poniżej

$$\begin{cases} x = \xi + \alpha \\ y = \eta + \beta \end{cases},$$

gdzie α i β spełniają układ równań

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases}.$$

Łatwo sprawdzić, że równanie (1.6) przyjmie postać równania jednorodnego

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}\right).$$

Przykład 1.3. Rozwiązać równanie

$$xy' = 3y - 2x - 2\sqrt{xy - x^2}, \quad \text{dla } x \neq 0.$$

Zauważmy, że równanie jest określone dla $xy - x^2 \geqslant 0$. Zapiszmy je w postaci

$$y' = 3\frac{y}{x} - 2 - 2\sqrt{\frac{y}{x} - 1}.$$

Niech:

$$u = \frac{y}{x},$$
$$y' = u + xu',$$
$$u + xu' = 3u - 2 - 2\sqrt{u - 1},$$

skąd

$$\frac{\mathrm{d}u}{2(u-1) - 2\sqrt{u-1}} = \frac{dx}{x} \quad \vee \quad u - 1 - \sqrt{u-1} = 0.$$

Po scałkowaniu

$$\ln\left|\sqrt{u-1} - 1\right| = \ln|x| + \ln|C|,$$

czyli

$$\sqrt{u-1} - 1 = Cx.$$

Wracając do poprzednich zmiennych mamy ostatecznie całkę ogólną rozważanego równania

$$y = x\left[1 + (1 + Cx)^2\right],$$

gdzie: $x \neq 0$ i $1 + Cx > 0$.

Z warunku

$$u - 1 - \sqrt{u-1} = 0$$

mamy $u = 1 \vee u = 2$, zatem odpowiednio $y = x$ $(x \neq 0)$, $y = 2x$ $(x > 0)$, są również rozwiązaniami naszego równania. Pierwsze z nich $(y = x)$ jest rozwiązaniem osobliwym, drugie $(y = 2x)$ — rozwiązaniem szczególnym.

Przykład 1.4. Rozwiązać równanie

$$(x + y - 2)\,\mathrm{d}x + (x - y + 4)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Zauważmy, że

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -2 \neq 0.$$

Rozwiązując układ

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 2 = 0 \\ \alpha - \beta + 4 = 0 \end{cases}$$

otrzymujemy $\alpha = -1$, $\beta = 3$.

Dokonując zamiany zmiennych

$$\begin{cases} x = \xi - 1 \\ y = \eta + 3 \end{cases}$$

otrzymujemy równanie jednorodne

$$(\xi + \eta)\,\mathrm{d}\xi + (\xi - \eta)\,\mathrm{d}\eta = 0.$$

Całkując to równanie po uprzednim przedstawieniu $\eta = u\xi$, otrzymujemy

$$\xi^2 + 2\eta\xi - \eta^2 = C.$$

Wracając do zmiennych x i y, mamy ostatecznie całkę ogólną wyjściowego równania w postaci

$$x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C.$$

Rozwiązań osobliwych nie ma.

Zadania

Rozwiązać równania:

1. $y' = -\dfrac{x + y}{x}$
2. $y\,\mathrm{d}x + (2\sqrt{xy} - x)\,\mathrm{d}y = 0$
3. $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = y\,\mathrm{d}y$
4. $\dfrac{\mathrm{d}x}{y + x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{y - x}, \quad x \neq 0$
5. $\dfrac{\mathrm{d}x}{2x^2 - 2xy + 2y^2} = \dfrac{\mathrm{d}y}{y^2 - 4xy}$
6. $y' = \dfrac{1 - 3x - 3y}{1 + x + y}$
7. $(2x - y + 4)\,\mathrm{d}y + (x - 2y + 5)\,\mathrm{d}x = 0$

Rozwiązać problem początkowy Cauchy'ego:

8. $(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x - 2xy\,\mathrm{d}y = 0, \quad y(4) = 0$
9. $\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0, \quad y(1) = 0$
10. Znaleźć krzywą, dla której trójkąt, utworzony przez oś Oy, styczną i wektor wodzący punktu styczności, jest równoramienny.

Odpowiedzi

1. $y = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}$
2. $\sqrt{\frac{x}{y}} + \ln|y| = C \quad \vee \quad y = 0$
3. $x = y(C - \ln|y|) \quad \vee \quad y = 0$
4. $\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{-\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}$
5. $2y^3 - 3xy^2 + 6x^2y = C$
6. $3x + y + 2\ln|x + y - 1| = C \quad \vee \quad y = 1 - x$
7. $(x + y - 1)^3 = C(x - y + 3)$
8. $(x - C)^2 - y^2 = C^2; \quad (x - 2)^2 - y^2 = 4$
9. $y = \frac{1}{2}\left(Cx^2 - \frac{1}{C}\right), \ (C > 0); \qquad y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$
10. $y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}, \quad x^2 + y^2 = Cx; \qquad y' = -\frac{y}{x}, \quad y = \frac{C}{x}, \quad (C \neq 0);$

    $y' = \frac{y - \sqrt{x^2 + y^2}}{x}, \qquad x + \sqrt{x^2 + y^2} = C$

1.3.3. Równania liniowe

Równanie postaci

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{1.7}$$

nazywamy równaniem liniowym niejednorodnym, natomiast

$$y' + p(x)y = 0 \tag{1.8}$$

równaniem liniowym jednorodnym.

TWIERDZENIE 1.2. *Jeżeli* $p, q \in C_{[a,b]}$, *to dla dowolnych* $(x_0, y_0) \in]a, b[\times R$, *istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równania* (1.7) *spełniające warunek początkowy* $y(x_0) = y_0$.

Konstrukcja rozwiązania ogólnego dla równania liniowego niejednorodnego (1.7)

Szukamy całki ogólnej $\overline{y}$ równania liniowego jednorodnego (1.8). Łatwo sprawdzić, że

$$\overline{y} = Ce^{-P(x)},$$

gdzie P jest funkcją pierwotną do p.

Całkę szczególną równania (1.7) można znaleźć metodą uzmienniania stałej. Przewidujemy, że funkcja postaci

$$y_1 = C(x)e^{-P(x)},$$

gdzie $C \in C^1[a,b]$, jest rozwiązaniem równania (1.7).

W celu znalezienia funkcji $C(x)$, wstawiamy y_1 do równania (1.7). Otrzymujemy

$$C'(x)e^{-P(x)} = q(x),$$

skąd

$$C(x) = \int q(x)e^{P(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Rozwiązanie ogólne równania liniowego niejednorodnego (1.7) jest sumą całki ogólnej równania liniowego jednorodnego (1.8) i całki szczególnej równania liniowego niejednorodnego (1.7).

Zatem

$$y = e^{-P(x)}\left[C + \int q(x)e^{P(x)\,\mathrm{d}x}\right].$$

Przykład 1.5. Rozwiązać równanie

$$x\,\mathrm{d}y + (x^2 - y)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Zapiszmy to równanie w postaci równoważnej

$$\text{(a)}\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{y}{x} = -x \quad \vee \quad \text{(b)}\ x = 0.$$

Rozwiązujemy równanie liniowe jednorodne

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{y}{x} = 0.$$

Całką ogólną tego równania jest funkcja $\overline{y} = Cx$.

Niech $y_1 = C(x)x$ będzie całką szczególną równania (a). Wstawiając y_1 do (a) otrzymujemy $C'x = -x$, stąd $C(x) = -x$. Zatem całka ogólna rozważanego równania jest następująca

$$y = x(C - x).$$

Z warunku (b) wynika, że rozwiązaniami są również półosie $x = 0$ $(y \neq 0)$.

Przykład 1.6. Rozwiązać równanie

$$2y\,\mathrm{d}x + (y^2 - 2x)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Zauważmy, że równanie to można doprowadzić do równania liniowego ze względu na funkcję $x = x(y)$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - \frac{x}{y} = -\frac{y}{2} \quad \vee \quad y = 0.$$

Postępując analogicznie jak w przykładzie 1.5 otrzymujemy

$$x = Cy - \frac{1}{2}y^2.$$

Zadania

Znaleźć całkę ogólną równania:

1. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{2y}{x} = x^3$
2. $y' - y \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}$
3. $(1 + y^2)\,\mathrm{d}x = \left(\sqrt{1 + y^2}\, \sin y - xy\right) \mathrm{d}y$

Rozwiązać problem początkowy Cauchy'ego:

4. $xy' + y - e^x = 0, \quad y(a) = b$
5. $y' - \dfrac{y}{1 - x^2} - 1 - x = 0, \quad y(0) = 0$
6. Wykazać, że równanie $y' + ay = e^{mx}$, $a, m \in R$ ma rozwiązanie szczególne postaci $y_1 = be^{mx}$, jeżeli $m \neq -a$ oraz $y_1 = bxe^{mx}$, jeżeli $m = -a$.

Odpowiedzi

1. $y = \dfrac{1}{6}x^4 + \dfrac{C}{x^2}$
2. $y = \dfrac{1}{\cos x}\big(C + x\big)$
3. $x\sqrt{1 + y^2} + \cos y = C$
4. $y = \dfrac{e^x}{x} + \dfrac{ab - e^a}{x}$
5. $y = \dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x\right)\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$

1.3.4. Równanie Bernoulliego

Równanie Bernoulliego ma następującą postać

$$y' + p(x)y = q(x)y^r \tag{1.9}$$

gdzie: $p, q \in C_{[a,b]}$, $r \in R \setminus \{0, 1\}$ (dla $r \in \{0, 1\}$ równanie (1.9) jest liniowe).

Przy dokonanych założeniach, istnieje jednoznaczne rozwiązanie równania (1.9) przechodzące przez punkt (x_0, y_0), gdzie $x_0 \in]a, b[$ i $y_0 \neq 0$ (lub $y_0 > 0$).

Konstrukcja rozwiązania

Dzielimy obie strony równania (1.9) przez y^r, a następnie wprowadzamy nową zmienną zależną $z = y^{1-r}$.

Równanie (1.9) przyjmuje postać

$$\frac{1}{1-r} z' + p(x)z = q(x).$$

Jest to równanie liniowe niejednorodne.

Przykład 1.7. Rozwiązać problem początkowy Cauchy'ego (a) i (b):

$$y' - 2xy = 2x^3y^2 \tag{a}$$

$$y(0) = 1 \tag{b}$$

Dzielimy obie strony równania przez y^2

$$\frac{1}{y^2} y' - 2x\frac{1}{y} = 2x^3,$$

następnie wprowadzamy nową zmienną $z = \dfrac{1}{y}$, stąd

$$\frac{1}{y^2} y' = -z',$$

zatem

$$z' + 2xz = -2x^3.$$

Po rozwiązaniu (patrz podrozdz. 1.3.3)

$$z = Ce^{-x^2} + 1 - x^2,$$

czyli

$$y = \frac{1}{Ce^{-x^2} + 1 - x^2}$$

jest całką ogólną równania (a). Wstawiając (b) do całki ogólnej mamy

$$1 = \frac{1}{C+1},$$

skąd

$$C = 0.$$

A więc rozwiązaniem problemu (a) (b) jest funkcja

$$y = \frac{1}{1-x^2}.$$

Zauważmy, że również prosta $y = 0$ jest rozwiązaniem równania (a), jest ona asymptotą wszystkich pozostałych krzywych całkowych.

Przykład 1.8. Rozwiązać równanie

$$y' + \frac{x}{1-x^2}y = x\sqrt{y}.$$

Postępując analogicznie jak w przykładzie (1.7) (tzn. dzieląc obie strony równania przez $\sqrt{y}$ i dokonując podstawienia $z = \sqrt{y}$) otrzymujemy

$$z' + \frac{x}{2(1-x^2)}z = \frac{1}{2}x,$$

skąd

$$z = C\sqrt[4]{1-x^2} - \frac{1}{3}(1-x^2),$$

a więc

$$\sqrt{y} = C\sqrt[4]{1-x^2} - \frac{1}{3}(1-x^2)$$

jest całką ogólną równania (a).

Również funkcja $y = 0$ spełnia równanie (a). Uzasadnij, że jest ona rozwiązaniem osobliwym.

Przykład 1.9. Rozwiązać równanie

$$\mathrm{d}x - (xy + x^2y^3)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{a}$$

Zapiszmy to równanie w postaci

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - xy = x^2y^3.$$

Zauważmy, że uzyskane równanie jest równaniem Bernoulliego o niewiadomej funkcji $x = x(y)$.

Rozwiązaniem ogólnym tego równania jest

$$x = \frac{1}{Ce^{-\frac{1}{2}y^2} - y^2 + 2}.$$

Prosta $x = 0$ będąca asymptotą wszystkich krzywych całkowych zawartych w całce ogólnej, jest również krzywą całkową równania (a).

Zadania

Rozwiązać równania:

1. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{y}{x} = -xy^2$
2. $2xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y^2 + x = 0$
3. $y\,\mathrm{d}x + (x - \frac{1}{2}x^3 y)\,\mathrm{d}y = 0$
4. $3x\,\mathrm{d}y = y(1 + x\sin x - 3y^3 \sin x)\,\mathrm{d}x$

Rozwiązać problem początkowy Cauchy'ego:

5. $y' - 9x^2 y = (x^5 + x^2)y^{\frac{2}{3}}, \quad y(0) = 0$
6. $y' - y = xy^2, \quad y(0) = 0$
7. Znaleźć krzywe, dla których odcinek odcięty na osi Ox przez normalną, jest równy $\dfrac{y^2}{x}$.
8. Znaleźć krzywe, dla których odcinek odcięty na osi Oy przez styczną, jest równy kwadratowi rzędnej punktu styczności.

Odpowiedzi

1. $y(x^2 + xC) = 1$
2. $y^2 = x \ln \dfrac{C}{x}$
3. $x^2 = \dfrac{1}{y + Cy^2} \quad \vee \quad x = 0 \quad \vee \quad y = 0$
4. $y^3(3 + Ce^{\cos x}) = x \quad \vee \quad y = 0$

5. $y = \left(Ce^{x^3} - \frac{1}{9}x^3 - \frac{2}{9} \right)^3 \quad \vee \quad y = 0; \quad y = \left(\frac{2}{9}e^{x^3} - \frac{1}{9}x^3 - \frac{2}{9} \right)^3 \quad \vee \quad y = 0$

6. $\frac{1}{y} = Ce^{-x} - x + 1, \quad y = 0$

7. $yy' + x = \frac{y^2}{x}, \quad y^2 = 2x^2(C - \ln|x|)$

8. $y - xy' = y^2, \quad y = \frac{x}{x + C}$

1.3.5. Równania zupełne

Równanie postaci

$$P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{1.10}$$

nazywamy równaniem zupełnym wtedy i tylko wtedy, gdy lewa strona tego równania jest różniczką pewnej funkcji, tzn. jeżeli istnieje funkcja rzeczywista U zmiennych x i y, taka, że

$$\mathrm{d}U(x, y) = P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

Wtedy rozwiązaniem ogólnym równania (1.10) jest funkcja zadana w postaci uwikłanej

$$U(x, y) = C.$$

TWIERDZENIE 1.3. *Jeżeli $P, Q \in C_{(D)}$, gdzie $D \subset R^2$ jest obszarem, oraz istnieją w D ciągłe pochodne $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, wówczas na to aby równanie* (1.10) *było zupełne w D potrzeba i wystarcza by*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad w\ D \tag{1.11}$$

Rozwiązanie równania (1.10) można znaleźć na dwa sposoby:

1. Jeżeli warunek (1.11) jest spełniony, wówczas całka ogólna tego równania jest postaci

$$\int_{x_0}^{x} P(t, x_0)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)\,\mathrm{d}t = C \tag{1.12}$$

lub

$$\int_{x_0}^{x} P(t, y)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, t)\,\mathrm{d}t = C \tag{1.12a}$$

gdzie $(x_0, y_0) \in D$ jest dowolnie ustalonym punktem.

Uwaga 1.2. Jeżeli $C = 0$, to (1.12) lub (1.12a) jest rozwiązaniem spełniającym warunek początkowy $y(x_0) = y_0$.

2. Aby różniczka funkcji U, była lewą stroną równania (1.10), musi być spełniony układ równań:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= P(x,y) \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= Q(x,y) \end{aligned} \tag{1.13}$$

Całkując względem x pierwsze z tych równań mamy

$$U(x,y) = \int P(x,y)\,\mathrm{d}x + \varphi(y) \tag{1.14}$$

gdzie φ jest dowolną funkcją zmiennej y. Ale funkcja U musi spełniać drugie z równań (1.13) z uwzględnieniem (1.11), uzyskujemy więc

$$\varphi'(y) = \omega(y),$$

skąd

$$\varphi(y) = \int \omega(y)\,\mathrm{d}y,$$

zatem całka ogólna równania (1.10) ma następującą postać

$$\int P(x,y)\,\mathrm{d}x + \int \omega(y)\,\mathrm{d}y = C,$$

lub wychodząc z drugiego z równań (1.13) otrzymujemy poniższy wzór na całkę ogólną

$$\int Q(x,y)\,\mathrm{d}y + \int \omega_1(x)\,\mathrm{d}x = C.$$

Przykład 1.10. Znaleźć całkę ogólną równania

$$\left[\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right]\mathrm{d}x + \left[\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right]\mathrm{d}x = 0 \tag{a}$$

Zauważmy, że

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x-y)^3} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

zatem równanie (a) jest zupełne.

Pierwszy sposób. Przyjmując $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ mamy

$$\int_1^x \left[\frac{1}{t} - \frac{4}{(t-2)^2}\right]\mathrm{d}t + \int_2^y \left[\frac{x^2}{(x-t)^2} - \frac{1}{t}\right]\mathrm{d}t = C$$

lub po scałkowaniu

$$\ln\left|\frac{x}{y}\right| + \frac{xy}{x-y} = C \tag{a'}$$

Otrzymany wzór określa całkę ogólną równania (a).

Drugi sposób. Szukamy funkcji U spełniającej układ równań:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{1}{x} - \frac{x^2}{(x-y)^2} \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y} \end{aligned} \tag{b}$$

Z pierwszego równania

$$U(x,y) = \int \left[\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right] \mathrm{d}x + \varphi(y) = \ln|x| + \frac{y^2}{x-y} + \varphi(y) \tag{c}$$

na podstawie (b) i (c) mamy

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2xy - y^2}{(x-y)^2} + \varphi'(y) = \frac{x^2}{(x-y^2)} - \frac{1}{y},$$

stąd

$$\varphi'(y) = 1 - \frac{1}{y},$$

zatem

$$\varphi(y) = y - \ln|y|\,.$$

Wstawiając do (c) uzyskujemy

$$U(x,y) = \ln|x| + \frac{y^2}{x-y} + y - \ln|y|\,.$$

Rozwiązanie ogólne $U(x,y) = C$ ma postać (a').

Przykład 1.11. Rozwiąż problem początkowy Cauchy'ego:

$$\left(x + e^{\frac{x}{y}}\right) \mathrm{d}x + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) \mathrm{d}y = 0 \tag{a}$$

$$y(0) = 2 \tag{b}$$

Łatwo sprawdzić, że jest to równanie zupełne.

Zgodnie ze wzorem (1.12) lub (1.12a), na podstawie uwagi 1.2, szukane rozwiązanie jest następujące

$$\int_0^x \left(t + e^{\frac{t}{2}}\right) \mathrm{d}t + \int_2^y e^{\frac{x}{t}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) \mathrm{d}t = 0 \tag{c}$$

Skąd, po scałkowaniu, rozwiązanie problemu (a) (b), przyjmuje ostatecznie postać

$$x^2 + 2ye^{\frac{x}{y}} = 4.$$

Zadania

Znaleźć całkę ogólną równania:

1. $(x + y)\,\mathrm{d}x + (x + 2y)\,\mathrm{d}y = 0$
2. $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = \dfrac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$
3. $\dfrac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} + \dfrac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2 + y^2} = 0$
4. $\dfrac{2x(1 - e^y)\,\mathrm{d}x}{(1 + x^2)^2} + \dfrac{e^y\,\mathrm{d}y}{1 + x^2} = 0$

Rozwiązać problem początkowy Cauchy'ego:

5. $\dfrac{(x + 2y)\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{(x + y)^2} = 0, \quad y(1) = 0$
6. $(x - y)\,\mathrm{d}x + (2y - x)\,\mathrm{d}y = 0, \quad y(0) = 0$

Odpowiedzi

1. $\dfrac{x^2}{2} + xy + y^2 = C$
2. $x^2 + y^2 - 2\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x} = C$
3. $\sqrt{1 + x^2 + y^2} + \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x} = C$
4. $\dfrac{e^y - 1}{1 + x^2} = C$
5. $\ln|x + y| - \dfrac{y}{x + y} = 0$
6. $\dfrac{x^2}{2} - xy + y^2 = 0$

1.3.6. Czynnik całkujący

Jeżeli dla równania

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{1.15}$$

istnieje taka funkcja rzeczywista μ zmiennych x i y, że równanie

$$\mu(x,y)\,[P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y] = 0 \tag{1.16}$$

jest zupełne, to funkcję μ nazywamy czynnikiem całkującym równania (1.15).

Uwaga 1.3. Równania (1.15) i (1.16) zazwyczaj nie są równoważne.

Jeżeli μ jest funkcją zmiennych x i y różniczkowalną w sposób ciągły, to dla dowolnych x, y

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$$

lub

$$Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \tag{1.17}$$

zatem funkcja μ musi spełniać powyższe równanie.

Czynnik całkujący można łatwo znaleźć w dwóch przypadkach:

1. Jeżeli istnieje czynnik całkujący zależny tylko od zmiennej x, tzn. $\mu(x,y) = \mu(x)$, wtedy na podstawie (1.17) mamy

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{1}{Q}\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right] \tag{1.17a}$$

2. Jeżeli istnieje czynnik całkujący zależny tylko od zmiennej y, tzn. $\mu(x,y) = \mu(y)$, to

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{1}{P}\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] \tag{1.17b}$$

Związki (1.17a) i (1.17b), dają również odpowiedź, kiedy takie czynniki całkujące istnieją. I tak

$$\mu(x,y) = \mu(x), \quad \text{jeżeli } \frac{1}{Q}\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right] \text{ jest funkcją wyłącznie zmiennej } x,$$

natomiast

$$\mu(x,y) = \mu(y), \quad \text{jeżeli } \frac{1}{P}\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] \text{ jest funkcją wyłącznie zmiennej } y.$$

Przykład 1.12. Rozwiązać równanie

$$\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right) \mathrm{d}x + \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}y = 0 \tag{a}$$

Zauważmy, że

$$\frac{1}{Q}\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right] = \frac{2x + x^2 + y^2 - 2x}{x^2 + y^2} = 1,$$

tak więc, istnieje czynnik całkujący zależny od zmiennej x ($\mu = \mu(x)$).

Na podstawie (1.17a) $\dfrac{\mu'(x)}{\mu(x)} = 1$, stąd $\mu(x) = e^x$. Mnożąc stronami równanie (a) przez e^x, uzyskujemy równanie zupełne

$$e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right) \mathrm{d}x + e^x\left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}y = 0 \tag{a'}$$

którego całka ogólna dana jest związkiem

$$ye^x\left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right) = C.$$

Zadania

Rozwiązać równania:

1. $\dfrac{y}{x}\,\mathrm{d}x + (y^3 - \ln x)\,\mathrm{d}y = 0$
2. $(2xy^2 - y)\,\mathrm{d}x + (y^2 + x + y)\,\mathrm{d}y = 0$
3. $\left(\dfrac{x}{y} + 1\right) \mathrm{d}x + \left(\dfrac{x}{y} - 1\right) \mathrm{d}y = 0$
4. $(x\cos y - y\sin y)\,\mathrm{d}y + (x\sin y + y\cos y)\,\mathrm{d}x = 0$

Odpowiedzi

1. $\dfrac{1}{y}\ln x + \dfrac{1}{2}y^2 = C \quad \vee \quad y = 0$
2. $x^2 + y - \dfrac{x}{y} + \ln|y| = C \quad \vee \quad y = 0$
3. $x^2 - y^2 + 2xy = C$
4. $e^x(x\sin y - \sin y + y\cos y) = C$

1.3.7. Równania Lagrange'a i Clairauta

Równanie

$$y = \varphi(y')x + \psi(y') \tag{1.18}$$

gdzie $\varphi(y') \neq y'$, nazywamy równaniem Lagrange'a. Natomiast równanie

$$y = xy' + \psi(y') \tag{1.19}$$

gdzie $\psi(y') \not\equiv ay' + b$, nazywamy równaniem Clairauta. W obu przypadkach stosujemy podstawienie $y' = p$.

Konstrukcja rozwiązania równania Lagrange'a

Różniczkując stronami równanie (1.18), a następnie wstawiając $y' = p$ mamy

$$p = \varphi(p) + x\varphi'(p)p' + \psi'(p)p'$$

lub

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} - \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)} \quad \vee \quad \varphi(p) - p = 0.$$

Uzyskaliśmy równanie liniowe niejednorodne, o niewiadomej funkcji $x = x(p)$.

Rozwiązanie tego równania ma postać $x = A(p)C + B(p)$. Wstawiając ten związek do (1.18), z uwzględnieniem podstawienia ($y' = p$), mamy

$$y = A(p)\varphi(p)C + \varphi(p)B(p) + \psi(p).$$

Otrzymaliśmy całkę ogólną równania Lagrange'a w postaci parametrycznej

$$\begin{cases} x = A(p)C + B(p) \\ y = A_1(p)C + B_1(p) \end{cases},$$

gdzie: $A_1(p) = A(p)\varphi(p)$, $B_1 = \varphi(p)B(p) + \psi(p)$.

Jeżeli $\varphi(p) - p = 0$ posiada pierwiastki rzeczywiste $p = p_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, to podstawiając je do równania (1.18), z uwzględnieniem warunków $\varphi(p_i) = p_i$ oraz $y' = p_i$, mamy

$$y = p_i x + \psi(p_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Stąd wniosek, że rozwiązaniami osobliwymi równania Lagrange'a mogą być jedynie funkcje liniowe.

Konstrukcja rozwiązania równania Clairauta

Postępując podobnie, jak przy całkowaniu równania Lagrange'a, tzn. różniczkując stronami równanie (1.19) i podstawiając $y' = p$, dostajemy

$$[x + \psi'(p)]\, p' = 0,$$

skąd

$$p' = 0 \tag{1.20}$$

lub

$$x + \psi'(p) = 0 \tag{1.21}$$

Całkując dwukrotnie równanie (1.20), z uwzględnieniem podstawienia $y' = p$, mamy

$$y = Cx - C_1 \tag{1.20a}$$

Następnie związek (1.20a) wstawiamy do wyjściowego równania (1.19), celem określenia C_1. Tak więc

$$Cx + C_1 = Cx + \psi(C),$$

zatem rozwiązanie (1.20a) przyjmuje ostatecznie postać

$$y = Cx + \psi(C).$$

Jest to rozwiązanie ogólne równania Clairauta.

Ze związku (1.21) i równania (1.19) (z uwzględnieniem $y' = p$), uzyskujemy rozwiązanie równania Clairauta w postaci parametrycznej

$$\begin{cases} x = -\psi'(p) \\ y = -\psi'(p)p + \psi(p) \end{cases},$$

które jest zwykle rozwiązaniem osobliwym.

Przykład 1.13. Rozwiązać równanie

$$y = 2y'x + \frac{1}{y'} \tag{a}$$

Różniczkując stronami i kładąc $y' = p$, mamy

$$p\,\mathrm{d}x = 2p\,\mathrm{d}x + 2x\,\mathrm{d}p - \frac{\mathrm{d}p}{p^2}$$

lub

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = -\frac{2}{p}x + \frac{1}{p^3} \tag{b}$$

Całką ogólną równania (b) jest funkcja

$$x = \frac{1}{p^2}C + \frac{\ln p}{p^2},$$

zatem całka ogólna równania (a) ma postać

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{p^2}C + \dfrac{\ln p}{p^2} \\ y = \dfrac{2}{p}C + \dfrac{1}{p}\left[2\ln p + 1\right] \end{cases}.$$

Sprawdzamy, czy istnieją rozwiązania osobliwe, w tym celu szukamy pierwiastków równania

$$\varphi(p) = p,$$

czyli

$$2p = p.$$

Jedynym rozwiązaniem jest $p = 0$. Ale z (a) wynika, że $p \neq 0$, zatem równanie (a) nie ma rozwiązań osobliwych.

Przykład 1.14. Wyznaczyć krzywe, dla których odcinek stycznej zawarty między osiami współrzędnych ma stałą długość d.

Z równania

$$\eta - y = y'(\xi - x)$$

stycznej poprowadzonej w punkcie $P(x, y)$ szukanej krzywej, wyznaczamy punkty $A(x - \frac{y}{y'}, 0)$ i $B(0, y - xy')$ przecięcia się tej stycznej z osiami układu współrzędnych

$$d^2 = \left(x - \frac{y}{y'}\right)^2 + (y - xy')^2,$$

skąd

$$y = xy' \pm \frac{y'd}{\sqrt{1 + (y')^2}} \tag{a}$$

Każde z równań (a) jest równaniem Clairauta. Różniczkując (a) stronami i podstawiając $y' = p$, mamy

$$\left[x \pm \frac{d}{\sqrt{(1 + p^2)^3}}\right] p' = 0,$$

skąd

$$y = Cx \pm \frac{Cd}{\sqrt{1 + C^2}} \tag{b}$$

stanowi całkę ogólną równania (a), natomiast:

$$\begin{aligned} x &= \pm\frac{d}{\sqrt{(1+p^2)^3}} \\ y &= \pm\frac{p^3 d}{\sqrt{(1+p^2)^3}} \end{aligned} \tag{c}$$

jest rozwiązaniem osobliwym równań (a).

Rugując z (c) parametr p, uzyskujemy inną postać rozwiązania osobliwego

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = d^{\frac{2}{3}}.$$

Jest to równanie asteroidy.

Krzywymi spełniającymi warunki naszego zadania są rodzina prostych (b) oraz asteroida (c).

Zadania

Rozwiązać równania:

1. $y = (1 + y')x + (y')^2$
2. $2yy' = x({y'}^2 + 4)$
3. $y = -xy' + {y'}^2$
4. $2y(y' + 2) = x{y'}^2$
5. $y = xy' + y'$
6. $y = xy' + \sqrt{1 + {y'}^2}$
7. Znaleźć krzywą, której styczne tworzą z osiami współrzędnych trójkąt o powierzchni $2a^2$.
8. Znaleźć krzywą, której styczne odcinają na osiach współrzędnych odcinki, których suma długości jest równa $2a$.

Odpowiedzi

1. $\begin{cases} x = Ce^{-p} - 2p + 2 \\ y = C(1+p)e^{-p} - p^2 + 2 \end{cases}$

2. $y = Cx^2 + \dfrac{1}{C} \quad \vee \quad y = 2x \quad \vee \quad y = -2x$

3. $\begin{cases} x = \dfrac{C}{\sqrt{p}} + \dfrac{2}{3}p \\ y = \dfrac{1}{3}p^2 - C\sqrt{p} \end{cases}$

4. $y = \dfrac{1}{C}(x - C)^2 \ (C \neq 0) \quad \vee \quad y = 0 \quad \vee \quad y = -4x$

5. $y = Cx + C$

6. $y = Cx + \sqrt{1 + C^2} \quad \vee \quad x^2 + y^2 = 1$

7. $y = xy' + 2a\sqrt{-y'} \quad \vee \quad xy = a^2$

8. $y = xy' + \dfrac{2ay'}{y' - 1} \quad \vee \quad (y - x - 2a)^2 = 8ax$

1.3.8. Równanie Riccatiego

Równanie postaci

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \tag{1.22}$$

gdzie: P, Q, R są funkcjami ciągłymi w przedziale $]a, b[$, nazywamy równaniem Riccatiego.

Uwaga 1.4. Równanie Riccatiego nie posiada rozwiązań osobliwych.

Uwaga 1.5. Całki szczególne są określone jedynie w pewnym otoczeniu punktu początkowego (niekoniecznie w całym $]a, b[$).

Jeżeli znane jest jedno z rozwiązań szczególnych $y = y_1(x)$ równania (1.22), to wprowadzając nową zmienną zależną z przez podstawienie

$$y = y_1 + \frac{1}{z} \tag{1.23}$$

równanie (1.22) sprowadzi się do równania liniowego.

Równanie postaci

$$y' = Ay^2 + \frac{B}{x}y + \frac{C}{x^2} \tag{1.24}$$

gdzie: A, B, $C \in R$, oraz $(B + 1)^2 \geqslant 4AC$, ma rozwiązanie szczególne dane wzorem

$$y_1 = \frac{a}{x} \tag{1.25}$$

gdzie a jest pewną stałą, którą wyznacza się wstawiając (1.25) do (1.24).

Przykład 1.15. Rozwiązać równanie

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y^2 = \frac{2}{x^2} \tag{a}$$

Szukamy rozwiązania szczególnego w postaci

$$y_1 = \frac{a}{x}.$$

Wstawiając y_1 do (a) otrzymujemy

$$-\frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^2} = \frac{2}{x^2},$$

stąd $a = -1$ lub $a = 2$. Mamy więc dwa rozwiązania szczególne

$$y_1 = -\frac{1}{x} \quad \text{lub} \quad y_1 = \frac{2}{x}.$$

Wprowadzając w (a) nową zmienną (zgodnie ze wzorem (1.23))

$$y = \frac{1}{z} - \frac{1}{x} \tag{b}$$

uzyskujemy równanie liniowe niejednorodne

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \frac{2z}{x} = 1,$$

którego całka ogólna ma postać

$$z = \frac{C}{x^2} + \frac{1}{3}x.$$

Tak więc, zgodnie z (b), szukane rozwiązanie dane jest wzorem

$$y = \frac{3x^2}{3C + x^3} - \frac{1}{x}.$$

Zadania

Znaleźć rozwiązanie ogólne równania:

1. $y' + y^2 = -\dfrac{1}{4x^2}$
2. $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$
3. $x^2y' + (xy - 2)^2 = 0$

4. $y' = y^2 + \dfrac{1}{x^2}$

5. $y' = \frac{1}{2}y^2 + \dfrac{1}{2x^2}$

Znaleźć rozwiązanie ogólne równania wiedząc, że funkcja postaci $y = ax + b$, jest jego rozwiązaniem szczególnym:

6. $y' = -y^2 + 1 + x^2$

7. $y' = y^2 - xy - x$

8. $xy' = y^2 - (2x+1)y + x^2 + 2x$

Odpowiedzi

1. $y = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{x(C + \ln|x|)}$

2. $y = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x(C - \ln|x|)}$

3. $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{3x^2}{x^3 + C}$

4. $\dfrac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{2xy+1}{\sqrt{3}} = \ln|x| + C$

5. $y = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x(C - \ln|x|)}$

6. $y = x + \dfrac{\exp(-x^2)}{C + \int\limits_0^x \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t}$

7. $y = x + 1 + \exp\left(\dfrac{1}{2}x^2 + 2x\right)\left[C - \int\limits_0^x \exp\left(\dfrac{1}{2}t^2 + 2t\right)\,\mathrm{d}t\right]^{-1}$

8. $y = x + \dfrac{1}{1 + Cx}$

Zadania różne z równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu

Rozwiązać równania:

1. $(2xy^2 - y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0$
2. $xy' + y = xy^2 \ln x$
3. $x^2(y+1)\,\mathrm{d}x + (x^3 - 1)(y-1)\,\mathrm{d}y = 0$
4. $(1+y^2)(e^{2x}\,\mathrm{d}x - e^y\,\mathrm{d}y) - (1+y)\,\mathrm{d}y = 0$
5. $y' - y\dfrac{2x-1}{x^2} = 1$
6. $ye^y = (y^3 + 2xe^y)y'$
7. $y' + y\cos x = \sin x \cos x$
8. $(x^2y - x^2 + y - 1)\,\mathrm{d}x + (xy + 2x - 3y - 6)\,\mathrm{d}y = 0$
9. $y' = \left(1 + \dfrac{y-1}{2x}\right)^2$
10. $xy^3\,\mathrm{d}x = (x^2y + 2)\,\mathrm{d}y$
11. $2\,\mathrm{d}x + \sqrt{\dfrac{x}{y}}\,\mathrm{d}y - \sqrt{\dfrac{y}{x}}\,\mathrm{d}x = 0$
12. $e^y\,\mathrm{d}x + (xe^y - 2y)\,\mathrm{d}y = 0$
13. $y = 2xy' + \sqrt{1 + (y')^2}$
14. $y'(x + \sin y) = 1$
15. $y' = \dfrac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x)$
16. $(2e^x + y^4)\,\mathrm{d}y - ye^x\,\mathrm{d}x = 0$
17. $x^2(y')^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$
18. $xy(xy^2 + 1)\,\mathrm{d}y - \mathrm{d}x = 0$
19. $xy(y')^2 - (x^2 + y^2)y' + xy = 0$
20. $(3x^2 + 2xy - y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2 - 2xy - 3y^2)\,\mathrm{d}y = 0$

Odpowiedzi

1. $y = \dfrac{x}{x^2 + C} \quad \vee \quad y = 0$
2. $xy\left(C - \dfrac{1}{2}\ln^2 x\right) = 1 \quad \vee \quad y = 0$
3. $3y + \ln\dfrac{|x^3 - 1|}{(y+1)^6} = C$
4. $\dfrac{1}{2}e^{2x} - e^y - \operatorname{arc\,tg} y - \dfrac{1}{2}\ln(1+y^2) = C$
5. $y = x^2\left(1 + Ce^{\frac{1}{x}}\right)$
6. $x = y^2\left(C - e^{-y}\right) \quad \vee \quad y = 0$
7. $y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1$
8. $\dfrac{x^2}{2} + 3x + y + \ln\left[(x-3)^{10}|y-1|^3\right] = C \quad \vee \quad x = 3 \quad \vee \quad y = 1$
9. $2\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y-1}{2x} = \ln|Cx|$
10. $x^2 = 1 - \dfrac{2}{y} + Ce^{-\frac{2}{y}}$
11. $\sqrt{\dfrac{y}{x}} + \ln|x| = C \quad \vee \quad x = 0$
12. $xe^y - y^2 = C$
13. $\begin{cases} x = \dfrac{C}{p^2} - \dfrac{\sqrt{1+p^2}}{2p} + \dfrac{1}{2p^2}\ln\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) \\ y = 2px + \sqrt{1+p^2} \end{cases}$
14. $x = Ce^y - \dfrac{1}{2}(\sin x + \cos y)$
15. $y = xe^{Cx}$
16. $2e^x - y^4 = Cy^2$
17. $(xy + C)(x^2y + C) = 0$
18. $y^2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}} + \dfrac{1}{x} - 2 = 0$
19. $(y - Cx)(y^2 - x^2 + C) = 0$
20. $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 = C$

Rozdział **2.**

Układy równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego

Rozważmy układ równań różniczkowych

$$x_i'(t) = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.1}$$

gdzie:

$R \ni t$ — zmienna niezależna,
$x_1, \ldots, x_n$ — szukane funkcje rzeczywiste (lub zespolone) zmiennej t,
$f_i \colon R^{n+1} \to R$ $(i = 1, \ldots, n)$ — zadane funkcje.

Definicja 2.1. *Powiemy, że funkcja* $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ *jest rozwiązaniem układu* (2.1) *w* $[a, b]$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\bigwedge_{t \in [a,b]} x_i'(t) = f_i(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Krzywa o równaniu $x = x(t)$ *nazywa się krzywą całkową układu* (2.1).

Niech

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.2}$$

gdzie: $t_0 \in]a, b[$, $x_{i0} \in R$.

Definicja 2.2. *Zagadnienie polegające na znalezieniu rozwiązania układu* (2.1)*, spełniającego warunek początkowy* (2.2) *nosi nazwę problemu początkowego Cauchy'ego.*

Uwaga 2.1. Układ (2.1) jest równoważny równaniu wektorowemu

$$x' = f(t, x) \tag{2.1a}$$

gdzie: $x \colon R \supset [a, b] \to R^n$, $f \colon [a, b] \times R^n \to R^n$, zaś warunek początkowy (2.2) można zapisać następująco

$$x(t_0) = x_0 \tag{2.2a}$$

gdzie: $t_0 \in]a, b[$, $x_0 \in R^n$.

Definicja 2.3. *Mówimy, że odwzorowanie*

$$f\colon [a,b]\times R^n \ni (t,x)\to f(t,x)\in R^n$$

spełnia warunek Lipschitza ze względu na x, jeżeli

$$\bigvee_{L>0}\ \bigwedge_{\substack{t\in[a,b]\\ x^1,x^2\in R^n}} \left\|f(t,x^1)-f(t,x^2)\right\| \leqslant L\left\|x^1-x^2\right\|.$$

Stałą L nazywamy stałą Lipschitza.

Zakładamy, że w R^n dana jest norma euklidesowa (tzn. $\|a\|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}$).

W dalszym ciągu równanie wektorowe (2.1a) będziemy nazywać układem równań różniczkowych zwyczajnych.

Twierdzenie 2.1.
Z. *Dany jest zbiór otwarty $V\subset R^n$ oraz odwzorowanie $f\colon [a,b]\times V\to R^n$ ciągłe, ponadto istnieje kula $K(x_0,r)\subset V$ taka, że f spełnia warunek Lipschitza na $[a,b]\times K(x_0,r)$ ze względu na x, wówczas*
T. *istnieje takie $\delta>0$, że problem początkowy* (2.1a), (2.2a) *ma dokładnie jedno rozwiązanie w przedziale $]t_0-\delta,t_0+\delta[$.*

2.1. Układy liniowe równań różniczkowych rzędu pierwszego

Niech

$$x' = A(t)x + b(t) \tag{2.3}$$

gdzie: $A(t)=(a_{ij}(t))_{n\times n}$, $b(t)=(b_1(t),\ldots,b_n(t))$, $x(t)=(x_1(t),\ldots,x_n(t))$, przy czym a_{ij} oraz b_i są zadanymi funkcjami określonymi w przedziale $[a,b]\subset R$, o wartościach rzeczywistych, natomiast x_i są szukanymi funkcjami rzeczywistymi.

Układ (2.3) nosi nazwę układu liniowego niejednorodnego, o ile $b\neq 0$ oraz jednorodnego, jeżeli $b=0$.

Twierdzenie 2.2. *Jeżeli a_{ij}, b_k są odwzorowaniami ciągłymi na $[a,b]$, dla $i,\ j,\ k=1,\ldots,n$, to dla dowolnych $(t_0,x_0)\in[a,b]\times R^n$, problem początkowy* (2.1a), (2.2a) *ma dokładnie jedno rozwiązanie określone na całym $[a,b]$.*

2.1.1. Układy liniowe jednorodne

Niech

$$x' = A(t)x \tag{2.4}$$

Twierdzenie 2.3.
1° *Jeżeli* $u_1, \ldots, u_k$ *są rozwiązaniami układu* (2.4)*, to dla dowolnych liczb rzeczywistych* $c_1, \ldots, c_k$*,* $u = \sum_{j=1}^{k} c_j u_j$ *jest rozwiązaniem układu* (2.4).

2° *Jeżeli współczynniki* a_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ *są funkcjami rzeczywistymi oraz* $u = \operatorname{re} u + i \operatorname{im} u$ *jest rozwiązaniem zespolonym układu* (2.4)*, to* $\operatorname{re} u$*, oraz* $\operatorname{im} u$ *są rozwiązaniami układu* (2.4).

3° *Zbiór* I *rozwiązań układu* (2.4) *jest* n*-wymiarową podprzestrzenią wektorową przestrzeni* $C([a,b], R^n)$*, funkcji ciągłych określonych na* $[a,b]$ *o wartościach w* R^n.

Definicja 2.4. *Niech*

$$u_1 = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ \vdots \\ u_{n1} \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ \vdots \\ u_{n2} \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad u_n = \begin{bmatrix} u_{1n} \\ u_{2n} \\ \vdots \\ u_{nn} \end{bmatrix}$$

będzie bazą przestrzeni rozwiązań I*, wtedy macierz*

$$W(t) = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

nazywamy macierzą Wrońskiego dla układu (2.4)*, zaś* $\det W(t)$ *nazywa się wrońskianem układu* (2.4).

Definicja 2.5. *Bazę przestrzeni rozwiązań* I *nazywamy układem podstawowym* (*względnie fundamentalnym*) *rozwiązań układu* (2.4).

Wniosek 2.1. $u_1, \ldots, u_n$ jest układem podstawowym całek równania (2.4) wtedy i tylko wtedy, gdy $\bigwedge_{t \in [a,b]} \det W(t) \neq 0$.

Twierdzenie 2.4. *Jeżeli* $u_1, \ldots, u_n$ *są rozwiązaniami układu* (2.4) *oraz* $\bigvee_{t_1 \in [a,b]} \det W(t_1) \neq 0$*, to* $\bigwedge_{t \in [a,b]} \det W(t) \neq 0$.

Wniosek 2.2. Jeżeli $u_1, \ldots, u_n$ jest układem podstawowym całek równania (2.4), to dla dowolnego rozwiązania u równania (2.4) istnieją stałe $C_1, \ldots, C_n$ takie, że

$$u = \sum_{i=1}^{n} C_i u_i.$$

DEFINICJA 2.6. *Jeżeli* $u_1, \ldots, u_n$ *jest układem podstawowym całek równania* (2.4), *to* n*-parametrową rodzinę funkcji*

$$u = \sum_{i=1}^{n} C_i u_i$$

nazywamy całką ogólną układu (2.4), *przy czym* C_i $(i = 1, \ldots, n)$ *przyjmują dowolne wartości rzeczywiste.*

Przykład 2.1. Sprawdzić, czy $\{u_1, u_2\}$, gdzie

$$u_1(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{bmatrix}, \quad u_2(t) = \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{bmatrix}$$

jest układem podstawowym całek układu

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{a}$$

Różniczkując u_1 oraz u_2 i wstawiając do (a) łatwo można sprawdzić, że są one rozwiązaniami układu (a).

Sprawdźmy, czy u_1, u_2 stanowią układ podstawowy całek

$$\det W(t) = \det \begin{bmatrix} e^{3t} & -e^{-t} \\ 2e^{3t} & 2e^{-t} \end{bmatrix} = 4e^{2t} \neq 0 \quad \text{dla} \quad t \in R.$$

Zatem całka ogólna układu (a) przyjmie postać

$$u(t) = C_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2.1.2. Układy liniowe niejednorodne

Rozważmy niejednorodny układ równań (2.3)

TWIERDZENIE 2.5.

Z. *Jeżeli* $\overline{x}(t)$ *jest pewnym rozwiązaniem układu niejednorodnego* (2.3), *natomiast* $u(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i u_i(t)$ *całką ogólną układu jednorodnego* (2.4),

T. *to*

$$x(t) = \overline{x}(t) + u(t) \tag{2.5}$$

jest całką ogólną układu niejednorodnego (2.3).

Metoda uzmienniania stałych

Mając rozwiązanie ogólne układu liniowego jednorodnego (2.4), wystarczy znaleźć jedno rozwiązanie układu liniowego niejednorodnego (2.3), aby uzyskać całkę ogólną tego układu.

Niech

$$u(t) = W(t)C$$

będzie całką ogólną układu jednorodnego (2.4), gdzie

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}.$$

Przewidujemy, że funkcja $\overline{x}$ postaci

$$\overline{x}(t) = W(t)C(t) \tag{2.6}$$

jest rozwiązaniem układu niejednorodnego (2.3).

Różniczkując (2.6) i wstawiając do (2.3), mamy

$$W(t)C'(t) = b(t),$$

stąd

$$C_j(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\det W_j(\tau)}{\det W(\tau)}\,\mathrm{d}\tau, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{2.7}$$

gdzie $W_j(t)$ oznacza macierz powstałą w $W(t)$ przez zastąpienie j-tej kolumny, kolumną wyrazów wolnych $b(t)$.

Twierdzenie 2.6.
Z. *Jeżeli* $u(t) = W(t)C$ *jest całką ogólną układu jednorodnego* (2.4),
T. *to* $\overline{x}(t) = W(t)C(t)$ *jest rozwiązaniem szczególnym układu niejednorodnego* (2.3), *przy czym wektor* $C(t)$ *jest określony równościami* (2.7).

Przykład 2.2. Znaleźć całkę ogólną układu niejednorodnego

$$x' = Ax + b, \quad \text{gdzie } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad b(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2+1 \\ -2t-5 \end{bmatrix} \tag{a}$$

wiedząc, że rozwiązanie ogólne układu jednorodnego

$$x' = Ax \tag{b}$$

jest następujące

$$u(t) = C_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} t \\ 2t+1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

lub

$$u(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & t & 1 \\ -e^{-t} & 2t+1 & 2 \\ -2e^{-t} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}.$$

Całka szczególna układu (a) jest postaci

$$\overline{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & t & 1 \\ -e^{-t} & 2t+1 & 2 \\ -2e^{-t} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \\ C_3(t) \end{bmatrix}.$$

Funkcje $C_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ wyznaczamy z układu $W(t)C'(t) = b(t)$, czyli

$$\begin{bmatrix} e^{-t} & t & 1 \\ -e^{-t} & 2t+1 & 2 \\ -2e^{-t} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \\ C_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t^2+1 \\ -2t-5 \end{bmatrix},$$

skąd:

$$\begin{aligned} C_1'(t) &= -e^t(t^2+6), \\ C_2'(t) &= -2t^2 - 2t - 17, \\ C_3'(t) &= 2t^3 + 3t^2 + 18t + 6, \end{aligned}$$

i po scałkowaniu:

$$\begin{aligned} C_1(t) &= C_1 - e^t(t^2 - 2t + 8), \\ C_2(t) &= C_2 - \frac{2}{3}t^3 - t^2 - 17t, \\ C_3(t) &= C_3 + \frac{1}{2}t^4 + t^3 + 9t^2 + 6t, \end{aligned}$$

zatem całka ogólna układu (a) jest następująca

$$x(t) = \left(C_1 e^{-t} - t^2 + 2t - 8\right) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + \left(C_2 - \frac{2}{3}t^3 - t^2 - 17t\right) \begin{bmatrix} t \\ 2t+1 \\ 1 \end{bmatrix} +$$
$$+ \left(C_3 + \frac{1}{2}t^4 + t^3 + 9t^2 + 6t\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

lub

$$x(t) = C_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} t \\ 2t+1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} -\frac{1}{6}t^4 - 9t^2 + 8t - 8 \\ -\frac{1}{3}t^4 - \frac{2}{3}t^3 - 16t^2 - 7t + 8 \\ -\frac{2}{3}t^3 + t^2 - 21t + 16 \end{bmatrix}.$$

2.1.3. Metody rozwiązywania układów liniowych jednorodnych o stałych współczynnikach

Rozpatrzmy układ równań postaci

$$x' = Ax \tag{2.8}$$

gdzie współczynniki a_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ są liczbami rzeczywistymi.

Metoda Eulera

Szukamy rozwiązania układu (2.8) w postaci

$$x = e^{\lambda t} v \tag{2.9}$$

gdzie: $\lambda \in R$, $v \in R^n$.

Wstawiając związek (2.9) do układu (2.8) otrzymujemy

$$\lambda v = Av$$

lub

$$(A - \lambda E)v = 0 \tag{2.10}$$

gdzie E oznacza macierz jednostkową.

Aby istniały rozwiązania niezerowe układu (2.10) względem v, to

$$\det(A - \lambda E) = 0 \tag{2.11}$$

Związek (2.11) nazywa się równaniem charakterystycznym, jego pierwiastki λ_i — wartościami własnymi macierzy A, zaś odpowiadające im rozwiązania v_i układu (2.10) — wektorami własnymi macierzy A.

Jeżeli istnieje n różnych rzeczywistych wartości własnych $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, to

$$e^{\lambda_1 t} v_1, e^{\lambda_2 t} v_2, \ldots, e^{\lambda_n t} v_n$$

stanowią układ podstawowy całek równania (2.8), przy czym v_i — wektor własny odpowiadający wartości własnej λ_i $(i = 1, \ldots, n)$, zatem

$$x = \sum_{j=1}^{n} C_j e^{\lambda_j t} v_j$$

jest całką ogólną układu (2.8).

Niech λ_0 będzie rzeczywistą wartością własną o krotności k, wówczas:

1. Jeżeli odpowiadająca jej podprzestrzeń wektorów własnych ma wymiar k, oraz $b_1, \ldots, b_k$ jest dowolną bazą tej podprzestrzeni, to

$$e^{\lambda_0 t} b_1, e^{\lambda_0 t} b_2, \ldots, e^{\lambda_0 t} b_k$$

są rozwiązaniami niezależnymi układu (2.8), oraz $x^0 = e^{\lambda_0 t} \sum\limits_{i=1}^{k} C_i b_i$ jest rozwiązaniem układu (2.8) odpowiadającym wartości własnej λ_0.

2. Jeżeli wymiar podprzestrzeni wektorów własnych jest równy m $(m < k)$, to rozwiązania odpowiadającego wartości własnej λ_0, można szukać w postaci

$$x^0 = \left(a_0 + a_1 t + \ldots + a_{k-m} t^{k-m}\right) e^{\lambda_0 t} \tag{2.12}$$

gdzie: $a_0, a_1, \ldots, a_{k-m}$ są wektorami, które wyznaczamy wstawiając (2.12) do układu (2.8).

Jeżeli $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ są pierwiastkami charakterystycznymi macierzy A o krotnościach odpowiednio $n_1, \ldots, n_r$, to całka ogólna układu (2.8) jest następująca

$$x = \sum_{i=1}^{r} x^i,$$

gdzie x^i są rozwiązaniami odpowiadającymi wartościom własnym λ_i.

Jeżeli wśród wartości własnych znajdują się pierwiastki zespolone, to znajdujemy odpowiadające im rozwiązania zespolone, których część rzeczywista i urojona stanowią liniowo niezależne rozwiązania rzeczywiste układu (2.8).

Przykład 2.3. Znaleźć całkę ogólną układu:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_2' &= x_2 + x_3 \\ x_3' &= 2x_3 \end{aligned} \tag{a}$$

Szukamy wartości własnych macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0.$$

Istnieją dwie wartości własne: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ o krotnościach $n_1 = 2$, $n_2 = 1$.

Obecnie przechodzimy do szukania podprzestrzeni wektorów własnych, czyli do rozwiązania układu $(A - \lambda_i E)v = 0$ dla $i = 1, 2$.

Dla $i = 1$, czyli dla $\lambda_1 = 1$, mamy

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązaniem tego układu jest podprzestrzeń jednowymiarowa

$$W^1 = \left\{ v\colon v = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in R \right\}.$$

Ponieważ $\dim W^1 = 1 < n_1 = 2$, zatem rozwiązanie x^1 odpowiadające wartości własnej $\lambda_1 = 1$, będzie postaci

$$x^1 = (a_0 + a_1 t)e^t,$$

gdzie:

$$a_0 = \begin{bmatrix} a_{01} \\ a_{02} \\ a_{03} \end{bmatrix}, \qquad a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{bmatrix}.$$

Wstawiając x^1 do (a), uzyskujemy:

$$\begin{aligned}
&(a_{01} + a_{11} + a_{11}t)e^t = [a_{01} + a_{02} + 2a_{03} + (a_{11} + a_{12} + 2a_{13})t]\, e^t, \\
&(a_{02} + a_{12} + a_{12}t)e^t = [a_{02} + a_{03} + (a_{12} + a_{13})t]\, e^t, \\
&(a_{03} + a_{13} + a_{13}t)e^t = [2a_{03} + 2a_{13}t]\, e^t.
\end{aligned}$$

Dzieląc stronami przez e^t i porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
&a_{01} + a_{11} = a_{01} + a_{02} + 2a_{03}, \\
&a_{02} + a_{12} = a_{02} + a_{03}, \\
&a_{03} + a_{13} = 2a_{03}, \\
&a_{11} = a_{11} + a_{12} + 2a_{13}, \\
&a_{12} = a_{12} + a_{13}, \\
&a_{13} = 2a_{13},
\end{aligned}$$

skąd

$$a_0 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_1 = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in R,$$

zatem

$$x^1 = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t \right) \right\} e^t.$$

Dla $\lambda_2 = 2$, mamy

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wobec tego podprzestrzeń

$$W^2 = \left\{ v \colon v = \gamma \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \gamma \in R \right\}.$$

Rozwiązanie odpowiadające wartości własnej $\lambda_2 = 2$, ma postać

$$x^2 = \gamma \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t},$$

zatem całkę ogólną równania (a) można zapisać następująco

$$x(t) = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t \right) \right\} e^t + \gamma \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}.$$

Sprawdzić samodzielnie, że funkcje:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^t, \qquad u_2 = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t \right) e^t, \qquad u_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

stanowią układ podstawowy całek układu równań (a).

Przykład 2.4. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} x_1' &= 3x_1 - 2x_2 \\ x_2' &= x_1 + x_2 \end{aligned} \tag{b}$$

Szukamy wartości własnych macierzy $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5,$$

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2 + i,\ \lambda_2 = 2 - i.$$

Dla jednej z wartości własnych szukamy podprzestrzeni wektorów własnych, tak więc dla $\lambda_1 = 2 + i$ mamy

$$\begin{bmatrix} 1-i & -2 \\ 1 & -1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

skąd

$$W = \left\{ v \in C^2 : v = \alpha \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in C \right\}$$

lub

$$W = \left\{ v \in C^2 : v = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + i\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in C \right\}.$$

Jednym z rozwiązań układu (b) odpowiadającym wartości własnej $\lambda_1 = 2 + i$ jest

$$\hat{x}(t) = e^{(2+i)t} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

Zauważmy, że:

$$\operatorname{re} \hat{x}(t) = e^{2t} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin t \right),$$

$$\operatorname{im} \hat{x}(t) = e^{2t} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sin t \right),$$

zatem rozwiązanie ogólne układu (b), będące kombinacją liniową $\operatorname{re} \hat{x}$ oraz $\operatorname{im} \hat{x}$, ma postać

$$x(t) = e^{2t} \left(C_1 \begin{bmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \cos t + \sin t \\ \sin t \end{bmatrix} \right).$$

Wskaż układ podstawowy całek układu równań (b) i uzasadnij.

Metoda podprzestrzeni niezmienniczych

Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n o wyrazach zespolonych. Załóżmy, że liczby $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ są wartościami własnymi macierzy A o krotnościach odpowiednio $n_1, \ldots, n_k$, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

Lemat 2.1. *Dla każdej macierzy A (kwadratowej stopnia n), istnieje k podprzestrzeni wektorowych V^i przestrzeni C^n, $i = 1, \ldots, k$ (k — liczba różnych wartości własnych) takich, że:*

1° $V^i = \{v \in C^n : (A - \lambda_i E)^{n_i} v = 0\}$,

2° $AV^i \subset V^i$ — *własność niezmienniczości,*

3° $V^i \cap V^j = \{0\}$ *dla* $i \neq j$,

4° $\dim V^i = n_i$,

5° *dowolny wektor* $v \in C^n$ *można rozłożyć w sposób jednoznaczny na sumę wektorów z podprzestrzeni* V^i, *tzn.*

$$v = \sum_{i=1}^{k} v_i, \qquad v_i \in V^i, \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Przyjmujemy, że

$$A^m := \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{m \text{ razy}}, \qquad A^0 = E$$

oraz

$$e^A := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}.$$

Rozwiązanie układu jednorodnego o stałych współczynnikach

Dane jest równanie

$$x' = Ax \tag{2.13}$$

gdzie A jest macierzą kwadratową stopnia n o wyrazach rzeczywistych.

Szukamy rozwiązania układu (2.13) spełniającego warunek początkowy

$$x(t_0) = \mathring{x} \tag{2.14}$$

gdzie: $t_0 \in]a, b[$, $\mathring{x} \in R^n$.

Zgodnie z ogólną teorią równań różniczkowych liniowych, rozwiązanie problemu początkowego (2.13), (2.14) jest następujące

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}\mathring{x} \tag{2.15}$$

Po rozkładzie $\mathring{x}$ na wektory składowe z podprzestrzeni niezmienniczych macierzy A

$$\mathring{x} = \sum_{i=1}^{k} \mathring{x}_i, \qquad \mathring{x}_i \in V^i, \quad i = 1, \ldots, k \tag{2.16}$$

i na mocy definicji funkcji wykładniczej argumentu macierzowego, oraz lematu 2.1, wzór (2.15) przyjmie postać

$$x(t) = \sum_{i=0}^{k} e^{(t-t_0)\lambda_i} \left(\sum_{j=0}^{n_i-1} \frac{(t-t_0)^j}{j!} (A - \lambda_i E)^j \mathring{x}_i \right) \tag{2.17}$$

Uwaga 2.2. Rozwiązanie (2.17) jest rzeczywiste mimo, że wśród wartości własnych mogą wystąpić liczby zespolone.

Przykład 2.5. Rozwiązać problem początkowy Cauchy'ego:

$$x' = AX, \qquad \text{jeżeli } A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \tag{a}$$

$$x(0) = \mathring{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{b}$$

Szukamy wartości własnych macierzy A.

$$\det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 2 & 2 \\ -3 & -1-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 9\lambda - 10 = 0,$$

stąd:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -2 && \text{— krotność } n_1 = 1, \\ \lambda_2 &= -1+2i && \text{— krotność } n_2 = 1, \\ \lambda_3 &= -1-2i && \text{— krotność } n_3 = 1. \end{aligned}$$

Znajdujemy podprzestrzenie niezmiennicze.
Dla $\lambda_1 = -2$, mamy

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

skąd

$$V^1 = \left\{ v\colon v = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in C \right\}.$$

Dla $\lambda_2 = -1+2i$, mamy

$$\begin{bmatrix} -2-2i & 2 & 2 \\ -3 & -2i & 1 \\ -1 & 2 & 1-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

skąd

$$V^2 = \left\{ v \colon v = \beta \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ -i \end{bmatrix}, \quad \beta \in C \right\}.$$

Dla $\lambda_3 = -1 - 2i$, mamy

$$\begin{bmatrix} -2+2i & 2 & 2 \\ -3 & 2i & 1 \\ -1 & 2 & 1+2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

skąd

$$V^3 = \left\{ v \colon v = \gamma \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ i \end{bmatrix}, \quad \gamma \in C \right\}.$$

Teraz należy rozłożyć wektor początkowy $\mathring{x}$ na składowe z podprzestrzeni niezmienniczych, tj.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ -i \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ i \end{bmatrix},$$

otrzymujemy

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 1, \qquad \gamma = 1,$$

a zatem

$$\mathring{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathring{x}_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ -i \end{bmatrix}, \qquad \mathring{x}_3 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ i \end{bmatrix}.$$

Wstawiając do wzoru (2.17), mamy

$$x(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{(-1+2i)t} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ -i \end{bmatrix} + e^{(-1-2i)t} \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ i \end{bmatrix},$$

skąd po przekształceniach

$$x(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2e^{-t} \begin{bmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix}.$$

Przykład 2.6. Rozwiązać problem początkowy Cauchy'ego:

$$x' = Ax, \quad \text{jeżeli } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{a}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wartościami własnymi macierzy A (patrz przykład 2.3) są liczby:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \quad \text{— krotność } n_1 = 2, \\ \lambda_2 &= 2 \quad \text{— krotność } n_2 = 1. \end{aligned}$$

Szukamy podprzestrzeni niezmienniczych.

Dla $\lambda_1 = 1$, mamy

$$(A - \lambda_1 E)^{n_1} v = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

stąd

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

zatem

$$V^1 = \left\{ v \colon v = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \in C \right\}.$$

Dla $\lambda_2 = 2$

$$(A - \lambda_2 E)^{n_2} v = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

skąd

$$V^2 = \left\{ v \colon v = \gamma \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \gamma \in C \right\}.$$

Rozkładamy wektor początkowy na składowe z podprzestrzeni niezmienniczych

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\gamma \\ \gamma \\ \gamma \end{bmatrix}.$$

Mamy stąd $\alpha = -2$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, tzn.

$$\mathring{x}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathring{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zgodnie ze wzorem (2.17) rozwiązanie problemu początkowego (a), (b) ma postać

$$x(t) = e^t \left[\mathring{x}_1 + t(A - \lambda_1 E)\mathring{x}_1\right] + e^{2t}\mathring{x}_2.$$

Wstawiając poprzednio obliczone wartości mamy ostatecznie

$$x(t) = e^t \left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + e^{2t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Całka ogólna układu (2.13)

Niech $\{b_1^i, b_2^i, \ldots, b_{n_i}^i\}$ będzie bazą podprzestrzeni niezmienniczej V^i, gdzie $i = 1, \ldots, k$. Jeżeli $\mathring{x} \in R^n$ jest dowolnym wektorem, to

$$\mathring{x}_i = \sum_{m=1}^{n_i} C_{im} b_m^i, \quad i = 1, \ldots, k,$$

gdzie C_{im} są pewnymi stałymi rzeczywistymi.

Wstawiając powyższy związek do wzoru (2.17) uzyskujemy wzór na całkę ogólną układu (2.13)

$$x(t) = \sum_{i=1}^{k} e^{(t-t_0)\lambda_i} \sum_{m=1}^{n_i} C_{im} \sum_{j=0}^{n_i-1} \frac{(t-t_0)^j}{j!} (A - \lambda_i E)^j b_m^i \tag{2.18}$$

Związek (2.18) określa rozwiązania rzeczywiste, tylko w przypadku rzeczywistych wartości własnych. Z reguły przyjmuje się $t_0 = 0$.

Przykład 2.7. Znaleźć całkę ogólną układu równań z przykładu 2.6

$$x' = Ax, \quad \text{gdzie } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{a}$$

Na podstawie przykładu 2.6:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \ \text{— krotność } n_1 = 2, \\ \lambda_2 &= 2 \ \text{— krotność } n_2 = 1. \end{aligned}$$

Szukamy podprzestrzeni niezmienniczej odpowiadającej wartości własnej $\lambda_1 = 1$

$$V^1 = \left\{ v\colon \left[A - \lambda_1 E\right]^2 v = 0 \right\},$$

inaczej

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

lub

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

stąd

$$v_1 = \alpha, \qquad v_2 = \beta, \qquad v_3 = 0,$$

czyli

$$V^1 = \left\{ v \colon v = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \in R \right\}.$$

Z przykładu 2.6 mamy

$$V^2 = \left\{ v \colon v = \gamma \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \gamma \in R \right\}.$$

Wektory $b_1^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $b_2^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ stanowią bazę podprzestrzeni V^1, natomiast wektor $b_1^2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ jest bazą podprzestrzeni V^2.

Zgodnie ze wzorem (2.18) ($k = 2$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$)

$$x(t) = e^t \left\{ C_{11} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \right.$$

$$\left. + C_{21} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right\} + e^{2t} C_{12} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i ostatecznie

$$x(t) = e^t \left(C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + C_3 e^{2t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

gdzie: $C_1 = C_{11}$, $C_2 = C_{21}$, $C_3 = C_{12}$.

Metoda macierzowa

Zgodnie z poprzednimi uwagami, rozwiązanie problemu początkowego (2.13), (2.14) jest postaci

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}\mathring{x} \tag{2.19}$$

natomiast całkę ogólną układu (2.13) można przedstawić następująco

$$x(t) = e^{tA}C \tag{2.20}$$

gdzie C jest dowolnym wektorem należącym do R^n ($C = (C_1, \ldots, C_n)$).

Obecnie zajmiemy się prostszym przedstawieniem wyrażenia e^{tA}. Niech J_{p_i} jest macierzą kwadratową stopnia p_i postaci

$$J_{p_i} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda_i & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix},$$

gdzie λ_i jest liczbą rzeczywistą lub zespoloną.

Niech $i = 1, \ldots, s$, przy czym $\sum\limits_{i=1}^{s} p_i = n$

$$J = \begin{bmatrix} J_{p_1} & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & J_{p_2} & 0 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots\ldots & 0 & J_{p_s} \end{bmatrix}.$$

Macierz J jest macierzą kwadratową stopnia n i nosi nazwę macierzy Jordana, natomiast macierze $J_{p_1}, J_{p_2}, \ldots, J_{p_s}$ wchodzące w skład tej macierzy nazywa się klatkami Jordana.

Z teorii funkcji argumentu macierzowego wiadomo, że

$$e^{tJ_{p_i}} = e^{\lambda_i t} \begin{vmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \ldots & \frac{t^{p_i-1}}{(p_i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ldots & \frac{t^{p_i-2}}{(p_i-2)!} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

natomiast

$$e^{tJ} = \begin{vmatrix} e^{tJ_{p_1}} & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & e^{tJ_{p_2}} & 0 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots\ldots & 0 & e^{tJ_{p_s}} \end{vmatrix}.$$

Twierdzenie 2.7. *Dla dowolnej macierzy A stopnia n o wyrazach rzeczywistych, istnieje taka macierz P, że:*
1° $A = PJP^{-1}$,
2° $e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1}$, *gdzie J jest macierzą Jordana.*

Konstrukcja macierzy P i J

Definicja 2.7. *Wektorem głównym rzędu k macierzy A odpowiadającym wartości własnej λ_i nazywamy taki wektor v, który spełnia równanie*

$$[A - \lambda_i E]^k v = 0.$$

Zauważmy, że jeżeli w jest wektorem głównym rzędu k, to wektor v, spełniający równanie

$$[A - \lambda_i E]v = w$$

jest wektorem głównym rzędu $k + 1$.

Definicja 2.8. *Niech v_0 będzie wektorem własnym macierzy A odpowiadającym wartości własnej λ. Wówczas wektory $v_1, \ldots, v_r$, gdzie*

$$v_i = [A - \lambda E]v_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, r,$$

nazywamy odpowiadającymi mu wektorami głównymi odpowiednio rzędu $2, \ldots, (r+1)$.

Twierdzenie 2.8. *Jeżeli λ_0 jest wartością własną macierzy A o krotności m, to wymiar podprzestrzeni W wektorów własnych jest mniejszy bądź równy m*

$$\dim W \leqslant m.$$

Twierdzenie 2.9.
Z. *Niech λ_0 — wartość własna macierzy A o krotności n, $\{b_1, \ldots, b_k\}$ — baza podprzestrzeni W wektorów własnych, przy czym $k < n$.*
T. **1°** $\{b_1^{(0)}, b_1^{(1)}, \ldots, b_1^{(l_1)}, \ldots, b_k^{(0)}, b_k^{(1)}, \ldots, b_k^{(l_k)}\}$ *— baza C^n, gdzie $b_i^{(0)} = b_i$ oraz $b_j^{(i)}$ — wektor główny rzędu $(j-1)$ odpowiadający wektorowi własnemu b_i, $i = 1, \ldots, k$.*
2° *Macierz o kolumnach $\{b_1^{(0)}, b_1^{(1)}, \ldots, b_1^{(l_1)}, \ldots, b_k^{(0)}, b_k^{(1)}, \ldots, b_k^{(l_k)}\}$ jest macierzą przejścia P z bazy kanonicznej do bazy 1° oraz, odpowiednio, macierz Jordana ma postać*

$$J = \begin{bmatrix} J_{l_1} & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & J_{l_2} & 0 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots\ldots & 0 & J_{l_k} \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 2.10.

Z. *Niech $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ będą wartościami własnymi macierzy A o krotnościach odpowiednio $n_1, \ldots, n_s$, przy czym*

$$\sum_{i=1}^{s} n_i = n,$$

niech ponadto $\{b_{i1}, \ldots, b_{ik_i}\}$ oznacza bazę podprzestrzeni W^i wektorów własnych odpowiadających wartości własnej λ_i, $i = 1, \ldots, s$.

T. *Wówczas układ wektorów*

$$\Big\{ b_{11}^{(0)}, \ldots, b_{11}^{(l_{11})},\ b_{12}^{(0)}, \ldots, b_{12}^{(l_{12})},\ \ldots,\ b_{1k_1}^{(0)}, \ldots, b_{1k_1}^{(l_{1k_1})},\ \ldots,$$
$$\ldots,\ b_{s1}^{(0)}, \ldots, b_{s1}^{(l_{s1})},\ \ldots,\ b_{sk_s}^{(0)}, \ldots, b_{sk_s}^{(l_{sk_s})} \Big\}$$

stanowi bazę przestrzeni C^n.

Macierz, której kolumnami są te wektory, jest macierzą przejścia P, natomiast macierz Jordana ma postać

$$J = \begin{bmatrix} J_{l_{11}} & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & J_{l_{1k_1}} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & J_{l_{s1}} & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & & 0 & J_{l_{sk_s}} \end{bmatrix},$$

gdzie: $J_{l_{i1}}, \ldots, J_{l_{ik_i}}$ są klatkami Jordana odpowiadającymi wartości własnej λ_i.

Przykład 2.8. Dana jest macierz

$$\begin{bmatrix} 4 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Szukamy macierzy P i J. W tym celu znajdźmy wartości własne macierzy A

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{bmatrix} (4-\lambda) & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & (2-\lambda) & 2 & 0 \\ 0 & 0 & (3-\lambda) & 0 \\ -4 & 2 & -3 & (3-\lambda) \end{bmatrix} = (3-\lambda)^4,$$

$\lambda = 3$ jest czterokrotną wartością własną.

Wektory własne wyznaczamy z równania $(A - 3E)v = 0$, czyli

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

stąd $W = \{v \colon v = \alpha b_1 + \beta b_2\}$, gdzie: $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta \in C$.

Dla bazy podprzestrzeni W szukamy wektorów głównych. W tym celu rozwiązujemy równania:

$$(A - 3E)b_1^{(1)} = b_1, \qquad (A - 3E)b_2^{(1)} = b_2,$$

stąd

$$b_1^{(1)} = \begin{bmatrix} \alpha_1 - 3 \\ 2\alpha_1 \\ 4 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \qquad \text{oraz} \quad b_2^{(1)} = \begin{bmatrix} \beta_1 - 1 \\ 2\beta_1 \\ 1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}.$$

Przyjmując np. $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$ uzyskujemy bazę przestrzeni:

$$b_1^{(0)} = b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_1^{(1)} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2^{(0)} = b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

wobec tego:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{3}{2} & 3 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Natomiast macierz Jordana będzie zawierać dwie klatki o wymiarze 2

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tak więc

$$A = PJP^{-1},$$

zaś

$$e^{tA} = P \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} P^{-1},$$

po wymnożeniu

$$e^{tA} = e^{3t} \begin{bmatrix} 1+t & -\frac{t}{2} & t & 0 \\ 2t & 1-t & 2t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4t & 2t & -3t & 1 \end{bmatrix}.$$

Przykład 2.9. Dla porównania, rozważmy ponownie układ równań (a) z przykładu 2.3

$$x' = Ax, \quad \text{gdzie } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{a}$$

Na podstawie wzoru (2.20) całka ogólna układu (a) ma postać $x = e^{tA}C$, gdzie $C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$ jest dowolnie zadanym wektorem, należącym do R^3.

Z przykładu 2.3 wiadomo, że $\lambda_1 = 1$ o krotności $n_1 = 2$ oraz $\lambda_2 = 2$ o krotności $n_2 = 1$, są wartościami własnymi macierzy A.

Natomiast odpowiadającymi im podprzestrzeniami wektorów własnych są odpowiednio:

$$W^1 = \left\{ v\colon v = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in R \right\},$$

$$W^2 = \left\{ v\colon v = \beta \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \beta \in R \right\}.$$

Ponieważ $\alpha_1 = 1$ jest pierwiastkiem podwójnym, a $\dim W^1 = 1$, więc dla wektora bazowego $b_1^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, znajdziemy wektor główny b_1^1, z równania $(A - E)b_1^1 = b_1^0$, tj.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

gdzie: a, b, c oznaczają współrzędne szukanego wektora b_1^1.

Łatwo sprawdzić, że $a = \gamma$ (γ — dowolne), $b = 1$, $c = 0$, jest rozwiązaniem układu.

Przyjmując $\gamma = 0$ otrzymujemy bazę

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{przestrzeni } R^3$$

oraz macierz przejścia z bazy kanonicznej do bazy B

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{stąd} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ dla $\lambda_1 = 1$ wektorowi własnemu b_1^0 odpowiada jeden wektor główny, zaś $\lambda_2 = 2$ jest pierwiastkiem pojedynczym, zatem macierz Jordana będzie zawierać dwie klatki, pierwszą o wymiarze 2 i drugą o wymiarze 1, czyli

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

oraz

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix},$$

natomiast

$$e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

lub po wymnożeniu

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & (-3e^t - te^t + 3e^{2t}) \\ 0 & e^t & (-e^t + e^{2t}) \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix},$$

tak więc na podstawie (2.20) całka ogólna układu (a) ma postać

$$x(t) = C_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^t \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) +$$

$$+ C_3 \left\{ e^t \left(\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + e^{2t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

lub

$$x(t) = \overline{C}_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \overline{C}_2 e^t \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + C_3 e^{2t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

gdzie: $\overline{C}_1 = C_1 - 3C_3$, $\overline{C}_2 = C_2 - C_3$.

Przykład 2.10. Wyznaczyć całkę ogólną układu

$$x' = Ax, \quad \text{gdzie } A = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \tag{a}$$

Wyznaczamy wartości własne

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{bmatrix} -7-\lambda & 1 \\ -2 & -5-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0,$$

zatem:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -6 + i \quad \text{— krotność } n_1 = 1, \\ \lambda_2 &= -6 - i \quad \text{— krotność } n_2 = 1 \end{aligned}$$

oraz, odpowiednio:

$$W^1 = \left\{ v \colon v = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix}, \quad \alpha \in C \right\},$$
$$W^2 = \left\{ v \colon v = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \end{bmatrix}, \quad \beta \in C \right\},$$

czyli

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix},$$

natomiast

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+i & -i \\ 1-i & i \end{bmatrix},$$

zaś:

$$J = \begin{bmatrix} -6+i & 0 \\ 0 & -6-i \end{bmatrix},$$

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{(-6+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(-6-i)t} \end{bmatrix} = e^{-6t} \begin{bmatrix} \cos t + i \sin t & 0 \\ 0 & \cos t - i \sin t \end{bmatrix},$$

zatem

$$e^{tA} = \frac{e^{-6t}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t + i \sin t & 0 \\ 0 & \cos t - i \sin t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i & -i \\ 1-i & i \end{bmatrix},$$

po wymnożeniu

$$e^{tA} = e^{-6t} \begin{bmatrix} \cos t - \sin t & \sin t \\ -2\sin t & \sin t + \cos t \end{bmatrix}.$$

Całka ogólna równania (a) jest następująca

$$x(t) = e^{tA} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = e^{-6t} \begin{bmatrix} \cos t - \sin t & \sin t \\ -2\sin t & \sin t + \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

lub:

$$x_1(t) = e^{-6t}[C_1(\cos t - \sin t) + C_2 \sin t],$$
$$x_2(t) = e^{-6t}[-2C_1 \sin t + C_2(\sin t + \cos t)].$$

Uwaga 2.3. W metodzie macierzowej uzyskujemy zawsze rozwiązanie rzeczywiste (ponieważ dla macierzy rzeczywistej A macierz $e^{A(t-t_0)}$ jest też rzeczywista).

Uwaga 2.4. Ponieważ kolumny macierzy e^{At} stanowią układ fundamentalny rozwiązań, więc $e^{At} = W(t)$.

Uwaga 2.5. Ponieważ $\left[e^{At}\right]^{-1} = e^{A(-t)}$, więc rodzina funkcji

$$x(t) = e^{At} \left[C + \int_{t_0}^{t} e^{A(-\tau)} b(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right]$$

jest rozwiązaniem ogólnym układu liniowego niejednorodnego (2.3) (przy czym $C = (C_1, \ldots, C_n)$ oraz t_0 — dowolnie ustalona liczba rzeczywista).

Zadania

Stosując znane metody znaleźć całkę ogólną układu jednorodnego $x' = Ax$, jeżeli:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 5 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Rozwiązać problem początkowy Cauchy'ego, $x' = Ax, \;\; x(t_0) = \mathring{x}$:

6. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 21 & -8 & -19 \\ 18 & -7 & -15 \\ 16 & -6 & -15 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -12 & 5 & 12 \\ 10 & -3 & -9 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 6 \\ 4 & -1 & -4 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Znaleźć całkę ogólną układu niejednorodnego:

10. $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - y = \cos t \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1 - x \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 5x + y = e^t \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 3y - x = e^{2t} \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x + y - 2z - t + 2 \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x + 1 \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = x + y - z - t + 1 \end{cases}$

Odpowiedzi

1. $x = \begin{bmatrix} 2 - e^{-t} & 0 & 2(1 - e^{-t}) \\ -4 + 2(e^t + e^{-t}) & e^t & -4(1 - e^{-t}) \\ -1 + e^{-t} & 0 & 2e^{-t} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$

2. $x = C_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

3. $x = C_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{bmatrix} t \\ 2t-1 \\ t-1 \end{bmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{bmatrix} t^2 \\ -2t+2t^2 \\ 2-2t+t^2 \end{bmatrix}$

4. $x = C_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{bmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{bmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix}$

5. $x = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_3 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ t+1 \\ -t \end{bmatrix}$

6. $x = C_1 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} \cos t + \sin t \\ \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$,

$$x = \begin{bmatrix} \cos t \\ \dfrac{\cos t + \sin t}{2} \\ \dfrac{\cos t - \sin t}{2} \end{bmatrix}$$

7. $x = C_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 7\cos t - 11\sin t \\ 15\cos t - 9\sin t \\ 2\cos t - 8\sin t \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} 11\cos t + 7\sin t \\ 9\cos t + 15\sin t \\ 8\cos t + 2\sin t \end{bmatrix}$,

$$x = \begin{bmatrix} e^{-t} - 4\cos t - 18\sin t \\ -2e^{-t} + 6\cos t - 24\sin t \\ 2e^{-t} - 6\cos t - 10\sin t \end{bmatrix}$$

8. $x = C_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + e^t \left(C_2 \begin{bmatrix} t+1 \\ 3 \\ t \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$,

$$x = \begin{bmatrix} e^{-t} + te^t \\ -2e^{-t} + 3e^t \\ 2e^{-t} + te^t - e^t \end{bmatrix}$$

9. $x = \begin{bmatrix} C_1 + C_2(t+1) + C_3 e^{-t} \\ 3C_2 - 2C_3 e^{-t} \\ C_1 + C_2 t + 2C_3 e^{-t} \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} t + e^{-t} \\ 3 - 2e^{-t} \\ -1 + t + 2e^{-t} \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \cos t + C_2 \sin t + \dfrac{t}{2}\cos t + 1 \\ -C_1 \sin t + C_2 \cos t - \dfrac{t}{2}\sin t - \dfrac{1}{2}\cos t \end{bmatrix}$

11. $\begin{cases} x = e^{-4t}(C_1 + C_2 t) + \dfrac{4}{25}e^t - \dfrac{1}{36}e^{2t} \\ y = -e^{-4t}(C_1 + C_2 + C_2 t) + \dfrac{1}{25}e^t + \dfrac{7}{36}e^{2t} \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 \sin t + C_3 \cos t \\ y = -C_1 e^t + C_2 \cos t - C_3 \sin t + t \\ z = C_2 \sin t + C_3 \cos t + 1 \end{cases}$

2.2. Układy nieliniowe równań różniczkowych rzędu pierwszego

Układ równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego można zadać w postaci ogólnej

$$F(t, x, x') = 0, \quad \text{gdzie} \quad F\colon R^{2n+1} \to R^n \tag{2.21}$$

normalnej

$$x' = f(t, x), \quad \text{gdzie} \quad f\colon R^{n+1} \to R^n \tag{2.22}$$

czyli

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ x_2' = f_2(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

lub symetrycznej

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{X_1(x_1, \ldots, x_{n+1})} = \frac{\mathrm{d}x_2}{X_2(x_1, \ldots, x_{n+1})} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x_{n+1}}{X_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1})} \tag{2.23}$$

Twierdzenie 2.11.
1° *Każdy układ normalny* (2.22) *można zapisać w postaci symetrycznej*

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{f_1(x,t)} = \frac{\mathrm{d}x_2}{f_2(x,t)} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x_n}{f_n(x,t)} = \frac{\mathrm{d}t}{1}.$$

2° *Niech* $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_{n+1}^0) \in R^{n+1}$. *Jeżeli funkcje* $X_1, \ldots, X_{n+1}$ *są ciągłe w pewnym otoczeniu punktu* x^0 *oraz przynajmniej jedna z nich jest różna od zera, wówczas układ* (2.23) *można zastąpić układem normalnym złożonym z* n *równań.*

Istotnie, jeżeli $X_i(x_0) \neq 0$, to układ (2.23) można w pewnym otoczeniu punktu x^0 zapisać w postaci

$$\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}x_i} = \frac{X_k}{X_i}, \quad k = 1, 2, \ldots, (i-1), (i+1), \ldots, n+1 \tag{2.23a}$$

Układ (2.23a) jest układem normalnym, w którym x_i jest zmienną niezależną.

Definicja 2.9. *Niech $\mathcal{F}$ oznacza zbiór wszystkich rozwiązań układu* (2.22) *w* $[a, b]$. *Funkcję*

$$\psi\colon R \times R^n \ni (t, x) \to \psi(t, x) \in R$$

nazywamy całką pierwszą układu (2.21), *jeżeli*

$$\bigwedge_{x \in \mathcal{F}} \bigvee_{C \in R} \bigwedge_{t \in [a,b]} \psi(t, x(t)) = C.$$

Znaczy to, że całka pierwsza układu (2.22) na wykresie każdego rozwiązania przyjmuje wartości stałe.

Twierdzenie 2.12.

1° *Układ* (2.22) *ma co najwyżej n liniowo niezależnych całek pierwszych.*

2° *Jeżeli $\psi_1, \ldots, \psi_n$ są liniowo niezależnymi całkami pierwszymi układu* (2.22), *to:*

$$\begin{aligned} \psi_1(t, x) &= C_1 \\ \psi_2(t, x) &= C_2 \\ \ldots&\ldots\ldots \\ \psi_n(t, x) &= C_n \end{aligned}$$

gdzie C_i — dowolne stałe $(i = 1, \ldots, n)$, jest całką ogólną tego układu zadaną w postaci uwikłanej.

2.2.1. Całkowanie układów w postaci symetrycznej

Dla układu (2.23) i dowolnych $M_1, \ldots, M_n$ $\left(\sum\limits_{i=1}^{n+1} M_i^2 > 0\right)$ jest prawdą, że

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{X_1(x)} = \frac{\mathrm{d}x_2}{X_2(x)} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x_{n+1}}{X_{n+1}(x)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n+1} M_i \,\mathrm{d}x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n+1} M_i X_i} \tag{2.24}$$

gdzie $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$.

Uwaga 2.6. Jeśli $\sum\limits_{i=1}^{n+1} M_i X_i = 0$, to jedno z równań (2.24) ma postać

$$\sum_{i=1}^{n+1} M_i \,\mathrm{d}x_i = 0.$$

Przykład 2.11. Znaleźć całki pierwsze i całkę ogólną układu

$$\frac{\mathrm{d}x}{z-y} = \frac{\mathrm{d}y}{x-z} = \frac{\mathrm{d}z}{y-x} \tag{a}$$

Na podstawie (2.24), dla $M_1 = M_2 = M_3 = 1$, mamy

$$\frac{\mathrm{d}x}{z-y} = \frac{\mathrm{d}y}{x-z} = \frac{\mathrm{d}z}{y-x} = \frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z}{0},$$

stąd

$$\mathrm{d}(x+y+z) = 0,$$

a więc

$$x + y + z = C_1$$

jest rozwiązaniem układu (a) w postaci uwikłanej. Natomiast funkcja $\psi_1(x,y,z) = x + y + z$ jest całką pierwszą układu (a).

Niech $M_1 = 2x$, $M_2 = 2y$, $M_3 = 2z$, wówczas układ (a) przyjmie postać

$$\frac{2x\,\mathrm{d}x}{2x(z-y)} = \frac{2y\,\mathrm{d}y}{2y(x-z)} = \frac{2z\,\mathrm{d}z}{2z(y-x)} = \frac{2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y + 2z\,\mathrm{d}z}{0},$$

stąd

$$\mathrm{d}(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

czyli

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2$$

jest innym rozwiązaniem układu (a) oraz funkcja

$$\psi_2(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

jest całką pierwszą układu (a).

Natomiast rozwiązanie ogólne układu (a) ma postać:

$$\begin{cases} x + y + z = C_1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = C_2 \end{cases}.$$

Przykład 2.12. Znaleźć całki pierwsze oraz rozwiązanie ogólne układu

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{z}{(z-y)^2} \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y}{(z-y)^2} \end{cases} \tag{a}$$

Zapiszmy układ (a) w postaci symetrycznej

$$\frac{\mathrm{d}y}{z} = \frac{\mathrm{d}z}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{(z-y)^2} \tag{a'}$$

stąd

$$\frac{\mathrm{d}y}{z} = \frac{\mathrm{d}z}{y},$$

po scałkowaniu

$$y^2 = z^2 + C_1$$

lub

$$y^2 - z^2 = C_1.$$

Funkcja $\psi_1(x,y,z) = y^2 - z^2$ jest całką pierwszą układu (a). W celu znalezienia innej całki pierwszej, odejmijmy w (a') od licznika i mianownika pierwszego ułamka, licznik i mianownik ułamka drugiego

$$\frac{\mathrm{d}(y-z)}{z-y} = \frac{\mathrm{d}x}{(z-y)^2},$$

stąd

$$(z-y)\,\mathrm{d}(y-z) = \mathrm{d}x,$$

po scałkowaniu

$$(y-z)^2 = -2x + C_2$$

lub

$$(y-z)^2 + 2x = C_2.$$

Funkcja $\psi_2(x,y,z) = 2x + (y-z)^2$ jest również całką pierwszą analizowanego układu.

Natomiast rozwiązanie ogólne ma postać

$$\begin{cases} y^2 - z^2 = C_1 \\ (y-z)^2 + 2x = C_2 \end{cases}.$$

Przykład 2.13. Rozważmy układ równań

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{y}{t} - xy^2 \end{cases} \tag{a}$$

Zapiszmy (a) w postaci symetrycznej

$$\frac{\mathrm{d}x}{x^2y} = \frac{\mathrm{d}y}{\frac{y}{t} - xy^2} = \frac{\mathrm{d}t}{1},$$

stąd

$$\frac{y\,\mathrm{d}x}{x^2y^2} = \frac{x\,\mathrm{d}y}{\frac{xy}{t} - x^2y^2} = \frac{\mathrm{d}t}{1} = \frac{y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{\frac{xy}{t}},$$

a więc

$$\frac{\mathrm{d}(xy)}{xy} = \frac{\mathrm{d}t}{t},$$

po scałkowaniu

$$xy = C_1 t$$

lub

$$\frac{xy}{t} = C_1.$$

Funkcja $\psi(t, x, y) = \frac{xy}{t}$ jest całką pierwszą układu (a).

Inną całkę znajdziemy z równania

$$\frac{\mathrm{d}x}{x^2y} = \frac{\mathrm{d}t}{1}.$$

Wstawiając w miejsce $xy = C_1 t$, mamy

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = C_1 t\,\mathrm{d}t,$$

po scałkowaniu

$$\ln|x| = \frac{1}{2}C_1 t^2 + C_2$$

ale

$$C_1 = \frac{xy}{t},$$

zatem

$$\ln|x| = \frac{1}{2}xyt + C_2$$

lub

$$\ln|x| - \frac{1}{2}xyt = C_2.$$

Funkcja $\psi(t, x, y) = \ln|x| - \frac{1}{2}xyt$ jest również całką pierwszą, natomiast

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{t} = C_1 \\ \ln|x| - \frac{1}{2}xyt = C_2 \end{cases}$$

jest całką ogólną układu (a).

Zadania

Znaleźć całki pierwsze i rozwiązanie ogólne układu:

1. $\dfrac{\mathrm{d}x}{2x-y} = \dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \dfrac{\mathrm{d}z}{z}$

2. $\dfrac{\mathrm{d}x}{xz} = \dfrac{\mathrm{d}y}{yz} = \dfrac{\mathrm{d}z}{xy}$

3. $\dfrac{\mathrm{d}x}{2xy} = \dfrac{\mathrm{d}y}{y^2-x^2-z^2} = \dfrac{\mathrm{d}z}{2yz}$

4. $\dfrac{\mathrm{d}x}{y+z} = \dfrac{\mathrm{d}y}{x+z} = \dfrac{\mathrm{d}z}{x+y}$

5. $\dfrac{\mathrm{d}x}{y-x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{x+y+z} = \dfrac{\mathrm{d}z}{x-y}$

6. $\dfrac{\mathrm{d}x}{x(y-z)} = \dfrac{\mathrm{d}y}{z^2+xy} = \dfrac{\mathrm{d}z}{z(x+z)}$

Odpowiedzi

1. $\psi_1(x,y,z) = \dfrac{y}{z}, \quad \psi_2(x,y,z) = x-2z+y,$

$$\begin{cases} y = C_1 z \\ x-2z+y = C_2 \end{cases}$$

2. $\psi_1(x,y,z) = \dfrac{x}{y}, \quad \psi_2(x,y,z) = xy-z^2,$

$$\begin{cases} x = C_1 y \\ xy-z^2 = C_2 \end{cases}$$

3. $\psi_1(x,y,z) = \dfrac{x}{z}, \quad \psi_2(x,y,z) = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{z},$

$$\begin{cases} x = C_1 z \\ x^2+y^2+z^2 = C_2 z \end{cases}$$

4. $\psi_1(x,y,z) = \dfrac{x-y}{y-z}, \quad \psi_2(x,y,z) = (x+y+z)(x-y)^2,$

$$\begin{cases} x-y = C_1(y-z) \\ (x+y+z)(x-y)^2 = C_2 \end{cases}$$

5. $\psi_1(x, y, z) = x + y, \quad \psi_2(x, y, z) = (x + y + z)(y - 3x - z),$

$$\begin{cases} x + y = C_1 \\ (x + y + z)(y - 3x - z) = C_2 \end{cases}$$

6. $\psi_1(x, y, z) = x - y + z, \quad \psi_2(x, y, z) = \ln|x| + \frac{y}{z},$

$$\begin{cases} x - y + z = C_1 \\ \ln|x| + \frac{y}{z} = C_2 \end{cases}$$

Równania wyższych rzędów

3.1. Równania liniowe rzędu n

Rozważmy problem początkowy (3.1), (3.2):

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) y^{(k)} = f(t) \tag{3.1}$$

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \tag{3.2}$$

gdzie: $t_0 \in]a, b[$, $y_k \in R$ $(k = 0, \ldots, n-1)$.

Jeżeli funkcje a_k $(k = 0, \ldots, n-1)$ oraz f są ciągłe w $]a, b[$, wówczas problem początkowy (3.1), (3.2) ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Uwaga 3.1. Jeżeli $f \neq 0$, wówczas równanie (3.1) nazywamy liniowym niejednorodnym, natomiast gdy $f = 0$ — liniowym jednorodnym.

Po wprowadzeniu nowych zmiennych:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= y'(t) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n(t) &= y^{(n-1)}(t) \end{aligned}$$

problem początkowy (3.1), (3.2) przyjmie postać (3.3), (3.4):

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' = -\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k(t) x_{k+1} + f(t) \end{cases} \tag{3.3}$$

$$x_1(t_0) = y_0, \quad x_2(t_0) = y_1, \ldots, x_n(t_0) = y_{n-1} \tag{3.4}$$

Zauważmy, że układ (3.3) jest układem liniowym n równań rzędu pierwszego.

3.1.1. Równania liniowe jednorodne

Równaniu jednorodnemu o stałych współczynnikach

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = 0, \quad a_k \in R \quad (k = 0, \ldots, n-1) \tag{3.1a}$$

odpowiada układ

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = -\sum\limits_{k=0}^{n-1} y^{(k)} \end{cases} \tag{3.3a}$$

Równanie charakterystyczne tego układu

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

ma postać

$$\lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k = 0 \tag{3.5}$$

Pierwiastki tego równania nazywa się również pierwiastkami charakterystycznymi równania (3.1a):

1. Jeżeli λ_i jest pierwiastkiem rzeczywistym równania (3.5) o krotności n_i, wówczas

$$y^i = e^{\lambda_i t} \sum_{k=1}^{n_i} C_k t^{k-1},$$

gdzie C_k są dowolnymi stałymi, jest rozwiązaniem równania (3.1a), odpowiadającym wartości własnej λ_i.

2. Niech $\lambda_k = \alpha + i\beta$ będzie pierwiastkiem charakterystycznym zespolonym o krotności n_k, wówczas $\overline{\lambda}_k = \alpha - i\beta$ jest również pierwiastkiem charakterystycznym o krotności n_k. Rozwiązanie równania (3.1a) odpowiadające pierwiastkom charakterystycznym λ_k i $\overline{\lambda}_k$ jest postaci

$$y^k = e^{\alpha t} \left[\left(\sum_{j=1}^{n_k} C_j t^{j-1} \right) \cos \beta t + \left(\sum_{j=1}^{n_k} D_j t^{j-1} \right) \sin \beta t \right],$$

gdzie: C_j, D_j są dowolnymi stałymi rzeczywistymi.

Jeżeli $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ są pierwiastkami charakterystycznymi, oraz $y^1, \dots, y^r$ odpowiadającymi im rozwiązaniami równania (3.1a), wówczas

$$y = \sum_{i=1}^{r} y^i$$

jest całką ogólną równania liniowego jednorodnego (3.1a).

UWAGA 3.2. Funkcja $y(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j u_j(t)$ jest całką ogólną równania (3.1) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{cases} x_1(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j u_j(t) \\ x_2(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j u_j'(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j u_j^{(n-1)}(t) \end{cases} \tag{3.6}$$

jest całką ogólną układu (3.3), a więc jeżeli

$$\det W(t) = \det \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_n \\ u_1' & \dots & u_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \neq 0 \quad \text{w} \quad [a,b].$$

DEFINICJA 3.1. *Mówimy, że rozwiązania* $u_1, \dots, u_n$ *równania* (3.1) *stanowią układ podstawowy* (*fundamentalny*) *całek tego równania w* $[a,b]$ *jeżeli*

$$\bigwedge_{t\in[a,b]} \det W(t) \neq 0,$$

gdzie

$$W(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) & \dots & u_n(t) \\ u_1'(t) & \dots & u_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-1)}(t) & \dots & u_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}.$$

Przykład 3.1. Znaleźć całkę ogólną równania

$$y^{(6)} + 2y^{(4)} + y^{(2)} = 0 \tag{a}$$

Równanie charakterystyczne ma postać

$$\lambda^6 + 2\lambda^4 + \lambda^2 = 0,$$

stąd:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0, & n_1 &= 2, \\ \lambda_2 &= i, & n_2 &= 2, \\ \overline{\lambda}_2 &= -i, & n_2 &= 2. \end{aligned}$$

Dla $\lambda = \lambda_1 = 0$ mamy

$$y^1 = C_1 + C_2 t.$$

Dla $\lambda = \lambda_2 = i$ (oraz $\lambda = \overline{\lambda}_2 = -i$)

$$y^2 = (C_3 + C_4 t)\cos t + (C_5 + C_6 t)\sin t,$$

zatem całka ogólna równania (a) jest następująca

$$y(t) = C_1 + C_2 t + (C_3 + C_4 t)\cos t + (C_5 + C_6 t)\sin t.$$

3.1.2. Równania liniowe niejednorodne

TWIERDZENIE 3.1. *Jeżeli* $y_0(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j u_j(t)$ *jest całką ogólną równania jednorodnego*

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) y^{(k)} = 0$$

oraz $\overline{y}(t)$ *jest pewną całką szczególną równania liniowego niejednorodnego* (3.1), *to*

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t)$$

jest całką ogólną równania liniowego niejednorodnego (3.1).

Zajmiemy się obecnie szukaniem całki szczególnej równania (3.1).

Metoda uzmienniania stałych

Niech

$$y_0 = \sum_{j=1}^{n} C_j u_j(t)$$

będzie całką ogólną równania liniowego jednorodnego

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) y^{(k)} = 0.$$

Zgodnie z metodą uzmienniania stałych (patrz podrozdz. 2.1.2) na podstawie wzorów (3.5) i (3.6) oraz twierdzenia 2.6, funkcja

$$\overline{y}(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j(t) u_j(t)$$

jest rozwiązaniem równania niejednorodnego (3.1) o ile funkcje $C_j(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$ spełniają układ równań

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ u_1' & u_2' & \ldots & u_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_1^{(n-2)} & u_2^{(n-2)} & \ldots & u_n^{(n-2)} \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \ldots & u_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \\ \vdots \\ C_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

Przykład 3.2. Znaleźć całkę ogólną równania

$$y''' - 5y'' + 4y' = t \tag{a}$$

Rozwiązujemy najpierw równanie liniowe jednorodne

$$y''' - 5'' + 4y' = 0 \tag{b}$$

Równanie charakterystyczne ma postać

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 4\lambda = 0.$$

Pierwiastki charakterystyczne:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0, & n_1 &= 1, \\ \lambda_2 &= 1, & n_2 &= 1, \\ \lambda_3 &= 4, & n_3 &= 1. \end{aligned}$$

Całka ogólna równania (b) jest następująca

$$y_0(t) = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{4t},$$

zatem

$$\overline{y}(t) = C_1(t) + C_2(t)e^t + C_3(t)e^{4t}.$$

Funkcje C_1, C_2, C_3 wyznaczamy z układu (patrz (3.7))

$$\begin{cases} C_1' + C_2'e^t + C_3'e^{4t} = 0 \\ C_1'0 + C_2'e^t + 4C_3'e^{4t} = 0\,, \\ C_1'0 + C_2'e^t + 16C_3'e^{4t} = t \end{cases}$$

stąd:

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \frac{1}{8}t^2, \\ C_2(t) &= \frac{1}{3}(t+1)e^{-t}, \\ C_3(t) &= -\frac{1}{192}(4t+1)e^{-4t}, \end{aligned}$$

zatem całka szczególna

$$\overline{y}(t) = \frac{1}{8}t^2 + \frac{5}{16}t + \frac{21}{64}$$

oraz całka ogólna równania (a)

$$y(t) = C_1 + C_2e^t + C_3e^{4t} + \frac{1}{8}t^2 + \frac{5}{16}t + \frac{21}{64}$$

lub

$$y(t) = \overline{C}_1 + C_2e^t + C_3e^{4t} + \frac{1}{8}t^2 + \frac{5}{16}t,$$

gdzie

$$\overline{C}_1 = C_1 + \frac{21}{64}.$$

Metoda przewidywań

Zakładamy, że współczynniki a_k $(k = 1, \ldots, n-1)$ w równaniu (3.1) są stałe. Jeżeli funkcja $f(t)$ występująca po prawej stronie tego równania ma postać

$$f(t) = e^{\alpha t}\left[W_k(t)\cos\beta t + P_m(t)\sin\beta t\right] \tag{3.8}$$

gdzie W_k i P_m są wielomianami odpowiednio stopnia k oraz m.

Jeśli ponadto $\alpha + i\beta$ jest pierwiastkiem równania charakterystycznego o krotności j, to

$$\overline{y}(t) = t^j e^{\alpha t}\left[V_s(t)\cos\beta t + Q_s(t)\sin\beta t\right] \tag{3.9}$$

jest całką szczególną równania (3.1), przy czym V_s, Q_s są wielomianami o współczynnikach nieoznaczonych stopnia $s = \max\{k, m\}$.

Jeżeli liczba $\alpha + i\beta$ nie jest pierwiastkiem charakterystycznym, wówczas w (3.9) przyjmuje się $j = 0$.

W szczególności, jeżeli

$$f(t) = e^{at}W_m(t),$$

czyli $\alpha = a$ i $\beta = 0$, to zgodnie z (3.9) przewidujemy

$$\overline{y}(t) = t^j e^{at}V_m(t),$$

gdzie j jest krotnością pierwiastka charakterystycznego a (bądź $j = 0$, gdy a nie jest pierwiastkiem charakterystycznym).

Przykład 3.3. Rozważmy równanie

$$y''' - 5y'' + 4y' = t \tag{a}$$

Pierwiastki charakterystyczne i ich krotności są następujące:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0, \qquad & n_1 &= 1, \\ \lambda_2 &= 1, & n_2 &= 1, \\ \lambda_3 &= 4, & n_3 &= 1. \end{aligned}$$

Prawa strona równania ma postać

$$f(t) = e^{0t}t,$$

$a = 0$ jest pierwiastkiem o krotności $n_1 = 1$. Zatem

$$\overline{y}(t) = t(at + b)$$

lub:

$$\begin{aligned} \overline{y}(t) &= at^2 + bt, \\ \overline{y}' &= 2at + b, \\ \overline{y}'' &= 2a, \\ \overline{y}''' &= 0. \end{aligned}$$

Wstawiając do (a), mamy

$$-10a + 8at + 4b = t,$$

stąd

$$a = \frac{1}{8}, \qquad b = \frac{5}{16},$$

a więc

$$\overline{y}(t) = t\left(\frac{1}{8}t + \frac{5}{16}\right).$$

Przykład 3.4. Znaleźć całkę ogólną równania

$$y^{IV} + y'' = \sin t \tag{a}$$

Rozwiązujemy równanie jednorodne

$$y^{IV} + y'' = 0 \tag{b}$$

Pierwiastki charakterystyczne:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0, \qquad & n_1 &= 2, \\ \lambda_2 &= i, & n_2 &= 1, \\ \lambda_3 &= \overline{\lambda}_2 = -i, & n_3 &= 1, \end{aligned}$$

zatem całka ogólna równania jednorodnego (b) jest postaci

$$y_0(t) = C_1 + C_2 t + C_3 \cos t + C_4 \sin t.$$

Natomiast całkę szczególną przewidujemy następująco

$$\overline{y}(t) = t\,(A \cos t + B \sin t) \tag{c}$$

bo w naszym przykładzie $\alpha = 0$, $\beta = 1$, a więc $\alpha + i\beta = i$ jest pierwiastkiem charakterystycznym o krotności $n_2 = 1$.

Po czterokrotnym zróżniczkowaniu równości (c) i wstawieniu do (a), mamy

$$2A \sin t - 2B \cos t = \sin t,$$

stąd

$$A = \frac{1}{2}, \qquad B = 0,$$

a więc

$$\overline{y}(t) = \frac{1}{2} t \cos t$$

jest całką szczególną równania (a), natomiast

$$y(t) = C_1 + C_2 t + C_3 \cos t + C_4 \sin t + \frac{1}{2} t \cos t$$

jest jego całką ogólną.

3.1.3. Równanie Eulera

Rozważmy równanie (Eulera)

$$(at+b)^n y^{(n)} + a_1 (at+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(at+b) y' + a_n y = f(t) \tag{3.10}$$

Stosując zamianę zmiennej

$$at + b = e^s \tag{3.11}$$

sprowadzamy równanie (3.10) do równania liniowego niejednorodnego o stałych współczynnikach.

Uwaga 3.3. Jednorodne równanie Eulera po wprowadzeniu nowej zmiennej pozostaje jednorodne.

Przykład 3.5. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$(2t+1)^2y'' - 4(2t+1)y' + 8y = -8t - 4 \tag{a}$$

Wprowadzamy nową zmienną niezależną $2t+1 = e^s$. Po zamianie zmiennej równanie (a) przyjmuje postać

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}s^2} - 3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + 2y = -e^s.$$

Całka ogólna tego równania jest następująca

$$y(s) = C_1e^s + C_2e^{2s} + se^s,$$

zatem

$$y(t) = C_1(2t+1) + C_2(2t+1)^2 + (2t+1)\ln|2t+1|$$

jest rozwiązaniem ogólnym równania (a).

Zadania

Znaleźć całkę ogólną równania:

1. $y'' + 4y' + 4y = 0$
2. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$
3. $y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0$
4. $y^{IV} + 2y'' - 8y' + 5y = 0$
5. $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$
6. $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$
7. $y^{V} + y^{IV} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0$
8. $y'' - y = t^2 - t + 1$
9. $y'' - 4y' = -12t^2 + 6t - 4$
10. $y'' - 2y' + y = 4e^t$
11. $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 3e^{-2t}$
12. $y''' - y'' = -3t + 1$
13. $y'' - y' + y = -13\sin 2t$
14. $y'' + 4y = \sin 2t$

15. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 3e^{2t} - 4\sin 2t$
16. $y^{IV} - y = 4\sin t - 8e^{-t} + 1$
17. $y'' + 4y = \cos^2 t$
18. $y'' + y = \sin t \cos 3t$
19. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2t}$
20. $y'' - 2y' + y = \dfrac{t^2 + 2t + 2}{t^3}$
21. $y'' - y' = \dfrac{2-t}{t^3}e^t$
22. $y''' + y' = \dfrac{\sin t}{\cos^2 t}$

Wskazówka: w zadaniach 8–18 zastosować metodę przewidywań, zaś w 19–22 metodę uzmienniania stałych.

23. $t^3 y''' - 3t^2 y'' + 6ty - 6y = 0$
24. $(t+1)^2 y'' - 2(t+1)y' + 2y = 0$
25. $t^2 y'' - ty' + y = 6t \ln t$

Znaleźć całkę szczególną spełniającą warunki początkowe lub brzegowe:

26. $y'' + 4y = \sin 2t, \quad y(0) = y'(0) = 0$
27. $y'' - y = t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$
28. $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2t}, \quad y(0) = y'(0) = 0$
29. $y''' - y' = 0, \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = y''(2) = 0$
30. $y^V + 6y^{IV} - 3y''' = 0, \quad y(1) = y'(1) = y''(1) = y'''(1) = y^{IV}(1) = 0$
31. $y'' + y = 0, \quad y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 1$
32. $y'' + y = t, \quad y(0) = 1, \quad y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$
33. $y'' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = \dfrac{e^2+1}{2e}$

Odpowiedzi

1. $y = e^{-2t}(C_1 + C_2 t)$
2. $y = e^{2t}(C_1 + C_2 t + C_3 t^2)$
3. $y = C_1 e^{3t} + e^{2t}(C_2 + C_3 t)$

4. $y = e^{t}(C_1 + C_2 t) + e^{-t}(C_3 \cos 2t + C_4 \sin 2t)$
5. $y = (C_1 + C_2 t)\cos 2t + (C_3 + C_4 t)\sin 2t$
6. $y = e^{-t/2}\left[(C_1 + C_2 t)\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + (C_3 + C_4 t)\sin \frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$
7. $y = C_1 e^{-t} + (C_2 + C_3 t)\cos t + (C_4 + C_5 t)\sin t$
8. $y = -t^2 + t - 3 + C_1 e^{t} + C_2 e^{-t}$
9. $y = t^3 + t + C_1 + C_2 e^{4t}$
10. $y = 2t^2 e^{t} + e^{t}(C_1 + C_2 t)$
11. $y = \frac{1}{2}t^3 e^{-2t} + e^{-2t}(C_1 + C_2 t + C_3 t^2)$
12. $y = \frac{1}{2}t^3 + t^2 + C_1 e^{t} + C_2 + C_3 t$
13. $y = 3\sin 2t - 2\cos 2t + e^{\frac{t}{2}}\left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$
14. $y = -\frac{1}{4}t\cos 2t + C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$
15. $y = \frac{3}{8}e^{2t} - \frac{1}{5}t\cos 2t + \frac{2}{5}t\sin 2t + C_1 e^{t} + C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t$
16. $y = t\cos t + 2te^{-t} - 1 + C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t$
17. $y = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}t\sin 2t + C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$
18. $y = -\frac{1}{30}\sin 4t + \frac{1}{6}\sin 2t + C_1 \cos t + C_2 \sin t$
19. $y = \frac{1}{4}\cos 2t \ln|\cos 2t| + \frac{1}{2}t\sin 2t + C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$
20. $y = \frac{1}{t} + e^{t}(C_1 + C_2 t)$
21. $y = \frac{1}{t}e^{t} + C_1 + C_2 e^{t}$
22. $y = \frac{1}{\cos t} + (\cos t)\ln|\cos t| + (\sin t)(-\operatorname{tg} t + t) + C_1 + C_2 \cos t + C_3 \sin t$
23. $y = C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3$
24. $y = C_1(t+1) + C_2(t+1)^2$
25. $y = t\ln^3 t + t(C_1 + C_2 \ln t)$

26. $y = -\frac{1}{4}t\cos 2t + \frac{1}{8}\sin 2t$
27. $y = -t + \cosh t$
28. $y = \frac{3}{2}t^2 e^{-2t}$
29. $y = 1$
30. $y = 0$
31. $y = \sin t + \cos t$
32. $y = \cos t + t$
33. $y = \cosh t$

3.1.4. Rozwiązywanie równań liniowych za pomocą szeregów potęgowych i szeregów potęgowych uogólnionych

W niniejszym podrozdziale ograniczymy się do rozwiązywania równań liniowych jednorodnych rzędu drugiego. Podaną niżej metodę można jednak bez istotnych zmian rozszerzyć na równania liniowe jednorodne dowolnego rzędu.

Rozważymy równanie

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{3.12}$$

z warunkami początkowymi

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{i} \quad y'(x_0) = y_1 \tag{3.13}$$

Rozwiązanie w postaci szeregu potęgowego

Twierdzenie 3.2. *Jeżeli współczynniki p i q równania* (3.12) *są rozwijalne w szeregi potęgowe w otoczeniu punktu $x = x_0$:*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k,$$
$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k$$

zbieżne dla $|x - x_0| < r$, to problem początkowy (3.12), (3.13) *ma jednoznaczne rozwiązanie y, rozwijalne w otoczeniu x_0 w szereg*

$$y = y_0 + y_1(x - x_0) + \sum_{k=2}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \tag{3.14}$$

który jest zbieżny co najmniej w tym samym obszarze, co szeregi współczynników p i q, tzn. dla $|x - x_0| < r$.

Uwaga 3.4. Współczynniki c_k szeregu (3.14) są określone w sposób jednoznaczny przez wartości początkowe y_0 i y_1. Można je wyznaczyć np. wstawiając szereg (3.14) do równania (3.12) i przyrównując do zera współczynniki przy różnych potęgach $(x - x_0)$ (metoda współczynników nieoznaczonych).

Uwaga 3.5. Dla znalezienia rozwiązania ogólnego równania (3.12) wystarczy znaleźć dwie liniowo niezależne całki szczególne $\overline{y}$ i $\overline{\overline{y}}$ (układ fundamentalny). Zwykle buduje się je tak, aby w punkcie x_0 były unormowane, tzn.

$$\overline{y}(x_0) = 1 \quad \text{i} \quad \overline{y}'(x_0) = 0$$

oraz

$$\overline{\overline{y}}(x_0) = 0 \quad \text{i} \quad \overline{\overline{y}}'(x_0) = 1.$$

Przykład 3.6. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$(1 - x^2)y'' - xy' - y = 0 \tag{a}$$

w otoczeniu punktu $x_0 = 0$.

W tym celu wystarczy znaleźć układ fundamentalny rozwiązań $\overline{y}$ i $\overline{\overline{y}}$ unormowany w punkcie $x_0 = 0$.

Dla $|x| \neq 1$ równanie (a) jest równoważne równaniu

$$y'' - \frac{x}{1-x^2}y' - \frac{1}{1-x^2}y = 0.$$

Współczynniki tego równania są rozwijalne w szeregi potęgowe w otoczeniu $x_0 = 0$, zbieżne dla $|x| < 1$. Tak więc istnieją rozwiązania $\overline{y}$ i $\overline{\overline{y}}$, przy czym przedstawiające je szeregi są zbieżne co najmniej dla $|x| < 1$.

Zgodnie z uwagą 2 przyjmiemy warunki początkowe:

$$\overline{y}(0) = 1 \quad \text{i} \quad \overline{y}'(0) = 0 \tag{b1}$$

$$\overline{\overline{y}}(0) = 0 \quad \text{i} \quad \overline{\overline{y}}'(0) = 1 \tag{b2}$$

Znajdziemy kolejne rozwiązania problemów początkowych (a), (b1) oraz (a), (b2).

Na podstawie wzoru (3.14)

$$\overline{y} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \overline{c}_k x^k \quad \text{oraz} \quad \overline{\overline{y}} = x + \sum_{k=2}^{\infty} \overline{\overline{c}}_k x^k.$$

Wstawiając do (a) mamy:

$$\begin{array}{r|l}
(-1) & \overline{y} = 1 + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \overline{c}_k x^k \\
(-x) & \overline{y}' = \sum\limits_{k=2}^{\infty} k\overline{c}_k x^{k-1} \\
(1-x^2) & \overline{y}'' = \sum\limits_{k=2}^{\infty} k(k-1)\overline{c}_k x^{k-2} \\
\hline
\end{array}$$

$$-1-\sum_{k=2}^{\infty}\overline{c}_k x_k-\sum_{k=2}^{\infty}k\overline{c}_k x^k+\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\overline{c}_k x^{k-2}-\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\overline{c}_k x^k=0.$$

Przyrównując do zera współczynniki przy potęgach x^k $(k=0,1,2,\dots)$ otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned}
&x^0:\ -1+2\cdot 1\overline{c}_2=0, &&\text{stąd } \overline{c}_2=\frac{1}{2!},\\
&x^1:\ 3\cdot 2\overline{c}_3=0, &&\text{stąd } \overline{c}_3=0,\\
&\vdots\\
&x^k:\ -\overline{c}_k-k\overline{c}_k+(k+1)(k+2)\overline{c}_{k+2}-k(k-1)\overline{c}_k=0,
\end{aligned}$$

stąd $\overline{c}_{k+2}=\dfrac{1+k^2}{(k+1)(k+2)}\overline{c}_k$ dla $k\geqslant 2$, a więc

$$\overline{c}_k=\begin{cases}\dfrac{(1+2)^2(1+4)^2\dots[1+(k-2)^2]}{k!} & \text{dla } k=2m\\ 0 & \text{dla } k=2m+1\end{cases}.$$

Zatem

$$\overline{y}=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(1+2)^2(1+4)^2\dots[1+(2m-2)^2]}{(2m)!}x^{2m}\quad \text{dla } |x|<1.$$

Postępując analogicznie wyznaczamy wszystkie współczynniki $\overline{\overline{c}}_k$ dla rozwiązania $\overline{\overline{y}}$. W rezultacie otrzymamy

$$\overline{\overline{y}}=x+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(1+3)^2\dots[1+(2m-1)^2]}{(2m+1)!}x^{2m+1}\quad \text{dla } |x|<1.$$

Rozwiązaniem ogólnym równania (a) jest

$$y=C_1\overline{y}+C_2\overline{\overline{y}}.$$

Rozwiązanie w postaci uogólnionego szeregu potęgowego

Definicja 3.2. *Szereg postaci*

$$(x-x_0)^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-x_0)^k,$$

gdzie $c_0\neq 0$, *nazywamy uogólnionym szeregiem potęgowym.*

Niech $x = x_0$ będzie punktem osobliwym równania (3.12), tzn. punktem osobliwym przynajmniej jednego ze współczynników tego równania. Wówczas twierdzenie 3.2 jest niestosowalne. Jednakże w wielu przypadkach można znaleźć rozwiązanie równania (3.12) w postaci uogólnionego szeregu potęgowego.

TWIERDZENIE 3.3. *Jeżeli współczynniki równania* (3.12) *w otoczeniu punktu* x_0 *dają się przedstawić w postaci:*

$$p(x) = \frac{1}{x - x_0} \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k,$$

$$q(x) = \frac{1}{(x - x_0)^2} \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k,$$

gdzie $p_0^2 + q_0^2 + q_1^2 \neq 0$ *i szeregi potęgowe występujące w tych równościach są zbieżne dla* $|x - x_0| < R$, *to równanie* (3.12) *ma przynajmniej jedno rozwiązanie szczególne dane wzorem*

$$y = (x - x_0)^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \qquad (c_0 \neq 0) \tag{3.15}$$

przy czym szereg $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$ *jest zbieżny co najmniej dla* $|x - x_0| < R$.

W celu określenia wykładnika ρ i współczynników c_k należy podstawić szereg (3.15) do równania (3.12), uprościć przez $(x - x_0)^{\rho}$ i przyrównać do zera współczynniki przy różnych potęgach $(x - x_0)$. Z tym, że wartość wykładnika wyznacza się z tzw. równania wyznaczającego w punkcie x_0. Jego postać jest następująca

$$\rho(\rho - 1) + p_0 \rho + q_0 = 0 \tag{3.16}$$

gdzie: $p_0 = \lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0) p(x)$, $q_0 = \lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0)^2 q(x)$. W przypadku gdy pierwiastki ρ_1 i ρ_2 równania (3.16) są różne, to ρ jest tym spośród nich, który ma większą część rzeczywistą.

Niech $\rho = \rho_1$, wówczas

$$y_1 = (x - x_0)^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} (x - x_0)^k \qquad (c_0^{(1)} \neq 0) \tag{3.17}$$

Jeżeli różnica pierwiastków $\rho_1 - \rho_2$ nie jest liczbą całkowitą dodatnią, to istnieje również rozwiązanie odpowiadające pierwiastkowi ρ_2

$$y_2 = (x - x_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} (x - x_0)^k \qquad (c_0^{(2)} \neq 0) \tag{3.18}$$

Jeśli zaś różnica $\rho_1 - \rho_2$ jest liczbą całkowitą dodatnią, to drugie rozwiązanie szczególne ma postać (3.18) albo (3.19)

$$y_2 = (x - x_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} (x - x_0)^k + \gamma_{-1} y_1 \ln(x - x_0) \tag{3.19}$$

W przypadku pierwiastków podwójnych ($\rho_1 = \rho_2$) istnieje tylko jedno rozwiązanie postaci (3.17), drugie zaś musi być postaci (3.19).

Przykład 3.7. Wykazać, że równanie Bessela

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \qquad (n \neq 0) \tag{a}$$

ma rozwiązanie szczególne postaci

$$y = x^n \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \qquad (c_0 \neq 0) \tag{b}$$

Sprowadźmy to równanie do postaci (3.12)

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \frac{(x^2 - n^2)}{x^2} y = 0.$$

Zauważmy, że współczynniki p i q tego równania w otoczeniu punktu osobliwego $x_0 = 0$ spełniają założenia twierdzenia 3.3, przy czym szeregi występujące w rozwinięciach tych współczynników są zbieżne dla wszystkich x.

Równaniem wyznaczającym w punkcie $x_0 = 0$ jest

$$\rho(\rho - 1) + \rho - n^2 = 0.$$

Pierwiastkiem tego równania są $\rho = n$ lub $\rho = -n$.

Pierwiastkowi $\rho = n$ (twierdzenie 3.3) odpowiada rozwiązanie postaci (b), przy czym szereg potęgowy występujący po prawej stronie rozwiązania jest zbieżny dla wszystkich x.

Przykład 3.8. Wykazać, że równanie Bessela ($n = 0$)

$$xy'' + y' + xy = 0 \tag{a}$$

ma rozwiązanie postaci

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \tag{b}$$

Znaleźć to rozwiązanie.

Równanie wyznaczające w punkcie osobliwym $x_0 = 0$ jest następujące

$$\rho(\rho - 1) + \rho = 0.$$

Ma ono jeden pierwiastek podwójny $\rho = 0$. Zatem na podstawie twierdzenia 3.3 równanie (a) ma rozwiązanie postaci (b), przy czym $c_0 \neq 0$.

Stosując metodę współczynników nieoznaczonych znajdujemy współczynniki c_k:

$$
\begin{array}{c|l}
(x) & y = c_0 + c_1 x + \sum\limits_{k=2}^{\infty} c_k x^k \\
(1) & y' = c_1 + \sum\limits_{k=2}^{\infty} k c_k x^{k-1} \\
(x) & y'' = \sum\limits_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} \\
\hline
\end{array}
$$

$$
c_0 + c_1 x^2 + \sum_{k=2}^{\infty} c_k x^{k+1} + c_1 + \sum_{k=2}^{\infty} k c_k x^{k-1} + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-1} = 0.
$$

Przyrównując do zera współczynniki przy x^k $(k = 0, 1, 2, \dots)$ mamy:

$$
\begin{array}{ll}
x^0: & c_1 = 0, \\
x^1: & c_0 + 2^2 c_2 = 0, \\
x^2: & c_1 + 3^2 c_3 = 0, \\
x^4: & c_3 + 5^2 c_5 = 0, \\
\vdots & \\
x^{2m}: & c_{2m-1} + (2m+1)^2 c_{2m+1} = 0, \\
x^{2m+1}: & c_{2m} + (2m+2)^2 c_{2m+2} = 0.
\end{array}
$$

Zakładając $c_0 = 1$, mamy

$$
c_{2m} = \frac{(-1)^m}{(m!)^2 2^{2m}}, \qquad c_{2m+1} = 0.
$$

Zatem jedno z rozwiązań równania (a) jest następujące

$$
y_1 = J_0(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}.
$$

Funkcję $J_0(x)$ nazywamy funkcją Bessela pierwszego rodzaju rzędu zerowego.

Drugie z rozwiązań, zgodnie ze wzorem (3.19), będzie mieć postać

$$
y_2 = \gamma_{-1} J_0(x) \ln x + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.
$$

Stosując metodę współczynników nieoznaczonych, przy założeniu, że $\gamma_{-1} = 1$, otrzymamy

$$
y_2 = K_0(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.
$$

Funkcję $K_0(x)$ nazywamy funkcją Bessela drugiego rodzaju rzędu zerowego.

Rozwiązanie ogólne równania (a) można zapisać w postaci

$$y = C_1 J_0(x) + C_2 K_0(x).$$

Zadania

Znaleźć układ fundamentalny rozwiązań w postaci szeregów potęgowych, unormowany w punkcie $x_0 = 0$, określić rozwiązanie ogólne:

1. $y'' - xy = 0$
2. $y'' + x^2 y = 0$
3. $y'' + \dfrac{1}{1-x} y = 0$
4. $y'' + xy' - (2x^2 + 1)y = 0$

Znaleźć dwa liniowo niezależne rozwiązania szczególne w otoczeniu punktu osobliwego x_0, w postaci uogólnionych szeregów potęgowych lub szeregów zawierających dodatkowo $\ln x$:

5. $y'' + \dfrac{2}{x} y' + y = 0$
6. $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \dfrac{1}{4}\right) y = 0$
7. $x(x-1)^2 y'' + x(x-1)y' - y = 0$
8. $x(x-1)y'' + (-1 + 3x)y' + y = 0$
9. $x(x-1)y'' + (1 + x)y' - y = 0$
10. $x(x-1)y'' + (-2 + 2x)y' - 2y = 0$
11. $x(x-1)y'' + (-2 + 3x)y' + y = 0$

Odpowiedzi

1. $y_1 = A(x) = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (3k-1)3k}$

   $y_2 = B(x) = x + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 3k(3k+1)}$

   $y = C_1 A(x) + C_2 B(x)$

2. $y_1 = 1 - \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{x^8}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8} - \frac{x^{12}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12} + \ldots$

   $y_2 = x - \frac{x^5}{4\cdot 5} + \frac{x^9}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9} - \frac{x^{13}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12\cdot 13} + \ldots$

   $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

3. $y_1 = 1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} - \frac{2}{5!}x^5 - \ldots$

   $y_2 = x - \frac{x^3}{3!} - \frac{2}{4!}x^4 - \frac{5}{5!}x^5 - \ldots$

   $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

4. $y_1 = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{3}{4!}x^4 + \ldots$

   $y_2 = x + \frac{12}{5!} + \ldots$

   $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

5. $y_1 = \frac{\sin x}{x}, \quad y_2 = \frac{\cos x}{x}$

6. $y_1 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad y_2 = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$

7. $y_1 = \frac{x}{1-x}, \quad y_2 = \frac{1}{1-x} + \frac{x}{1-x}\ln x$

8. $y_1 = \frac{x}{1-x}, \quad y_2 = \frac{1}{1-x}\ln|x|$

9. $y_1 = \frac{x^2}{1-x}, \quad y_2 = \frac{1}{1-x}$

10. $y_1 = 1 - x, \quad y_2 = \frac{-2x+1}{x} + 2(x-1)\ln\frac{x}{x-1}$

11. $y_1 = \frac{1}{x}\ln(1-x), \quad y_2 = \frac{1}{x}$

3.2. Równania nieliniowe rzędu n

Rozważmy równanie n-tego rzędu

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \tag{3.20}$$

oraz warunki początkowe

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \tag{3.21}$$

Twierdzenie 3.4. *Jeżeli funkcja f jest ciągła w pewnym otoczeniu punktu $(t_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$, to problem początkowy posiada rozwiązanie (w pewnym otoczeniu t_0).*

Jeżeli ponadto funkcja f spełnia warunek Lipschitza względem $(y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ w tym otoczeniu, to rozwiązanie tego problemu jest jedyne.

3.2.1. Rozwiązywanie równań nieliniowych

1. Dane jest równanie nie zawierające poszukiwanej funkcji oraz kolejnych pochodnych, tzn.

$$F\left(t, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \qquad 1 \leqslant k < n \tag{3.22}$$

Wprowadzając nową zmienną zależną

$$z = y^{(k)}$$

otrzymamy

$$F\left(t, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0.$$

Przykład 3.9. Rozwiązać równanie

$$y' = ty'' + (y'')^2 \tag{a}$$

podstawiając

$$y' = z$$

otrzymamy równanie rzędu pierwszego (Clairauta)

$$z = tz' + (z')^2.$$

Rozwiązaniem ogólnym tego równania jest

$$z = tC_1 + C_1^2 \tag{b}$$

a rozwiązaniem osobliwym

$$z = -\frac{1}{4}t^2 \tag{c}$$

Wracając do zmiennej y, po scałkowaniu (b) mamy całkę ogólną równania (a)

$$y = \frac{1}{2}t^2C_1 + C_1^2t + C_2,$$

zaś z (c) otrzymujemy jednoparametrową rodzinę całek osobliwych wyjściowego równania

$$y = -\frac{1}{12}t^3 + C.$$

2. Jeśli równanie nie zawiera zmiennej niezależnej, tzn. jest postaci

$$F\left(y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{3.23}$$

to wprowadzając nową funkcję (zależną od y)

$$y' = z(y)$$

obniżymy rząd równania (3.23) o jeden, z tym, że w otrzymanym równaniu zmienną niezależną będzie y.

Przykład 3.10. Rozwiązać równanie

$$2yy'' = (y')^2 + y^2 \tag{a}$$

Wprowadźmy nową zmienną zależną

$$y' = z(y),$$

tj.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = z(y),$$

skąd

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}z.$$

Równanie (a) przyjmie postać

$$2yz\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = z^2 + y^2.$$

Jest to równanie Bernoulliego. Całka ogólna tego równania jest następująca

$$z^2 = C_1y + y^2,$$

wracając do zmiennej y mamy

$$(y')^2 = C_1y + y^2,$$

skąd po scałkowaniu, otrzymamy ostatecznie

$$\ln\left|y + \frac{1}{2}C_1 + \sqrt{C_1y + y^2}\right| = \pm t + C_2.$$

Funkcja $y = 0$ jest również rozwiązaniem (szczególnym) równania (a).

3. Równanie jednorodne względem zmiennej zależnej i jej pochodnych.

DEFINICJA 3.3. *Powiemy, że funkcja $F(t, p_0, \ldots, p_n)$ jest jednorodna względem zmiennych $p_0, \ldots, p_n$, jeżeli*

$$\bigwedge_{\alpha \in R} F(t, \alpha p_0, \ldots, \alpha p_n) = \alpha^k F(t, p_0, \ldots, p_n).$$

Liczbę k nazywamy stopniem jednorodności.

Rozważmy równanie jednorodne

$$F(t, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{3.24}$$

Wprowadzając nową zmienną zależną z, wzorem

$$y' = yz$$

obniżymy rząd równania (3.24).

Przykład 3.11. Rozwiązać równanie

$$tyy'' - t(y')^2 - yy' = 0 \tag{a}$$

Niech

$$y' = yz,$$

stąd

$$y'' = y(z^2 + z').$$

Wstawiając powyższe do (a), mamy

$$ty^2(z^2 + z') - ty^2 z^2 - y^2 z = 0,$$

skąd

$$tz' - z = 0 \quad \text{lub} \quad y = 0.$$

Po scałkowaniu pierwszego z powyższych równań mamy

$$z = C_1 t$$

lub wracając do wyjściowej zmiennej

$$\frac{y'}{y} = C_1 t,$$

skąd

$$y = C_2 e^{\frac{1}{2} C_1 t^2} \tag{b}$$

Zauważmy, że krzywa $y = 0$ jest zawarta w całce ogólnej (b).

Zadania

Rozwiązać równania:

1. $y' + \frac{1}{4}(y'')^2 = ty''$
2. $ty''' + y'' = 1 + t$
3. $(t+1)y'' - (t+2)y' + t + 2 = 0$
4. $yy' = \sqrt{y^2 + (y')^2}y'' - y'y''$
5. $(y')^2 - yy'' = y^2y'$
6. $yy'' + (y')^2 - (y')^3 \ln y = 0$
7. $tyy'' - t(y')^2 - yy'\frac{bt(y')^2}{\sqrt{a^2 - t^2}} = 0$
8. $t^2yy'' = (y - ty')^2$
9. $t^2(yy'' - (y')^2) + tyy' = y\sqrt{t^2(y')^2 + y^2}$

Znaleźć rozwiązania spełniające zadane warunki początkowe lub brzegowe:

10. $yy'' + (y')^2 = 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
11. $ty'' = \sqrt{1 + (y')^2}, \quad y(1) = 0, \quad y(e^2) = 1$
12. $yy' + (y')^2 + yy'' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(-1) = 0$
13. $2yy'' + y^2 - (y')^2 = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1$
14. $y'' + \frac{1}{y^2}e^{y^2}y' - 2y(y')^2 = 0, \quad y\left(-\frac{1}{2e}\right) = 1, \quad y'\left(-\frac{1}{2e}\right) = e$
15. $(t+1)y'' + t(y')^2 = y', \quad y(1) = -2, \quad y'(1) = 4$

Odpowiedzi

1. $y = C_1t(t - C_1) + C_2, \quad y = \frac{t^3}{3} + C$ (rozwiązanie osobliwe)
2. $y = \frac{t^3}{12} + \frac{t^2}{2} + C_1t\ln|t| + C_2t + C_3$
3. $y = (C_1e^t + 1)t + C_2$
4. $y = C_1\frac{1 + C_2e^t}{1 - C_2e^t}, \quad y = C$

5. $t = C_1 - \frac{1}{C_2} \ln \left| \frac{y}{y + C_2} \right|$

6. $t = C_1 y^2 + y \ln y + C_2$

7. $\ln |y| = -\frac{\sqrt{a^2 - t^2}}{b} + \frac{C_1}{b^2} \ln \left| C_1 + b\sqrt{a^2 - t^2} \right| + C_2$

8. $y = C_2 t e^{-\frac{C_1}{t}}$

9. $y = C_2 e^{\frac{t}{2C_1} + \frac{C_1}{2t}}$

10. $y = t + 1$

11. $y = \frac{t^2 - 1}{2(e^2 - 1)} - \frac{e^2 - 1}{4} \ln |t|$ lub $y = \frac{1 - t^2}{2(e^2 + 1)} + \frac{e^2 + 1}{4} \ln |t|$

12. $y^2 = \frac{e}{e - 1} + \frac{e^{-t}}{1 - e}$

13. $y = \sin t + 1$

14. $t = -\frac{1}{2} e^{-y^2}$

15. $y = 2 \ln |t| - \frac{2}{t}$

Równania o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego

DEFINICJA 4.1. *Równaniem różniczkowym o pochodnych cząstkowych rzędu m nazywamy równanie postaci*

$$\mathcal{F}\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{i_1}, \dots, \partial x_n^{i_n}}\right) = 0 \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} i_k = m\right) \tag{4.1}$$

gdzie $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ jest zmienną niezależną, zaś $u = u(x)$ szukaną funkcją.

DEFINICJA 4.2. *Funkcję u określoną i ciągłą wraz z odpowiednimi pochodnymi w obszarze $D \subset R^n$, spełniającą równanie* (4.1) *nazywamy rozwiązaniem regularnym.*

Rozważa się również rozwiązania równania (4.1), które nie spełniają założeń regularności w całym obszarze D. Należą do nich też rozwiązania zwane elementarnymi lub podstawowymi.

DEFINICJA 4.3. *Powiemy, że równanie* (4.1) *jest liniowe, jeżeli funkcja $\mathcal{F}$ jest liniowa względem wszystkich swoich argumentów z wyjątkiem pierwszego* (*tzn. z wyjątkiem $x = (x_1, \dots, x_n)$*).

W szczególności, równanie liniowe rzędu pierwszego ma postać

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + B(x)u = g(x),$$

a rzędu drugiego

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} B_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k} + C(x)u = g(x).$$

4.1. Równania liniowe i quasi-liniowe rzędu pierwszego

4.1.1. Uwagi wstępne

Dane jest równanie różniczkowe rzędu pierwszego

$$\mathcal{F}\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0$$

lub dokładniej

$$\mathcal{F}\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0.$$

Przypuśćmy, że równanie to można zapisać w postaci (4.2)

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} = f\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}}\right) \tag{4.2}$$

Niech x_n^0 będzie ustaloną (zadaną) wartością oraz niech

$$u(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0) = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) \tag{4.3}$$

gdzie φ jest zadaną funkcją.

Definicja 4.4. *Zagadnienie początkowe Cauchy'ego polega na wyznaczeniu rozwiązania równania* (4.2) *spełniającego warunek początkowy* (4.3).

Twierdzenie 4.1. *Jeżeli funkcja f w równaniu* (4.2) *jest analityczna w otoczeniu pewnego punktu $(x_1^0, \dots, x_n^0, b, c_1, \dots, c_{n-1})$ oraz funkcja φ (z warunku* (4.3)*) jest analityczna w otoczeniu punktu $(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)$, wówczas problem początkowy* (4.2), (4.3) *posiada dokładnie jedno rozwiązanie analityczne w pewnym otoczeniu punktu $(x_1^0, \dots, x_n^0)$.*

Uwaga 4.1. Można rozważać zagadnienie ogólniejsze, polegające na wyznaczeniu rozwiązania równania (4.2) przechodzącego przez zadaną krzywą ($x = x(t)$). Zadanie to, przy pewnych założeniach o funkcji wektorowej $x(t)$, sprowadza się do zagadnienia poprzedniego.

4.1.2. Równania liniowe jednorodne

Równanie liniowe jednorodne rzędu pierwszego ma postać

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \tag{4.4}$$

Rozważmy układ równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego w postaci symetrycznej

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{A_1(x)} = \frac{\mathrm{d}x_2}{A_2(x)} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x_n}{A_n(x)} \tag{4.4a}$$

Twierdzenie 4.2. *Załóżmy, że funkcje A_i występujące w* (4.4) *i* (4.4a) *są ciągłe w pewnym obszarze $D \subset R^n$. Wówczas funkcja $u = F(x_1, \dots, x_n)$ jest rozwiązaniem równania* (4.4) *wtedy i tylko wtedy, gdy $F(x_1, \dots, x_n)$ jest całką pierwszą układu* (4.4a).

TWIERDZENIE 4.3. *Jeżeli* $F_1, \ldots, F_{n-1}$ *są liniowo niezależnymi całkami pierwszymi układu* (4.4a), *to*

$$u(x) = G(F_1(x), \ldots, F_{n-1}(x))$$

jest rozwiązaniem ogólnym równania (4.4)*. G jest tu dowolną funkcją różniczkowalną o wartościach rzeczywistych.*

Przykład 4.1. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$xz\frac{\partial u}{\partial x} + yz\frac{\partial u}{\partial y} - (x^2 + y^2)\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \tag{a}$$

Odpowiadający mu układ równań zwyczajnych ma postać

$$\frac{\mathrm{d}x}{xz} = \frac{\mathrm{d}y}{yz} = \frac{-\,\mathrm{d}z}{x^2 + y^2} \tag{a'}$$

lub inaczej:

$$\frac{\mathrm{d}x}{xz} = \frac{\mathrm{d}y}{yz} \tag{b}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{xz} = \frac{-\,\mathrm{d}z}{x^2 + y^2} \tag{c}$$

Z równania (b) mamy

$$y = C_1 x \tag{d}$$

Wstawiając do (c) uzyskujemy

$$\frac{\mathrm{d}x}{xz} = -\frac{\mathrm{d}z}{x^2(1 + C_1^2)}.$$

Po scałkowaniu, otrzymujemy

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2.$$

Funkcje $F_1(x, y, z) = \dfrac{y}{x}$ i $F_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ są całkami pierwszymi układu (a'), zatem rozwiązanie ogólne równania (a) ma postać

$$u = G\left(\frac{y}{x}, x^2 + y^2 + z^2\right),$$

gdzie $G\colon R^2 \to R$ jest dowolną funkcją różniczkowalną.

4.1.3. Rozwiązanie problemu Cauchy'ego dla równania jednorodnego

Poszukujemy rozwiązania równania (4.4) spełniającego warunek początkowy

$$u(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0) = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) \tag{4.5}$$

Niech

$$u(x) = G(F_1(x), \dots, F_{n-1}(x))$$

będzie rozwiązaniem ogólnym równania (4.4), gdzie $F_1, \dots, F_{n-1}$ — całki pierwsze układu (4.4a). Wówczas, eliminując zmienne $x_1, \dots, x_{n-1}$ z układu n równań

$$\begin{cases} F_i(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0) = C_i \qquad i = 1, \dots, n-1 \\ u(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0) = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{cases} \tag{4.6}$$

otrzymujemy

$$u = \Phi(C_1, \dots, C_{n-1}),$$

gdzie Φ jest funkcją uzyskaną z rozwiązania układu (4.6).

Rozwiązaniem problemu początkowego (4.4), (4.5) będzie funkcja

$$u(x) = \Phi\left(F_1(x), \dots, F_{n-1}(x)\right) \tag{4.7}$$

Przykład 4.2. Rozwiązać problem początkowy (a), (b):

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{2}\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \tag{a}$$

$$u(1, y, z) = y + z^2 \tag{b}$$

Najpierw należy znaleźć dwie liniowo niezależne całki pierwsze układu

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{2\,\mathrm{d}z}{z} \tag{a'}$$

są nimi:

$$F_1(x, y, z) = \frac{y}{x}, \qquad F_2(x, y, z) = \frac{z^2}{x}.$$

Z układu (patrz (4.6))

$$\begin{cases} \dfrac{y}{1} = C_1 \\ \dfrac{z^2}{1} = C_2 \\ u = y + z^2 \end{cases},$$

eliminując zmienne y i z, uzyskujemy

$$u = C_1 + C_2,$$

zatem rozwiązanie problemu (a), (b) ma postać

$$u(x, y, z) = \frac{y}{x} + \frac{z^2}{x}.$$

4.1.4. Równania quasi-liniowe

Równanie postaci

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = B(x,u) \tag{4.8}$$

nazywamy quasi-liniowym. Szukamy rozwiązania w postaci uwikłanej.

Niech

$$\omega(x,u) = 0 \tag{4.9}$$

będzie rozwiązaniem równania (4.8). Wtedy

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial \omega}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial \omega}{\partial u}}, \qquad i = 1,\ldots,n.$$

Po wstawieniu powyższych związków do równania (4.8) oraz pewnych przekształceniach, mamy

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial \omega}{\partial x_i} + B(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial \omega}{\partial u} = 0 \tag{4.10}$$

Równanie (4.10) jest równaniem liniowym jednorodnym, w którym $x_1,\ldots,x_n,u$ są zmiennymi niezależnymi, zaś ω jest szukaną funkcją tych argumentów.

Aby rozwiązać równanie (4.10) należy znaleźć n liniowo niezależnych całek pierwszych układu równań zwyczajnych

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{A_1(x,u)} = \frac{\mathrm{d}x_2}{A_2(x,u)} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x_n}{A_n(x,u)} = \frac{\mathrm{d}u}{B(x,u)} \tag{4.11}$$

Jeżeli funkcje $F_1(x,u),\ldots,F_n(x,u)$ są szukanymi całkami pierwszymi, wówczas rozwiązanie ogólne równania (4.10) ma postać

$$\omega(x,u) = G(F_1(x,u),\ldots,F_n(x,u)).$$

A więc związek

$$G(F_1(x,u),\ldots,F_n(x,u)) = 0$$

określa funkcję uwikłaną u, będącą rozwiązaniem ogólnym równania (4.8).

Uwaga 4.2. Równanie liniowe niejednorodne postaci

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + D(x)u = g(x)$$

rozwiązujemy tak, jak równanie quasi-liniowe, przyjmując, że $B(x,u) = g(x) - D(x)u$.

Przykład 4.3. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$xu\frac{\partial u}{\partial x} + yu\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2 + u^2 \tag{a}$$

Odpowiadający mu układ równań zwyczajnych jest następujący

$$\frac{\mathrm{d}x}{xu} = \frac{\mathrm{d}y}{yu} = \frac{\mathrm{d}u}{x^2 + y^2 + u^2}$$

lub

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{xu} = \dfrac{\mathrm{d}y}{yu} \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{xu} = \dfrac{\mathrm{d}u}{x^2 + y^2 + u^2} \end{cases} \tag{b}$$

Z pierwszego równania powyższego układu mamy

$$y = C_1 x \tag{c}$$

Wstawiając do drugiego równania układu (b) uzyskujemy

$$\frac{\mathrm{d}x}{xu} = \frac{\mathrm{d}u}{x^2(1 + C_1^2) + u^2}$$

lub

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{u}(1 + C_1^2) + \frac{u}{x} \tag{d}$$

Otrzymaliśmy równanie różniczkowe zwyczajne jednorodne. Zgodnie z metodą podaną w rozdziale 1 wprowadzimy nową zmienną

$$z = \frac{u}{x} \tag{e}$$

skąd

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = z + x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}.$$

Po wstawieniu do (d) mamy

$$x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{z}(1 + C_1^2),$$

skąd

$$(1 + C_1^2)\ln|x| = \frac{1}{2}z^2 + \overline{C}_2.$$

Uwzględniając (c) i (e), po przekształceniach mamy ostatecznie

$$\frac{1}{x^2}\left[u^2 - 2(x^2+y^2)\ln|x|\right] = C_2,$$

gdzie $C_2 = 2\overline{C}_2$. Szukane rozwiązanie ogólne równania (a) ma zatem postać

$$G\left(\frac{y}{x}, \frac{u^2}{x^2} - 2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\ln|x|\right) = 0,$$

gdzie G — dowolna funkcja różniczkowalna.

Przykład 4.4. Rozwiązać problem początkowy (a), (b):

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = u \tag{a}$$

$$u(2,y,z) = \frac{1}{2}(y+z) \tag{b}$$

Odpowiedni układ równań jest następujący

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{\mathrm{d}u}{u},$$

skąd

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = C_1 \\ \dfrac{z}{x} = C_2 \\ \dfrac{u}{x} = C_3 \end{cases} \tag{c}$$

Zgodnie z metodą przedstawioną w podrozdziale 4.1.3, z układu

$$\begin{cases} \dfrac{y}{2} = C_1 \\ \dfrac{z}{2} = C_2 \\ \dfrac{u}{2} = C_3 \\ u = \dfrac{1}{2}(y+z) \end{cases}$$

rugujemy zmienne y, z, u, a więc

$$2C_3 = C_1 + C_2,$$

lub

$$C_1 + C_2 - 2C_3 = 0.$$

Zatem rozwiązanie problemu (a), (b) z uwagi na (c), ma postać

$$\frac{y}{x} + \frac{z}{x} - 2\frac{u}{x} = 0$$

lub

$$u = \frac{1}{2}(y + z).$$

Przykład 4.5. Wyznaczyć powierzchnię całkową równania

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u \tag{a}$$

przechodzącą przez krzywą daną równaniami:

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad u = t^3 \tag{b}$$

Szukamy całek pierwszych układu

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}u}{2u},$$

skąd

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = C_1 \\ \dfrac{u}{x^2} = C_2 \end{cases} \tag{c}$$

ale $x = t$, $y = t^2$, $u = t^3$, zatem z (c) mamy $t = C_1$ i $t = C_2$, a więc

$$C_2 - C_1 = 0,$$

czyli

$$\frac{u}{x^2} - \frac{y}{x} = 0$$

lub

$$u = xy$$

jest szukanym rozwiązaniem.

Zadania

Znaleźć rozwiązanie ogólne równania:

1. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z^2 y\frac{\partial u}{\partial z} = 0$
2. $\frac{\partial u}{\partial z} - (y+2z)\frac{\partial u}{\partial y} + (3y+4z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$
3. $(mz-ny)\frac{\partial u}{\partial x} + (nx-lz)\frac{\partial u}{\partial y} + (ly-mx)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$
4. $(x^3+3xy^2)\frac{\partial u}{\partial x} + 2y^3\frac{\partial u}{\partial y} + 2y^2 z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$
5. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + \left(z - \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$
6. $x(y^2-z^2)\frac{\partial u}{\partial x} - y(x^2+z^2)\frac{\partial u}{\partial y} + z(x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$
7. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 4y$
8. $\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x} + x^2\frac{\partial u}{\partial y} = u$
9. $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u-x}{3y^2}\frac{\partial u}{\partial y} = 1$
10. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u^2 y$

Znaleźć rozwiązanie spełniające zadane warunki początkowe:

11. $(z-y)^2\frac{\partial u}{\partial x} + z\frac{\partial u}{\partial y} + y\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u(0,y,z) = 2y(y-z)$
12. $(1+x^2)\frac{\partial u}{\partial x} + xy\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u(0,y) = y^2$
13. $y\frac{\partial u}{\partial x} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u(1,y,z) = \ln z - \frac{1}{y}$
14. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = u, \quad u(2,y,z) = \frac{1}{2}(y+z)$
15. $x\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u(1,y) = -y$

Znaleźć powierzchnię całkową przechodzącą przez zadaną krzywą:

16. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 4y, \quad x = t, \quad y = t^2, \quad u = 0$

17. $\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{u-x}{3y^2}\dfrac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad x = \sqrt{t}, \quad y = \sqrt[3]{t}, \quad u = 0$

18. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u^2 y, \quad x = t, \quad y = t^2, \quad u = 1$

Odpowiedzi

1. $u = G\left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{yz+1}{z}\right)$
2. $u = G(e^{-2x}(y+z), e^{-x}(3y+2z))$
3. $u = G(lx+my+nz, x^2+y^2+z^2)$
4. $u = G\left(\dfrac{z}{y}, y + \dfrac{y^3}{x^2}\right)$
5. $u = G\left(\dfrac{y}{x}, z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$
6. $u = G\left(x^2+y^2+z^2, \dfrac{yz}{x}\right)$
7. $G\left(\dfrac{y}{x}, 4y-u\right) = 0$
8. $G(x^3-y, 3x-\ln u) = 0$
9. $G(x-u, y^3+u^2-ux) = 0$
10. $G\left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{1}{u}+y\right) = 0$
11. $u = 2[y(y-z)+x]$
12. $u = \dfrac{y^2}{1+x^2}$
13. $u = \ln z - \dfrac{x}{y}$
14. $u = \dfrac{1}{2}(y+z)$
15. $u = \dfrac{y}{\ln x - 1}$
16. $u = \dfrac{4(x^2y-y^2)}{x^2}$
17. $u = x - \dfrac{y^3}{x}$
18. $u = \dfrac{x^2}{x^2+y^2-x^2y}$

Rozdział 5.

Równania o pochodnych cząstkowych liniowe rzędu drugiego

5.1. Klasyfikacja równań liniowych rzędu drugiego

Przedmiotem naszych rozważań będzie równanie

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} B_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + C(x)u = g(x) \tag{5.1}$$

gdzie: A_{ij}, B_j, C, g są określonymi w obszarze $D \subset R^n$ funkcjami rzeczywistymi ciągłymi.

Równaniu (5.1) odpowiada forma kwadratowa

$$Q(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j \tag{5.2}$$

W każdym punkcie $x \in D$ formę kwadratową (5.2) można za pomocą nieosobliwego przekształcenia afinicznego zmiennych $\lambda_i = \lambda_i(\xi_1, \dots, \xi_n)$ sprowadzić do postaci kanonicznej

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i^2,$$

gdzie α_i przyjmują wartości 1, -1, 0.

Definicja 5.1. *Jeżeli w punkcie $x \in D$:*

1° *wszystkie α_i są równe* 1 (*lub wszystkie równają się* -1), *to równanie* (5.1) *nazywamy eliptycznym w tym punkcie;*

2° *jeden ze współczynników jest ujemny a pozostałe dodatnie* (*lub na odwrót*), *to równanie* (5.1) *jest w punkcie $x \in D$ hiperboliczne;*

3° *przynajmniej jeden ze współczynników jest zerem, wówczas równanie* (5.1) *nazywamy parabolicznym.*

Mówimy, że równanie (5.1) w obszarze D jest typu eliptycznego, hiperbolicznego lub parabolicznego, jeżeli jest ono w każdym punkcie tego obszaru odpowiednio eliptyczne, hiperboliczne lub paraboliczne.

W przypadku $n = 2$, równanie (5.1) można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + F(x,y)u = g(x) \end{aligned} \tag{5.1a}$$

Odpowiadająca mu forma kwadratowa jest następująca

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = A\lambda_1^2 + 2B\lambda_1\lambda_2 + C\lambda_2^2.$$

Niech

$$\delta = AC - B^2.$$

Na podstawie definicji 5.1, jeżeli:
1° $\delta < 0$, to równanie (5.1a) jest hiperboliczne;
2° $\delta = 0$, to równanie (5.1a) jest paraboliczne;
3° $\delta > 0$, to równanie (5.1a) jest eliptyczne.

5.2. Postać kanoniczna równania z dwiema zmiennymi niezależnymi

Metoda charakterystyk

Definicja 5.2. *Krzywą*

$$\varphi(x, y) = \text{const},$$

gdzie φ jest rozwiązaniem równania

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 0$$

nazywamy charakterystyką równania (5.1a).

Definicja 5.3. *Kierunek* $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ *określony przez równanie*

$$A(\mathrm{d}y)^2 - 2B\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + C(\mathrm{d}x)^2 = 0 \tag{5.3}$$

nazywamy kierunkiem charakterystycznym równania (5.1a).

Uwaga 5.1. Równanie (5.3) jest równaniem różniczkowym zwyczajnym krzywych charakterystycznych równania (5.1a).

Twierdzenie 5.1.

1° *Jeżeli $\delta < 0$, to równanie* (5.1a) *ma dwie rodziny charakterystyk rzeczywistych określonych równaniami*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{B \pm \sqrt{-\delta}}{A}, \quad gdy \quad A \neq 0,$$

lub

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{B \pm \sqrt{-\delta}}{C}, \quad gdy \quad C \neq 0.$$

2° *Jeżeli $\delta = 0$, to równanie* (5.1a) *ma jedną rodzinę charakterystyk, określoną równaniem*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{B}{A}, \quad gdy \quad A \neq 0,$$

lub

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{B}{C}, \quad gdy \quad C \neq 0.$$

3° *Jeżeli $\delta > 0$, to równanie* (5.1a) *charakterystyk rzeczywistych nie posiada.*

Wniosek 5.1. Równanie typu hiperbolicznego posiada dwie rodziny charakterystyk, parabolicznego — jedną, zaś równanie typu eliptycznego charakterystyk rzeczywistych nie posiada.

Twierdzenie 5.2. *Załóżmy, że równanie* (5.1a) *jest w obszarze $D \subset R^2$ typu* a) *hiperbolicznego,* b) *parabolicznego,* c) *eliptycznego. Wówczas istnieje odwzorowanie*

$$D \ni (x, y) \to (\xi, \eta) = (f(x, y),\ g(x, y)) \in D_1,$$

takie, że równanie (5.1a) *przyjmie postać:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \cdots = 0 \quad w\ przypadku\ \text{a)},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \cdots = 0 \quad w\ przypadku\ \text{b)}$$

oraz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \cdots = 0 \quad w\ przypadku\ \text{c)},$$

gdzie kropki oznaczają składniki nie zawierające pochodnych rzędu drugiego niewiadomej funkcji.

Rozważmy przypadek a), tzn. załóżmy, że równanie (5.1a) jest typu hiperbolicznego.

Niech

$$f(x,y) = C_1 \qquad \text{oraz} \qquad g(x,y) = C_2$$

będą krzywymi charakterystycznymi naszego równania. Wprowadźmy nowe zmienne

$$\begin{cases} \xi_1 = f(x,y) \\ \eta_1 = g(x,y) \end{cases}.$$

Wiadomo na podstawie definicji krzywych charakterystycznych, że:

$$\begin{aligned} A\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \xi_1}{\partial x}\frac{\partial \xi_1}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial y}\right)^2 = 0 \\ A\left(\frac{\partial \eta_1}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \eta_1}{\partial x}\frac{\partial \eta_1}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta_1}{\partial y}\right)^2 = 0 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Ponadto można obliczyć, że:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2}\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \eta_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial x}\frac{\partial \eta_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta_1^2}\left(\frac{\partial \eta_1}{\partial x}\right)^2 + r_1, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2}\frac{\partial \xi_1}{\partial x}\frac{\partial \xi_1}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \eta_1}\left[\frac{\partial \xi_1}{\partial x}\frac{\partial \eta_1}{\partial y} + \frac{\partial \eta_1}{\partial x}\frac{\partial \xi_1}{\partial y}\right] + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta_1^2}\frac{\partial \eta_1}{\partial x}\frac{\partial \eta_1}{\partial y} + r_2, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2}\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \eta_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial y}\frac{\partial \eta_1}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta_1^2}\left(\frac{\partial \eta_1}{\partial y}\right)^2 + r_3, \end{aligned}$$

gdzie r_i oznaczają składniki nie zawierające pochodnych rzędu drugiego.

Wstawiając powyższe związki do równania (5.1a), z uwzględnieniem (5.4), po pewnych przekształceniach otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} + \cdots = 0 \tag{5.5}$$

Z kolei w równaniu (5.5) wprowadzamy nowe zmienne, jak poniżej:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_1 + \eta_1, \\ \eta &= \xi_1 - \eta_1, \end{aligned}$$

wówczas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Równanie (5.5) przyjmie ostatecznie postać

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \cdots = 0.$$

Dla równania typu parabolicznego wystarczy przyjąć

$$\begin{cases} \xi = f(x,y) \\ \eta = g(x,y) \end{cases},$$

gdzie $f(x,y) = C$ jest krzywą charakterystyczną równania (5.1a), natomiast g jest dowolną funkcją zmiennych x, y, niezależną z f.

Równanie typu eliptycznego posiada jedynie charakterystyki zespolone.

Niech $f(x,y) + ig(x,y) = C$ będzie charakterystyką równania (5.1a), wówczas przyjmując

$$\begin{cases} \xi_1 = f(x,y) \\ \eta_1 = g(x,y) \end{cases}$$

sprowadzimy równanie (5.1a) do postaci c).

Dowody w przypadkach b) i c) są analogiczne, jak w przypadku a).

Przykład 5.1. Sprowadzić do postaci kanonicznej równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{a}$$

Zauważmy, że w rozważanym równaniu $A = 1$, $B = -1$, $C = -3$, a więc $\delta = AC - B^2 = -4 < 0$. Zatem równanie jest typu hiperbolicznego.

Równanie charakterystyk ma postać

$$(\mathrm{d}y)^2 + 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 3(\mathrm{d}x)^2 = 0$$

lub

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 3 = 0,$$

stąd

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -3 \quad \vee \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1,$$

zatem

$$y + 3x = C_1, \qquad y - x = C_2$$

są szukanymi charakterystykami.

Wprowadzamy nowe zmienne

$$\begin{cases} \xi_1 = y + 3x \\ \eta_1 = y - x \end{cases},$$

wobec tego:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi_1} 3 - \frac{\partial u}{\partial \eta_1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u}{\partial \eta_1},$$

oraz:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta_1^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 3\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta_1^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta_1^2}.$$

Wstawiając powyższe związki do równania (a), uzyskujemy

$$-16\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} + \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u}{\partial \eta_1} = 0.$$

Z kolei, niech

$$\begin{cases} \xi = \xi_1 + \eta_1 \\ \eta = \xi_1 - \eta_1 \end{cases},$$

zatem:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_1} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta_1} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Tak więc równanie (a) przyjmie postać

$$-16\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) + 2\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$$

lub

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{1}{8}\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

Jest to postać kanoniczna równania (a).

Przykład 5.2. Sprowadzić do postaci kanonicznej równanie

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{a}$$

Zauważmy, że $A = x^2$, $B = xy$, $C = y^2$, zatem $\delta = 0$. Rozważane równanie jest typu parabolicznego dla wszystkich $(x, y) \in R^2$.

Równanie charakterystyk jest następujące

$$x^2(\mathrm{d}y)^2 - 2xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + y^2(\mathrm{d}x)^2 = 0$$

lub

$$x^2\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - 2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y^2 = 0,$$

skąd

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x},$$

a więc

$$y = Cx,$$

zatem jedyna krzywa charakterystyczna ma równanie $\dfrac{y}{x} = C$.

Niech

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{y}{x} \\ \eta = y \end{cases},$$

wobec tego:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\left(-\frac{y}{x^2}\right),\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\partial u}{\partial \eta},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{y^2}{x^4} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{2y}{x^3},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(-\frac{y}{x^3}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left(-\frac{y}{x^2}\right) + \frac{\partial u}{\partial \xi}\left(-\frac{1}{x^2}\right),\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{1}{x^2}\right) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.
\end{aligned}$$

Wstawiając do (a) uzyskujemy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\eta^2 = 0$$

lub

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

Jest to postać kanoniczna równania (a).

Przykład 5.3. Sprowadzić do postaci kanonicznej równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{a}$$

Jest to równanie typu eliptycznego, bowiem $A = 1$, $B = 1$, $C = 5$, a więc $\delta = 4 > 0$. Równanie charakterystyk ma postać

$$(\mathrm{d}y)^2 - 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 5(\mathrm{d}x)^2 = 0,$$

skąd

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 - 2i \quad \text{lub} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 + 2i,$$

po scałkowaniu, mamy

$$y - x + 2ix = C_1, \qquad y - x - 2ix = C_2.$$

Podstawmy więc

$$\begin{cases} \xi = y - x \\ \eta = 2x \end{cases},$$

wobec tego:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial \xi} + 2\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}.$$

Wstawiając do (a) mamy

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$$

lub

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

Uzyskaliśmy postać kanoniczną równania (a).

Przykład 5.4. Sprowadzić do postaci kanonicznej a następnie rozwiązać równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{a}$$

Jest to równanie typu hiperbolicznego, ponieważ

$$\delta = -\cos^2 x - \sin^2 x = -1 < 0.$$

Równanie charakterystyk ma postać

$$(\mathrm{d}y)^2 + 2\sin x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \cos^2 x (\mathrm{d}x)^2 = 0,$$

skąd:

$$x + y - \cos x = C_1, \qquad x - y + \cos x = C_2.$$

Wprowadźmy nowe zmienne

$$\begin{cases} \xi = x + y - \cos x \\ \eta = x - y + \cos x \end{cases}.$$

Równanie (a) przyjmie postać

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

skąd po dwukrotnym scałkowaniu

$$u = F(\xi) + G(\eta),$$

gdzie F, G są dowolnymi funkcjami różniczkowalnymi jednej zmiennej rzeczywistej. Zatem ostatecznie

$$u(x, y) = F(x + y - \cos x) + G(x - y + \cos x).$$

Powyższy związek określa rozwiązanie ogólne równania (a).

Przykład 5.5. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania w obszarze nie zawierającym osi układu współrzędnych

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{a}$$

Ponieważ

$$\delta = x^2y^2 - x^2y^2 = 0,$$

więc jest to równanie typu parabolicznego. Równanie charakterystyk ma postać

$$x^2(\mathrm{d}y)^2 + 2xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + y^2(\mathrm{d}x)^2 = 0,$$

skąd $xy = C$ jest jedyną krzywą charakterystyczną.

Wprowadzamy nowe zmienne

$$\begin{cases} \xi = xy \\ \eta = y \end{cases}.$$

Równanie (a) przyjmie postać

$$\eta\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

lub

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\eta\right) = 0,$$

skąd po scałkowaniu

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}\eta = F(\xi), \tag{b}$$

gdzie F jest dowolną (dostatecznie regularną) funkcją zmiennej ξ.

Równanie (b) rozwiązujemy tak, jak równanie zwyczajne, pamiętając jedynie, że u jest funkcją dwóch zmiennych. Jest to równanie o rozdzielonych zmiennych, jego rozwiązaniem jest funkcja

$$u(\xi, \eta) = F(\xi)\ln|\eta| + G(\xi),$$

skąd, wracając do starych zmiennych, mamy rozwiązanie równania (a)

$$u(x, y) = F(xy)\ln|y| + G(xy).$$

Metoda zastosowana w przykładach 5.4 i 5.5 nosi nazwę metody charakterystyk.

5.3. Zagadnienia graniczne

Niech S będzie powierzchnią o równaniu $G(x) = 0$, gdzie G jest funkcją klasy C^1 w pewnym obszarze D zawierającym tę powierzchnię oraz $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$. Rozważmy dla równania (5.1) i powierzchni S następujące odwzorowanie

$$A[G(x)] = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial G}{\partial x_i}\frac{\partial G}{\partial x_j}.$$

Definicja 5.4. *Powiemy, że powierzchnia S jest w punkcie $x_0 \in S$ zorientowana czasowo (przestrzennie) względem równania* (5.1), *jeżeli*

$$A[G(x_0)] > 0 \qquad (A[G(x_0)] < 0).$$

Jeżeli $A[G(x_0)] = 0$, to mówimy, że S ma orientację charakterystyczną w punkcie x_0.

Uwaga 5.2. Wszystkie powierzchnie są względem równania eliptycznego zorientowane czasowo.

Uwaga 5.3. Względem równania parabolicznego wszystkie powierzchnie mają orientację czasową lub charakterystyczną.

Poszukujemy (w obszarze D) rozwiązania równania (5.1) spełniającego w punktach powierzchni S równość

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + \beta(x) u - \gamma(x) = 0 \tag{5.6}$$

gdzie: α_k, β, γ są funkcjami określonymi na powierzchni S.

Warunek (5.6) nazywamy warunkiem granicznym postawionym na powierzchni S, zaś problem szukania rozwiązania równania (5.1) w D, spełniającego (5.6) na S — zagadnieniem graficznym.

Definicja 5.5. *Powiemy, że rozwiązanie zagadnienia graficznego* (5.1), (5.6) *zależy w sposób ciągły od warunku graficznego, jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ będzie istniało $\delta > 0$, takie że, jeżeli*

$$\sup_{x \in S} \left| \alpha_k^{(1)}(x) - \alpha_k^{(2)}(x) \right| < \delta, \qquad k = 1, \dots, n$$

oraz

$$\sup_{x \in S} \left| \beta^{(1)}(x) - \beta^{(2)}(x) \right| < \delta \quad i \quad \sup_{x \in S} \left| \gamma^{(1)}(x) - \gamma^{(2)}(x) \right| < \delta,$$

to

$$\sup_{x \in D} \left| u^{(1)}(x) - u^{(2)}(x) \right| < \varepsilon,$$

gdzie $u^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ jest rozwiązaniem problemu granicznego (5.1), (5.6a)

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(i)}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + \beta^{(i)}(x) u - \gamma(x) = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{5.6a}$$

Oznacza to, że małym zmianom warunków granicznych odpowiadają małe zmiany rozwiązań.

DEFINICJA 5.6. *Powiemy, że zagadnienie graniczne jest w danej klasie funkcji poprawnie postawione, jeżeli:*

1° *Posiada rozwiązanie spełniające warunki graniczne, w których występują funkcje danej klasy.*

2° *Jest w tej klasie funkcji rozwiązalne jednoznacznie.*

3° *W tej klasie funkcji rozwiązanie zależy w sposób ciągły od warunków granicznych.*

Rodzaje zagadnień granicznych

DEFINICJA 5.7. *Warunki graniczne postawione na powierzchni zorientowanej przestrzennie noszą nazwę warunków początkowych, zaś warunki postawione na powierzchni zorientowanej czasowo nazywają się warunkami brzegowymi.*

Zagadnienie graniczne z warunkami początkowymi nazywamy zagadnieniem początkowym, natomiast zagadnienie z warunkami brzegowymi — zagadnieniem brzegowym. Zagadnienie graniczne, w którym występują zarówno warunki brzegowe, jak i początkowe nosi nazwę zagadnienia mieszanego.

Rozważmy problem początkowy (5.1), (5.7):

$$\begin{aligned} u(x)\Big|_{x\in S} &= \varphi(x) \\ \frac{\partial u(x)}{\partial l}\Big|_{x\in S} &= \psi(x) \end{aligned} \tag{5.7}$$

gdzie: l jest dowolnym kierunkiem niestycznym do S, zaś funkcje φ, ψ (z warunków (5.7)) oraz A_{ij}, B_j, C, g (z równania (5.1)) są analityczne, ponadto S nie zawiera punktów charakterystycznych równania (5.1), wówczas

TWIERDZENIE 5.3. (CAUCHY'EGO–KOWALEWSKIEJ). *Każdemu punktowi $x_0 \in S$ odpowiada otoczenie $U_{x_0} \subset R^n$, w którym problem początkowy (5.1), (5.7) ma dokładnie jedno rozwiązanie w klasie funkcji analitycznych.*

Przykład 5.6. Znaleźć rozwiązanie równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{a}$$

spełniające warunki początkowe

$$u(x,0) = 3x^2, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0 \tag{b}$$

Równanie charakterystyk dla równania (a) ma postać

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 3 = 0,$$

skąd

$$y = 3x + C_1 \quad \text{lub} \quad y = -x + C_2.$$

Wprowadzamy nowe zmienne

$$\begin{cases} \xi = y - 3x \\ \eta = y + x \end{cases}.$$

Równanie (a) przyjmie postać

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

skąd

$$u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta).$$

Wracając do zmiennych x i y, mamy

$$u(x, y) = F(y - 3x) + G(y + x) \tag{c}$$

Powyższy wzór stanowi rozwiązanie ogólne równania (a).

Z warunków początkowych mamy

$$\begin{cases} 3x^2 = F(-3x) + G(x) \\ \quad 0 = F'(-3x) + G'(x) \end{cases}$$

lub różniczkując pierwsze z równań

$$\begin{cases} 6x = -3F'(-3x) + G'(x) \\ \quad 0 = F'(-3x) + G'(x) \end{cases},$$

skąd:

$$\begin{cases} F'(-3x) = -\dfrac{3}{2}x \\ G'(x) = \dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

Wprowadzając w pierwszym z równań nową zmienną $z = -3x$, po scałkowaniu obu równań mamy:

$$F(z) = \frac{1}{4}z^2,$$

$$G(z) = \frac{3}{4}x^2.$$

Wstawiając do (c) uzyskujemy rozwiązanie problemu (a), (b)

$$u(x, y) = \frac{1}{4}(y - 3x)^2 + \frac{3}{4}(y + x)^2.$$

Przykłady zagadnień granicznych postawionych poprawnie

Równanie falowe

Niech $\Box$ oznacza operator różniczkowy taki, że

$$\Box u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Równanie

$$\Box u = 0 \tag{5.8}$$

nazywa się równaniem falowym. W przypadku $n = 1$ jest to równanie fali płaskiej, dla $n = 2$ — równanie drgań membrany, a dla $n = 3$ — równanie fal sferycznych.

Warunkami granicznymi dla równania (5.8) w obszarze D dla $t \in (0, T)$ może być zespół warunków początkowych i brzegowych, np.:

— warunki początkowe Cauchy'ego:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \quad \text{dla} \quad x \in D \tag{5.9}$$

— warunki brzegowe:

$$\text{I rodzaju:} \qquad u(x,t)\Big|_{x\in\partial D} = \alpha(x,t),$$

$$\text{II rodzaju:} \qquad \frac{\partial u}{\partial n}(x,t)\Big|_{x\in\partial D} = \beta(x,t),$$

$$\text{III rodzaju} \qquad \left[\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) + \gamma(x,y)u(x,t)\right]\Bigg|_{x\in\partial D} = \delta(x,t),$$

gdzie: α, β, γ, δ, φ, ψ są zadanymi funkcjami dostatecznie regularnymi, a n wektorem prostopadłym do ∂D, $t \in (0, T)$.

Rozwiązanie $u(x, t)$ równania (5.8) spełniające warunki początkowe (5.9) oraz jeden z warunków brzegowych, nazywa się rozwiązaniem odpowiednio pierwszego, drugiego lub trzeciego zagadnienia mieszanego.

Równanie Laplace'a

Równanie

$$\Delta u = 0, \quad \text{gdzie} \quad \Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \tag{5.10}$$

nosi nazwę równania Laplace'a.

1. Zagadnienie Dirichleta polega na wyznaczeniu rozwiązania równania (5.10), spełniającego warunek brzegowy

$$u(x)\big|_{x\in\partial D} = a(x),$$

gdzie a to zadana funkcja ciągła.

2. Zagadnienie polegające na wyznaczeniu rozwiązania równania (5.10), spełniającego warunek

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n}\bigg|_{x\in\partial D} = b(x),$$

gdzie b to zadana funkcja ciągła, nosi nazwę zagadnienia Neumanna.

3. Funkcję $u(x)$ dostatecznie regularną spełniającą w D równanie (5.10) oraz na ∂D warunek

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u\right)\bigg|_{x\in\partial D} = c(x),$$

gdzie: σ, c to zadane funkcje ciągłe ($\sigma \geqslant 0$), nazywa się rozwiązaniem zagadnienia Fouriera.

Równanie przewodnictwa

Rozważmy zagadnienia graniczne dla równania

$$\Delta u - \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{5.11}$$

Zagadnienie początkowe Cauchy'ego polega na znalezieniu w obszarze $D\times[0,T]$ rozwiązania równania (5.11), spełniającego warunek początkowy

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in D,$$

gdzie φ to zadana funkcja.

Dla równania przewodnictwa określa się również warunki brzegowe I, II i III rodzaju (tak jak dla równania falowego), które wraz z warunkiem początkowym służą do formułowania zagadnień mieszanych, odpowiednio I, II i III rodzaju.

Przykłady zagadnień granicznych postawionych niepoprawnie

Przykład 5.7. Oznaczmy przez u_n rozwiązanie następującego zagadnienia początkowego:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{a}$$

$$\begin{cases} u(x,0)=0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0)=\dfrac{\pi}{n}\sin n\pi x \end{cases} \tag{b}$$

dla $x \in [0,1]$ i $y \in [0,1]$

$$u_n(x,y) = \frac{1}{n^2}\sin n\pi x \sinh n\pi y.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial y}(x,0) = 0,$$

natomiast dla dowolnego n, istnieje takie $x \in]0,1[$, że $\sin n\pi x = 1$, skąd wynika, że gdy $y_0 > 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[0,1]} |u_n(x,y_0)| = +\infty$.

Niech $u = 0$ będzie rozwiązaniem problemu (a), (b) przy $n \to \infty$, tzn. przy warunkach początkowych

$$u(x,0) = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0.$$

Z powyższych rozważań wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{\partial u_n}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) \right| = 0,$$

natomiast

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x,y\in[0,1]} |u_n(x,y) - u(x,y)| \neq 0.$$

Dowodzi to braku ciągłej zależności rozwiązań od warunków początkowych.

A więc problem Cauchy'ego dla równania Laplace'a nie jest postawiony poprawnie.

Przykład 5.8. Rozważmy następujące zagadnienie Cauchy'ego:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(x,y) \tag{a}$$

$$\begin{cases} u(x,0)=\varphi(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0)=\psi(x) \end{cases} \tag{b}$$

gdzie: f, φ, ψ są funkcjami ciągłymi w kole $K(0,r)$ o środku w początku układu i promieniu r.

Scałkujemy równanie (a) względem zmiennej x. Wówczas

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int\limits_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}x + C(y) \tag{c}$$

a w szczególności

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \int\limits_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}x\Big|_{y=0} + C(0) = \psi(x),$$

skąd wynika, że warunkiem istnienia rozwiązania jest, by

$$f(x,0) = \psi'(x).$$

Całkując (c) względem y, mamy

$$u(x,y) = \int\limits_0^y \left[\int\limits_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y + g(y) \tag{d}$$

gdzie g jest dowolną funkcją różniczkowalną.

Z warunku (b) wynika, że

$$u(x,0) = \int\limits_0^y \left[\int\limits_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y\Big|_{y=0} + g(0) = \varphi(x) \tag{e}$$

Odejmując stronami (d) i (e), mamy

$$u(x,y) - \varphi(x) = \int\limits_0^y \left[\int\limits_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y + g(y) - g(0),$$

skąd ostatecznie

$$u(x,y) = \varphi(x) + \int\limits_0^y \left[\int\limits_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y + \overline{g}(y),$$

gdzie $\overline{g}$ jest dowolną funkcją różniczkowalną i taką, że $\overline{g}(0) = 0$ i $\overline{g}'(0) = \psi(0)$.

Jak widać, nie ma jednoznaczności rozwiązań. Przyczyną tego jest fakt, że problem początkowy został zadany na charakterystyce $y = 0$ równania (a).

Zadania

1. Znaleźć rozwiązanie równania $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ spełniające warunki graniczne: $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u(0, y) = \psi(y)$, gdzie φ, ψ są funkcjami różniczkowalnymi w przedziale $[0, 1]$, spełniającymi warunek zgodności $\varphi(0) = \psi(0)$.
   Udowodnić, że otrzymane rozwiązanie zależy w sposób ciągły od warunków granicznych.

Sprowadzić do postaci kanonicznej równania:

2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} + 6\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$
3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + 2\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$
4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha\dfrac{\partial u}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial u}{\partial y} + cu = 0$
5. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\cos x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (3 + \sin^2 x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$
6. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2x\dfrac{\partial u}{\partial x} + 4y\dfrac{\partial u}{\partial y} + 16x^4 u = 0$
7. $\sin^2 x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y\sin x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Stosując metodę charakterystyk znaleźć rozwiązanie ogólne równania:

8. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$
9. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
10. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
11. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial u}{\partial x} - 3y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$
12. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$
13. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
14. $4y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - e^{2x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 4y^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{e^{2x}}{y}\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

15. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

Rozwiązać problem graniczny (a), (b):

16. (a) $4y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(1-y^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{2y}{1+y^2}\left(2\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$

    (b) $u(x,0) = \varphi_0(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \varphi_1(x)$

17. (a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\cos x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \sin^2 x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

    (b) $u(x,\sin x) = \varphi_0(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,\sin x) = \varphi_1(x)$

18. (a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

    (b) $u(x,y) = \varphi(x)$ na charakterystyce $x - y = 0$,
    $u(x,y) = \psi(x)$ na charakterystyce $5x - y = 0$

19. (a) $(1+x^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (1+y^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

    (b) $u(x,0) = \varphi_0(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \varphi_1(x)$

20. (a) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - 3y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

    (b) $u(x,1) = \varphi_0(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1) = \varphi_1(x)$

Odpowiedzi

1. $u(x,y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0)$

   Wskazówka: $\sup\limits_{(x,y)\in[0,1]\times[0,1]} |u_1(x,y) - u(x,y)| \leqslant$

   $$\leqslant \sup_{x\in[0,1]} |\varphi_1(x) - \varphi(x) - (\varphi_1(0) - \varphi(0))| + \sup_{y\in[0,1]} |\psi_1(y) - \psi(y)|$$

2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad \xi = x + y, \quad \eta = 3x - y$

3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \dfrac{\partial u}{\partial\eta} = 0, \quad \xi = 2x - y, \quad \eta = x$

4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + (\alpha+\beta)\dfrac{\partial u}{\partial\xi} + \beta\dfrac{\partial u}{\partial\eta} + cu = 0, \quad \xi = x + y, \quad \eta = y$

5. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \dfrac{\eta-\xi}{32}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\xi} - \dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0, \quad \xi = 2x + \sin x + y, \quad \eta = 2x - \sin x - y$

6. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \dfrac{1}{4\eta}\dfrac{\partial u}{\partial\xi} - \dfrac{1}{\xi}\dfrac{\partial u}{\partial\eta} + u = 0, \quad \xi = xy, \quad \eta = \dfrac{x^3}{y}$

7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} - \dfrac{2\xi}{\xi^2+\eta^2}\dfrac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad \xi = y\,\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}, \quad \eta = y$

8. $u(x,y) = \sqrt{\dfrac{x}{y}}F(xy) + G\left(\dfrac{y}{x}\right)$ dla $x \neq 0$, $y \neq 0$

9. $u(x,y) = \dfrac{1}{x}\left[F(x-y) + G(x+y)\right]$

   Wskazówka: wprowadzić nową funkcję $v = xu$.

10. $u(x,y) = F(x+y) + G(3x-y)$

11. $u(x,y) = F\left(\dfrac{x^3}{y}\right) + G(xy)$ dla $x \neq 0$, $y \neq 0$

12. $u(x,y) = F(2x-y) + G(y)$

13. $u(x,y) = yF\left(\dfrac{y}{x}\right) + G\left(\dfrac{y}{x}\right)$

14. $u(x,y) = F(e^x + y^2) + G(y^2 - e^x)$ dla $y \neq 0$

15. $u(x,y) = F(xy)\ln|y| + G(xy)$

16. $u(x,y) = \varphi_0\left(x - \dfrac{2}{3}y^3\right) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-\frac{2}{3}y^3}^{x+2y} \varphi_1(z)\,\mathrm{d}z$

17. $u(x,y) = \dfrac{1}{2}\left[\varphi_0(x - \sin x + y) + \varphi_0(x + \sin x - y)\right] + \displaystyle\int_{x+\sin x-y}^{x-\sin x+y} \varphi_1(z)\,\mathrm{d}z$

18. $u(x,y) = \varphi\left(\dfrac{5x-y}{4}\right) + \psi\left(\dfrac{y-x}{4}\right) - \varphi(0)$

19. $u(x,y) = \dfrac{1}{2}\left[\varphi_0\left(\dfrac{\alpha^2-1}{2\alpha}\right) + \varphi_0\left(\dfrac{\beta^2-1}{2\beta}\right) + \displaystyle\int_\alpha^\beta \dfrac{1}{z}\varphi_1\left(\dfrac{z^2-1}{2z}\right)\mathrm{d}z\right],$

    gdzie $\alpha = \dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{y+\sqrt{y^2+1}}, \quad \beta = \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$

20. $u(x,y) = \dfrac{3}{4}\varphi_0\left(x\sqrt[3]{y}\right) + \dfrac{1}{4}y\varphi_0\left(\dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{3}{16}\sqrt[4]{x^3y}\displaystyle\int_{x\sqrt[3]{y}}^{\frac{x}{y}} \dfrac{1}{\sqrt[4]{z^7}}\left[\varphi_0(z) - 4\varphi_1(z)\right]\mathrm{d}z$

5.4. Równania typu hiperbolicznego

Zajmiemy się równaniem falowym (5.8) z warunkami początkowymi (5.9). Dla $n = 1$ równanie (5.8) jest równaniem fali płaskiej. Ma ono postać

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{5.8a}$$

zaś warunki początkowe (5.9) są jak poniżej:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \tag{5.9a}$$

Rozwiązanie problemu Cauchy'ego (5.8a), (5.9a) znajduje się metodą charakterystyk.

Z równania

$$(\mathrm{d}x)^2 - a^2(\mathrm{d}t)^2 = 0$$

uzyskujemy dwie charakterystyki:

$$x - at = C_1, \quad x + at = C_2.$$

Rozwiązaniem problemu (5.8a), (5.9a) jest funkcja

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x-at) + \psi(x+at)) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(z)\,\mathrm{d}z \tag{5.12}$$

Wzór (5.12) nosi nazwę wzoru d'Alemberta i określa wychylenie struny nieograniczonej, w punkcie x i chwili t, przy zadanych wychyleniach początkowych $u(x,0)$ i prędkościach początkowych $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$.

Równanie (5.8) dla $n = 3$ nosi nazwę równania fal sferycznych i jest zazwyczaj zapisywane następująco

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0 \tag{5.8b}$$

zaś warunki (5.9) przyjmują postać

$$\begin{cases} u(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y,z,0) = \psi(x,y,z) \end{cases} \tag{5.9b}$$

gdzie $(x,y,z) \in R^3$.

Rozwiązanie problemu (5.8b), (5.9b) przedstawia wzór Kirchhoffa (5.13)

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\left[\iint\limits_{S_{at}} \frac{\psi(\xi,\eta,\zeta)}{t}\,\mathrm{d}S_{at} + \frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{at}} \frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{t}\,\mathrm{d}S_{at}\right] \tag{5.13}$$

gdzie S_{at} oznacza sferę o środku w punkcie (x, y, z) i promieniu at.

Dla $n = 2$ wyrażenie (5.8) jest równaniem drgań membrany. Problem początkowy (5.8), (5.9) w tym przypadku ma postać:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \tag{5.8c}$$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = \varphi(x, y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \psi(x, y) \end{cases} \tag{5.9c}$$

gdzie $(x, y) \in R^2$. Rozwiązanie problemu (5.8c), (5.9c) uzyskuje się ze wzoru Kirchhoffa, tak zwaną metodą zstępowania (wstawiając $z = 0$ do (5.13)).

Uzyskany w ten sposób wzór nosi nazwę wzoru Poissona i jest następujący

$$\begin{aligned} u(x, y, t) = {} & \frac{1}{2\pi a} \iint\limits_{K_{at}} \frac{\psi(\xi, \eta)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} + \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2\pi a} \iint\limits_{K_{at}} \frac{\varphi(\xi, \eta)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} \right] \end{aligned} \tag{5.14}$$

gdzie K_{at} jest kołem o środku w punkcie (x, y) i promieniu at.

Wzór Kirchhoffa (5.13) można zapisać w formie wygodniejszej w użyciu. Mianowicie, wprowadzając następującą parametryzację strefy S_{at}

$$\begin{cases} \xi = x + at \cos\varphi \sin\theta, & \varphi \in [0, 2\pi] \\ \eta = y + at \sin\varphi \sin\theta, & \theta \in [0, \pi] \\ \zeta = z + at \cos\theta \end{cases}$$

a następnie korzystając z definicji całki powierzchniowej nieskierowanej otrzymujemy

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) = {} & \frac{t}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\pi} \psi(\xi, \eta, \zeta) \sin\theta\, \mathrm{d}\theta + \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{t}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\pi} \varphi(\xi, \eta, \zeta) \sin\theta\, \mathrm{d}\theta \right] \end{aligned} \tag{5.13a}$$

przy czym w miejsce ξ, η, ζ należy wstawić odpowiednie wartości z parametryzacji strefy S_{at}.

Równanie falowe niejednorodne

Obecnie zajmiemy się rozwiązywaniem problemu początkowego dla równania falowego niejednorodnego

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g(x,t) \tag{5.15}$$

Niech

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{5.15a}$$

będzie równaniem jednorodnym stowarzyszonym z (5.15).

Szukamy rozwiązania problemu (5.15), (5.9). W tym celu rozważmy następujące zagadnienia początkowe:

$$\begin{cases} u(x,\tau) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,\tau) = -a^2 g(x,\tau) \end{cases} \tag{5.16}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases} \tag{5.17}$$

1. Szukamy rozwiązania $\overline{\overline{u}}(x,t)$ problemu (5.15a), (5.9) (patrz: wzór d'Alemberta dla $n=1$, wzór Poissona dla $n=2$, wzór Kirchhoffa dla $n=3$).

2. Rozwiązujemy problem początkowy (5.15a), (5.16) wstawiając $t-\tau$ w miejsce t, do odpowiedniego wzoru (jak powyżej). Niech $\omega(x,t,\tau)$ oznacza rozwiązanie tego problemu.

3. Funkcja

$$\overline{u}(x,t) = \int_0^t \omega(x,t,\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

stanowi rozwiązanie problemu (5.15), (5.17).

Rozwiązanie problemu początkowego (5.15), (5.9) jest sumą $\overline{u}$ i $\overline{\overline{u}}$

$$u(x,t) = \overline{u}(x,t) + \overline{\overline{u}}(x,t).$$

Przykład 5.9. Znaleźć rozwiązanie równania niejednorodnego fali płaskiej

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{t-x}{a^2} \tag{a}$$

spełniające warunki początkowe:

$$u(x,0) = 2x, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -5x \tag{b}$$

Niech

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{a'}$$

będzie równaniem jednorodnym stowarzyszonym z (a). Utwórzmy warunki dodatkowe:

$$u(x,\tau) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau) = x - \tau \tag{c}$$

oraz

$$u(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \tag{d}$$

Zgodnie ze wzorem d'Alemberta rozwiązanie $\overline{\overline{u}}$, problemu (a'), (b) jest postaci

$$\overline{\overline{u}}(x,t) = \frac{1}{2}\left[2(x-at) + 2(x+at)\right] + \frac{1}{a}\int\limits_{x-at}^{x+at} (-5z)\,\mathrm{d}z$$

lub dokładniej

$$\overline{\overline{u}}(x,t) = x(2-5t).$$

Przejdźmy do rozwiązania problemu (a'), (c).

Zgodnie ze wzorem d'Alemberta wstawiając w miejsce t wartość $(t-\tau)$, mamy

$$\omega(x,t,\tau) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} (z-\tau)\,\mathrm{d}z,$$

skąd

$$\omega(x,t,\tau) = (t-\tau)(x-\tau),$$

zatem rozwiązanie $\overline{u}$ problemu (a), (d) jest następujące

$$\overline{u}(x,t) = \int\limits_0^t \omega(x,t,\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

czyli

$$\overline{u}(x,t) = \frac{1}{2}t^2\left(x - \frac{t}{3}\right).$$

Tak więc rozwiązanie problemu (a), (b) ma postać

$$u(x,t) = \frac{1}{2}t^2\left(x - \frac{t}{3}\right) + x(2-5t).$$

Przykład 5.10. Znaleźć rozwiązanie równania niejednorodnego fal sferycznych

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{y - x - zt}{a^2} \tag{a}$$

spełniające warunki początkowe:

$$\begin{cases} u(x,y,z,0) = x^2 - y - z \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,0) = x + y + z \end{cases} \tag{b}$$

Równanie jednorodne stowarzyszone z (a) ma postać

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{a'}$$

Utwórzmy warunki dodatkowe:

$$\begin{cases} u(x,y,z,\tau) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,\tau) = x - y + z\tau \end{cases} \tag{c}$$

$$\begin{cases} u(x,y,z,0) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,0) = 0 \end{cases} \tag{d}$$

Szukamy rozwiązania problemu (a'), (b). Korzystając ze wzoru Kirchhoffa w postaci (5.13a) mamy

$$\overline{\overline{u}}(x,y,z,t) = \frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} (\xi + \eta + \zeta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta + \\ + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} (\xi^2 - \eta - \zeta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right].$$

Wstawiając w miejsce zmiennych ξ, η, ζ wartości z parametryzacji, tzn.

$$\begin{cases} \xi = x + at\cos\varphi\sin\theta \\ \eta = y + at\sin\varphi\sin\theta \\ \zeta = z + at\cos\theta \end{cases}$$

a następnie całkując otrzymujemy

$$\overline{\overline{u}}(x,y,z,t) = (x + y + z)t + x^2 - y - z + a^2t^2.$$

Przejdźmy do rozwiązania problemu (a'), (c). Na podstawie wzoru (5.13a), po wstawieniu w miejsce t wartości $(t - \tau)$, mamy

$$\omega(x,y,z,t,\tau) = \frac{t-\tau}{4\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} [\xi - \eta + \zeta\tau]\sin\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

gdzie:

$$
\begin{aligned}
\xi &= x + a(t-\tau)\cos\varphi\sin\theta,\\
\eta &= y + a(t-\tau)\sin\varphi\sin\theta,\\
\zeta &= z + a(t-\tau)\cos\theta.
\end{aligned}
$$

Po scałkowaniu

$$\omega(x,y,z,t,\tau) = (x-y+z\tau)(t-\tau).$$

Tak więc rozwiązanie $\overline{u}(x,y,z,t)$ problemu (a), (d) ma postać

$$\overline{u}(x,y,z,t) = \int\limits_0^t (x-y+z\tau)(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

lub po obliczeniu całki

$$\overline{u}(x,y,z,t) = \frac{1}{2}\left[(x-y)t^2 + \frac{1}{3}zt^3\right].$$

Rozwiązaniem problemu (a), (b) jest funkcja

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{2}\left[(x-y)t^2 + \frac{1}{3}zt^3\right] + (x+y+z)t + x^2 - y - z + a^2t^2,$$

która jest sumą $\overline{u} + \overline{\overline{u}}$.

Przykład 5.11. Znaleźć rozwiązanie równania niejednorodnego fal cylindrycznych

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{2x+yt}{a^2} \tag{a}$$

spełniające warunki początkowe

$$\begin{cases} u(x,y,0) = x^2 + y^2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = x + y \end{cases} \tag{b}$$

Tworzymy warunki dodatkowe:

$$\begin{cases} u(x,y,\tau) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,\tau) = 2x + y\tau \end{cases} \tag{c}$$

$$\begin{cases} u(x,y,0) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = 0 \end{cases} \tag{d}$$

Niech

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \tag{a'}$$

będzie równaniem jednorodnym stowarzyszonym z (a).

Będziemy poszukiwać kolejno rozwiązań: $\overline{\overline{u}}$ problemu (a'), (b); ω problemu (a'), (c) oraz $\overline{u}$ problemu (a), (d).

Na podstawie wzoru Poissona

$$\overline{\overline{u}}(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{K_{at}}\frac{(\xi+\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{K_{at}}\frac{(\xi^2+\eta^2)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\right].$$

Wprowadzając współrzędne biegunowe

$$\begin{cases}\xi=x+\rho\cos\varphi, & \varphi\in[0,2\pi]\\ \eta=y+\rho\sin\varphi, & \rho\in[0,at]\end{cases}$$

otrzymujemy

$$\overline{\overline{u}}(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^{at}\frac{x+y+\rho(\cos\varphi+\sin\varphi)}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}\rho\,\mathrm{d}\rho+$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^{at}\frac{x^2+y^2+2\rho(x\cos\varphi+y\sin\varphi)+\rho^2}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}\rho\,\mathrm{d}\rho\right].$$

Po scałkowaniu

$$\overline{\overline{u}}(x,y,t)=(x+y)t+x^2+y^2+2a^2t^2.$$

Przejdźmy do szukania rozwiązania ω problemu (a'), (c).

Zgodnie ze wzorem Poissona mamy

$$\omega(x,y,t,\tau)=\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{K_{a(t-\tau)}}\frac{(2\xi+\eta\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}.$$

Wprowadzając współrzędne biegunowe, mamy

$$\omega(x,y,t,\tau)=\frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^{a(t\tau)}\frac{2x+\tau y+\rho(2\cos\varphi+\tau\sin\varphi)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-\rho^2}}.$$

Po scałkowaniu

$$\omega(x, y, t, \tau) = (t - \tau)(2x + \tau y),$$

zatem rozwiązanie $\overline{u}$ problemu (a), (d) ma postać

$$\overline{u}(x, y, t) = \int_0^t (t - \tau)(2x + \tau y)\, \mathrm{d}\tau$$

lub po obliczeniu całki

$$\overline{u}(x, y, t) = xt^2 + \frac{t^3 y}{6}.$$

Tak więc rozwiązanie problemu (a), (b), będące sumą $\overline{u} + \overline{\overline{u}}$ ma postać

$$u(x, y, t) = xt^2 + \frac{t^3 y}{6} + (x + y)t + x^2 + y^2 + 2a^2t^2.$$

Zadania

Znaleźć rozwiązanie równania (a) przy określonych warunkach początkowych (b):

1. (a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin 2t,$ (b) $\begin{cases} u(x, 0) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{cases}$

2. (a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^x,$ (b) $\begin{cases} u(x, 0) = \sin x \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = x + \sin x \end{cases}$

3. (a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 t,$ (b) $\begin{cases} u(x, 0) = x^3 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = x^2 \end{cases}$

4. (a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + x^2 - 2y^2,$ (b) $\begin{cases} u(x, y, 0) = e^x \cos y \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = e^y \sin x \end{cases}$

5. (a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + t\cos x,$ (b) $\begin{cases} u(x, y, 0) = y^2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \sin x \end{cases}$

6. (a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + x^2 + y^2,$ (b) $\begin{cases} u(x, y, 0) = x \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = y \end{cases}$

7. (a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\left(x^2 + y^2 + z^2\right),$

   (b) $\begin{cases} u(x, y, z, 0) = 2x^2y^2z^2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, 0) = 3xyz \end{cases}$

8. (a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 4xyz,$

(b) $\begin{cases} u(x,y,z,0) = x^2 + y^2 - z^2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,0) = 2 \end{cases}$

9. (a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + e^x \sin y \cos z,$

(b) $\begin{cases} u(x,y,z,0) = y^2 e^{x+z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,0) = e^{x+z} \cos y \end{cases}$

Odpowiedzi

1. $u(x,t) = \dfrac{1}{2}t - \dfrac{1}{4}\sin 2t$
2. $u(x,t) = xt + e^x(\cosh t - 1) + \sin x(\sin t + \cos t)$
3. $u(x,t) = x^3 + x^2 t + 27xt^2 + 3t^3 + \dfrac{1}{6}x^2 t^3 + \dfrac{3}{20}t^5$
4. $u(x,y,t) = e^x \cos y + te^y \sin x + \dfrac{t^2}{2}\left(x^2 - 3y^2\right) - \dfrac{a^2}{12}t^4$
5. $u(x,y,t) = y^2 + t^2 + t\cos x + \sin t(\sin x - \cos x)$
6. $u(x,y,t) = x + ty + \dfrac{1}{2}t^2(x^2 + y^2) + \dfrac{t^4}{3}$
7. $$u(x,y,z,t) = 2x^2y^2z^2 + 3txyz + t^2(x^2 + y^2 + z^2 + 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2) + \\ + t^4\left[\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right] + \frac{2}{15}t^6$$
8. $u(x,y,z,t) = x^2 + y^2 - z^2 + 2t + t^2(1 + 2xyz)$
9. $$u(x,y,z,t) = \frac{1}{a^2}\left(1 - \cos at\right) e^z \cos y \sin x + e^{x+z}\frac{1}{a}\sinh(at)\sin x + \\ + \frac{at}{2}\sinh(at\sqrt{2}) + y^2\cosh(at\sqrt{2})$$

5.5. Równania typu eliptycznego

Obecnie zajmiemy się rozwiązaniem zagadnienia Dirichleta dla równania Laplace'a (5.10), oraz dla równania Poissona

$$\Delta u = f(x) \tag{5.18}$$

Niech $R^n \supset D$ będzie obszarem, którego brzeg ∂D dany jest równaniem

$G(x) = 0.$

Załóżmy, że ∂D jest klasy C^1 (tzn. G jest klasy C^1). Poszukujemy rozwiązania spełniającego warunek brzegowy

$$u(x)\big|_{x\in\partial D} = a(x) \tag{5.19}$$

gdzie a jest klasy C^1 na ∂D.

Definicja 5.8. *Każdą funkcję klasy C^2 w obszarze D, spełniającą w D równanie Laplace'a nazywamy funkcją harmoniczną.*

Własności funkcji harmonicznych

1. Funkcja harmoniczna, różna od stałej w obszarze D, nie ma w tym obszarze maksimum, ani minimum.

2. Funkcja harmoniczna w $D \cup \partial D$ osiąga swoje kresy na ∂D.

Przyjmujemy, że w R^n dana jest norma Euklidesowa (tzn. $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$).

Twierdzenie 5.4.

$$E(x,\xi) = \begin{cases} \frac{1}{n-2}\|x-\xi\|^{2-n} & \textit{dla } n > 2 \\ -\ln\|x-\xi\| & \textit{dla } n = 2 \end{cases} \tag{5.20}$$

dla $x \neq \xi$ jest funkcją harmoniczną ze względu na obie zmienne.

Definicja 5.9. *Funkcja (5.20) nazywa się rozwiązaniem elementarnym lub podstawowym równania Laplace'a. Dla $n = 3$ jest ona potencjałem ładunku jednostkowego, umieszczonego w punkcie x (lub ξ). Dla $n = 2$ nosi ona nazwę potencjału logarytmicznego, ładunku umieszczonego w punkcie x (lub ξ).*

Rozwiązanie podstawowe (5.20) posłuży do konstrukcji rozwiązania problemu granicznego (5.10), (5.19).

Funkcja Greena

Definicja 5.10. *Funkcją Greena zagadnienia Dirichleta dla równania Laplace'a w obszarze D nazywamy funkcję $G(x,\xi)$ dwóch punktów x, $\xi \in D \cup \partial D$, mającą następujące własności:*

1. *$G(x,\xi) = E(x,\xi) - g(x,\xi)$, gdzie $E(x,\xi)$ jest rozwiązaniem podstawowym równania Laplace'a, a $g(x,\xi)$ jest funkcją harmoniczną zarówno względem $x \in D$, jak i względem $\xi \in D$.*

2. *Gdy $x \in \partial D$ lub $\xi \in \partial D$, to $G(x,\xi) = 0$.*

Własności funkcji Greena

1. $G(x,\xi) \geqslant 0$ dla $x \in D$, $\xi \in D$.

2. $G(x,\xi) = G(\xi, x)$.

3. $G(x,\xi)$ jest harmoniczna ze względu na $x \in D$, i ze względu na $\xi \in D$, przy czym $x \neq \xi$.

TWIERDZENIE 5.5. *Jeżeli $G(x,\xi)$ jest funkcją Greena dla obszaru D, wówczas funkcja*

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\partial D} \frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}n_\xi} a(\xi)\,\mathrm{d}S_\xi \tag{5.21}$$

jest rozwiązaniem zagadnienia Dirichleta dla równania Laplace'a, czyli zagadnienia (5.10), (5.19), *przy czym n_ξ jest normalną zewnętrzną do ∂D, a ω_n polem sfery jednostkowej w R^n*

$$\omega_n = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}n)} 2\pi^{\frac{1}{2}n},$$

Γ — *funkcja gamma Eulera.*

Konstrukcja rozwiązania problemu Dirichleta dla równania Poissona

TWIERDZENIE 5.6. *Funkcja określona wzorem*

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int\limits_{D} G(x,\xi) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi_1 \ldots \mathrm{d}\xi_n \tag{5.22}$$

gdzie: $G(x,\xi)$ jest funkcją Greena zagadnienia Dirichleta dla funkcji harmonicznych w obszarze D, a funkcja $f(x)$ jest ograniczona i ma pierwsze pochodne ciągłe i ograniczone w D, jest regularnym rozwiązaniem równania Poissona (5.18) *spełniającym jednorodny warunek brzegowy*

$$u(x)\big|_{x \in \partial D} = 0 \tag{5.23}$$

TWIERDZENIE 5.7. *Jeżeli funkcja $v(x)$ jest rozwiązaniem problemu granicznego* (5.10), (5.19) *w obszarze D, natomiast $w(x)$ jest rozwiązaniem problemu* (5.18), (5.23) *w D, wówczas funkcja*

$$u(x) = v(x) + w(x) \tag{5.24}$$

jest rozwiązaniem zagadnienia Dirichleta dla równania Poissona w obszarze D (tj. problemu (5.18), (5.19)).

Przykład 5.12. Skonstruować funkcję Greena dla koła jednostkowego

$$K = \{(x_1, x_2) \in R^2 \colon x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}.$$

Zastosujemy tu tzw. metodę punktów symetrycznych. Niech $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in K$. Oznaczmy przez $\xi^* = (\xi_1^*, \xi_2^*)$ punkt leżący na zewnątrz koła, na półprostej 0ξ, taki że

$$d(0,\xi)d(0,\xi^*) = r^2 = 1,$$

gdzie d oznacza odległość euklidesową w R^2, r — promień koła K.

Zauważmy, że:

$$\xi_1^* = \frac{\xi_1}{\xi_1^2+\xi_2^2}, \qquad \xi_2^* = \frac{\xi_2}{\xi_1^2+\xi_2^2}.$$

Punkt ξ^* nazywamy punktem symetrycznym do ξ względem okręgu $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Funkcja

$$g(x,\xi) = \ln\frac{1}{d(0,\xi)d(x,\xi^*)} = -\frac{1}{2}\ln(\xi_1^2+\xi_2^2)\left[(x_1-\xi_1^*)^2 + (x_2-\xi_2^*)^2\right].$$

Zatem, zgodnie z definicją (5.10), funkcja Greena jest następująca

$$G(x,\xi) = \frac{1}{2}\ln(\xi_1^2+\xi_2^2)\left[\left(x_1 - \frac{\xi_1}{\xi_1^2+\xi_2^2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{\xi_2}{\xi_1^2+\xi_2^2}\right)^2\right] +$$
$$-\frac{1}{2}\ln\left[(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2\right].$$

Metoda konstrukcji funkcji Greena za pomocą punktów symetrycznych jest dobra dla dowolnych obszarów jednospójnych płaskich lub przestrzennych. Na płaszczyźnie do konstrukcji funkcji Greena można wykorzystać odwzorowania konforemne.

Przykład 5.13. Wyznaczyć funkcję Greena dla górnej półprzestrzeni $x_3 > 0$.

Zgodnie z definicją (5.10)

$$G(x,\xi) = \frac{1}{\|x-\xi\|} - g(x,\xi).$$

Zauważmy, że punktem symetrycznym do punktu $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ względem płaszczyzny $x_3 = 0$, jest $\xi^* = (\xi_1, \xi_2, -\xi_3)$.

Funkcja

$$g(x,\xi) = \frac{1}{\|x-\xi^*\|} = \left[(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + (x_3-\xi_3)^2\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

W związku z tym funkcja Greena ma postać

$$\begin{aligned} G(x,\xi) &= \frac{1}{\|x-\xi\|} - \frac{1}{\|x-\xi^*\|} = \\ &= \left[(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + (x_3-\xi_3)^2\right]^{-\frac{1}{2}} + \\ &\quad - \left[(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + (x_3+\xi_3)^2\right]^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Przykład 5.14. Wyznaczyć w obszarze $D = \{(x_1, x_2) \in R^2 \colon x_2 > 0\}$ rozwiązanie równania Laplace'a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 \tag{a}$$

spełniające warunek brzegowy

$$\lim_{x_2 \to 0} u(x_1, x_2) = F(x_1) = \begin{cases} v_0 > 0 & \text{dla } |x_1| \leqslant a \\ 0 & \text{dla } |x_1| > a \end{cases} \tag{b}$$

Wyznaczamy funkcję Greena dla półpłaszczyzny $x_2 > 0$.

Funkcja

$$g(x, \xi) = \ln \frac{1}{\|x - \xi^*\|} = -\frac{1}{2} \ln \left[(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 + \xi_2)^2 \right],$$

gdzie $\xi^* = (\xi_1, -\xi_2)$ jest punktem symetrycznym do $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ względem prostej $x_2 = 0$. Tak więc funkcja Greena ma postać

$$G(x, \xi) = \ln \frac{1}{\|x - \xi\|} - \ln \frac{1}{\|x - \xi^*\|}$$

lub inaczej

$$G(x, \xi) = \frac{1}{2} \ln \frac{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 + \xi_2)^2}{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}.$$

Zgodnie ze wzorem (5.21), rozwiązanie zagadnienia (a), (b) jest następujące

$$u(x_1, x_2) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial D} \frac{\mathrm{d}G(x, \xi)}{\mathrm{d}n_\xi} F(\xi_1) \, \mathrm{d}l_\xi.$$

W naszym przypadku

$$u(x_1, x_2) = \frac{v_0}{2\pi} \int\limits_{-a}^{a} \left(\frac{\partial G}{\partial \xi_2} \right) \bigg|_{\xi_2 = 0} \mathrm{d}\xi_1.$$

Ale

$$\frac{\partial G}{\partial \xi_2} \bigg|_{\xi_2 = 0} = \frac{2x_2}{(x_1 - \xi_1)^2 + x_2^2},$$

zatem

$$u(x_1, x_2) = \frac{v_0}{2\pi} \int\limits_{-a}^{a} \frac{2x_2}{(x_1 - \xi_1)^2 + x_2^2} \, \mathrm{d}\xi_1$$

lub po scałkowaniu

$$u(x_1, x_2) = \frac{v_0}{\pi} \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{a - x_1}{x_2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{a + x_1}{x_2} \right].$$

Zadania

1. Wyznaczyć funkcję Greena dla kuli

   $K = \{x \in R^3 \colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2\}.$

2. Wyznaczyć funkcję Greena dla obszaru

   $D = \{x \in R^2 \colon 0 < x_1 < \infty \quad 0 < x_2 < \infty\}.$

3. Znaleźć rozwiązanie równania Laplace'a

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$

   w obszarze $D = \{x \in R^2 \colon 0 < x_1 < \infty \quad 0 < x_2 < \infty\}$, spełniające warunek:

   $$\lim_{x_1 \to 0^+} u(x_1, x_2) = B, \qquad \lim_{x_2 \to 0^+} u(x_1, x_2) = A.$$

4. Wyznaczyć rozwiązanie równania Poissona

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 4$$

   w kole $\|x\|^2 < a^2$, które na brzegu przyjmuje wartość $2a^2$.

5. Znaleźć rozwiązanie równania Poissona

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = x_1 + x_2$$

   w kole $\|x\| < a$, które na brzegu przyjmuje wartość 0.

6. Wyznaczyć rozwiązanie równania Laplace'a

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0$$

   w kuli $\|x\|^2 < R^2$, przyjmujące na sferze $\|x\| = R$ wartości $F(x) = \left(\frac{x_3}{R}\right)^2$.

7. Wyznaczyć rozwiązanie równania Poissona

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = x_1^2 + x_2^2$$

   w kole $\|x\|^2 < a^2$, które na brzegu przyjmuje wartość $3a^2$.

Odpowiedzi

1. $G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\|x-\xi\|} - \dfrac{R}{\|\xi\|\|x-\xi^*\|} & \text{dla } \xi \neq 0 \\ \dfrac{1}{\|x\|} - \dfrac{1}{R} & \text{dla } \xi = 0 \end{cases}$,

   gdzie $\xi^* = \dfrac{R^2}{\|\xi\|^2}\xi$ jest punktem symetrycznym do ξ względem sfery $\|\xi\|^2 = R^2$.
2. $G(x,\xi) = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{(x_1^2 - x_2^2 - \xi_1^2 + \xi_2^2)^2 + (2x_1x_2 + 2\xi_1\xi_2)^2}{(x_1^2 - x_2^2 - \xi_1^2 + \xi_2^2)^2 + (2x_1x_2 - 2\xi_1\xi_2)^2}$
3. $u(x_1,x_2) = \dfrac{A+B}{2} + \dfrac{A-B}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x^2-y^2}{2xy}$
4. $u(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 + a^2$
5. $u(x_1,x_2) = \dfrac{1}{8}(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2-a^2)$
6. $u(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{1}{3R^2}\left[R^2 - (x_1^2+x_2^2+x_3^2) + 3x_3^2\right]$
7. $u(x_1,x_2) = 3a^2 + \dfrac{1}{16}\left[(x_1^2+x_2^2)^2 - a^4\right]$

5.6. Równania typu parabolicznego

Rozważmy równanie przewodnictwa

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + f(x,t), \qquad t > 0 \tag{5.25}$$

oraz warunek początkowy

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{5.26}$$

Twierdzenie 5.8. *Jeżeli funkcja f jest klasy C^2 dla $t \geqslant 0$ oraz jest ograniczona wraz z pochodnymi w każdym pasie $0 < t < T$, φ jest ciągła i ograniczona w R^n, to problem początkowy* (5.25), (5.26) *ma dokładnie jedno rozwiązanie dane wzorem Poissona*

$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{R^n} \varphi(\xi) \exp\left[-\frac{\|x-\xi\|^2}{4a^2t}\right] \mathrm{d}\xi \, + \\ & + \int\limits_0^t \left\{ \int\limits_{R^n} \frac{f(\xi,\tau)}{\left[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right]^n} \exp\left[-\frac{\|x-\xi\|^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \mathrm{d}\xi \right\} \mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{5.27}$$

gdzie $\mathrm{d}\xi = \mathrm{d}\xi_1 \ldots \mathrm{d}\xi_n$.

Uwaga 5.4. Zagadnienie (5.25), (5.26) nosi nazwę zagadnienia Cauchy'ego–Dirichleta.

Przykład 5.15. Znaleźć rozwiązanie problemu Cauchy'ego–Dirichleta:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + x_1 x_2 + e^t \tag{a}$$

$$u(x_1, x_2, 0) = \sin x_1 \cos x_2 \tag{b}$$

Stosując wzór Poissona dla $n = 2$, mamy

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin \xi_1 \cos \xi_2 \exp\left[-\frac{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}{4t}\right] \mathrm{d}\xi_2 + \\ + \int\limits_0^t \mathrm{d}\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_1 \xi_2 + e^\tau}{4\pi(t - \tau)} \exp\left[-\frac{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}{4(t - \tau)}\right] \mathrm{d}\xi_2.$$

Po scałkowaniu uzyskujemy

$$u(x_1, x_2, t) = e^{-2t} \sin x_1 \cos x_2 + x_1 x_2 t + e^t - 1.$$

Uwaga 5.5. Przy obliczaniu całek wykorzystaliśmy następujące wzory:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\, \mathrm{d}u = \sqrt{\pi},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin au e^{-u^2}\, \mathrm{d}u = 0,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos au e^{-u^2}\, \mathrm{d}u = e^{-a^2/4} \sqrt{\pi}.$$

Zadania

Rozwiązać problem Cauchy'ego–Dirichleta:

1. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3t^2$, jeżeli $u(x, 0) = \sin x$
2. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^t \sin x$, jeżeli $u(x, 0) = \sin x$
3. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, jeżeli $u(x, 0) = e^{-x^2 \sin x}$

4. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + \cos x_1 + 2,\quad$ jeżeli $u(x_1, x_2, 0) = \cos x_1 x_2$

5. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + x_1^3 + x_2^3,\quad$ jeżeli $u(x_1, x_2, 0) = \sin x_1 \cos x_2$

6. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + x_1 + x_2 + x_3 + t,$

   jeżeli $u(x_1, x_2, x_3, 0) = \sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3$

7. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right) + t \sin x_1 + \cos x_2,$

   jeżeli $u(x_1, x_2, x_3, 0) = e^{-x_1} \cos 2x_2 + x_3$

Odpowiedzi

1. $u(x,t) = t^3 + e^{-t} \sin x$
2. $u(x,t) = \sin x + \cosh t$
3. $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{t+1}} \sin \dfrac{x}{t+1} \exp\left[-\dfrac{4x^2+t}{4(t+1)}\right]$
4. $u(x_1, x_2, t) = 2t + 2\left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right)\cos x_1 + \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}} \exp\left[-\dfrac{(x_1^2 + x_2^2)t}{2(t^2+1)}\right] \cos \dfrac{x_1 x_2}{t^2+1}$
5. $u(x_1, x_2, t) = t(x_1^3 + x_2^3) + 3t^2(x_1 + x_2) + e^{-2t} \sin x_1 \cos x_2$
6. $u(x_1, x_2, x_3, t) = \dfrac{1}{2}t^2 + t(x_1 + x_2 + x_3) + e^{-t}(\sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3)$
7. $u(x_1, x_2, x_3, t) = e^{-x_1 - 12t} \cos 2x_2 + x_3 + \dfrac{1}{16}(4t - 1 + e^{-4t}) \sin x_1 + \dfrac{1}{4}(1 - e^{-4t}) \cos x_2$

5.7. Metoda rozdzielania zmiennych

Dane jest równanie różniczkowe postaci

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u \tag{5.28}$$

gdzie: ρ, p, q są dostatecznie gładkimi funkcjami, przy czym $\rho > 0$, $p > 0$, $q \geqslant 0$. Przy naszych założeniach równanie (5.28) jest typu hiperbolicznego.

Poszukujemy rozwiązania równania (5.28) spełniającego następujące warunki brzegowe

$$\begin{cases} \alpha u(0,t) + \beta \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \\ \gamma u(l,t) + \delta \dfrac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0 \end{cases} \tag{5.29}$$

oraz początkowe

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi_0(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,0) = \varphi_1(x) \end{cases} \tag{5.30}$$

gdzie $0 \leqslant x \leqslant l$. Rozwiązania problemu (5.28), (5.29) poszukuje się w postaci iloczynu

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{5.31}$$

Z równania (5.28) wynika, że funkcja (5.31) spełnia je wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje stała λ, taka że

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p(x)X'(x)) + (\lambda\rho(x) - q(x))X(x) = 0 \tag{5.32}$$

oraz

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0 \tag{5.33}$$

Ponadto, aby funkcja (5.31) spełniała warunki brzegowe (5.29), muszą być spełnione następujące równości

$$\begin{cases} \alpha X(0) + \beta X'(0) = 0 \\ \gamma X(l) + \delta X'(l) = 0 \end{cases} \tag{5.34}$$

Tak więc, w celu określenia funkcji $X(x)$ należy rozwiązać następujące zagadnienie: znaleźć takie wartości λ, nazywane wartościami własnymi, przy których istnieje niezerowe rozwiązanie równania (5.32) spełniające warunki brzegowe (5.29); znaleźć te rozwiązania (zwane funkcjami własnymi).

Twierdzenie 5.9.
1° *Istnieje przeliczalny zbiór wartości własnych*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \ldots,$$

którym odpowiadają funkcje własne

$$X_1(x), X_2(x), \ldots, X_n(x), \ldots .$$

2° *Jeżeli* $q \geqslant 0$, *oraz* $(p(x)X_n(x)X_n'(x)) \leqslant 0$ *dla* $x = 0$ *i dla* $x = l$, *to wszystkie wartości własne* λ_n *są dodatnie.*

3° *Funkcje własne tworzą w przedziale* $[0, l]$ *układ ortogonalny, unormowany z wagą* $\rho(x)$, *tzn.*

$$\int_0^l \rho(x)X_n(x)X_m(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \textit{dla } n \neq m \\ 1 & \textit{dla } n = m \end{cases}.$$

4° *Każda funkcja* f *klasy* $C^1[0, l]$ *spełniająca warunki brzegowe* (5.29) *oraz mająca drugą pochodną przedziałami ciągłą, rozwija się w szereg względem ciągu* X_n, *zbieżny bezwzględnie i jednostajnie w* $[0, l]$, *tzn.*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x),$$

gdzie

$$c_n = \int_0^l \rho(x)X_n(x)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Mając określone wartości własne λ_n (oraz odpowiadające im funkcje własne $X_n(x)$), przechodzimy do rozwiązania równania (5.33), skąd dla $\lambda_n > 0$ mamy

$$T_n(t) = A_n \cos\sqrt{\lambda_n}t + B_n\sqrt{\lambda_n}t,$$

gdzie: A_n, B_n — dowolne stałe.

Otrzymaliśmy przeliczalny zbiór rozwiązań równania (5.28)

$$u_n(x,t) = T_n(t)X_n(x) = \left(A_n \cos\sqrt{\lambda_n}t + B_n \sin\sqrt{\lambda_n}t\right) X_n(x).$$

Również szereg

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$$

jest rozwiązaniem równania (5.28) spełniającym warunki brzegowe (5.29) (o ile jest on zbieżny jednostajnie w $[0, l]$ wraz z odpowiednimi pochodnymi do rzędu drugiego).

Dla spełnienia warunków początkowych (5.30) należy przyjąć:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) = \varphi_0(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} B_n X_n(x) = \varphi_1(x),$$

skąd przy założeniu, że oba szeregi są zbieżne jednostajnie, mamy:

$$\begin{aligned} A_n &= \int\limits_0^l \rho(x)\varphi_0(x)X_n(x)\,\mathrm{d}x \\ B_n &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int\limits_0^l \rho(x)\varphi_1(x)X_n(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{5.35}$$

Ostatecznie rozwiązaniem zagadnienia (5.28), (5.29), (5.30) jest funkcja

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\sqrt{\lambda_n}t + B_n \sin\sqrt{\lambda_n}t \right) X_n(x),$$

gdzie: A_n i B_n dane są wzorami (5.35).

Przykład 5.16. Znaleźć rozwiązanie równania typu hiperbolicznego

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{a}$$

spełniające warunki:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \tag{b}$$

$$\begin{aligned} &u(x,0) = \frac{x(l-x)}{l^2} \\ &\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \end{aligned} \tag{c}$$

gdzie $x \in [0,l]$. Poszukujemy rozwiązania postaci

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{d}$$

Na podstawie (b), mamy

$$X(0)T(t) = 0 \quad \text{oraz} \quad X(l)T(t) = 0,$$

skąd

$$X(0) = X(l) = 0.$$

Wstawiając funkcję (d) do równania (a), otrzymujemy

$$XT'' = a^2 X'' T,$$

skąd

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda \tag{e}$$

Przejdźmy do znalezienia wartości własnych λ i funkcji własnych X. W tym celu rozwiążemy problem brzegowy (e), (f)

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{f}$$

Zauważmy, że gdyby λ było niedodatnie, to jedynym rozwiązaniem problemu (e), (f) byłoby rozwiązanie zerowe. Zatem $\lambda > 0$.

Rozwiązanie ogólne równania (f) jest następujące

$$X(x) = C\cos\sqrt{\lambda}x + D\sin\sqrt{\lambda}x.$$

Z warunków brzegowych (e) mamy:

$$C = 0,$$
$$D\sin\sqrt{\lambda}l = 0,$$

skąd z uwagi na to, że $D \neq 0$, uzyskujemy wartości własne

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \qquad n = 0, 1, \dots$$

oraz odpowiadający im ciąg funkcji własnych

$$X_n(x) = D_n \sin\frac{n\pi}{l}x \tag{g}$$

Odpowiednio

$$T'' + a^2\lambda_n T = 0,$$

skąd

$$T_n(t) = \overline{A}_n \cos\frac{n\pi a}{l}t + \overline{B}_n \sin\frac{n\pi a}{l}t,$$

zatem

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos\frac{n\pi a}{l}t + B_n \sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

gdzie: $A_n = \overline{A}_n D_n$, $B_n = \overline{B}_n D_n$.

Utwórzmy szereg

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi a}{l}t + B_n \sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Na podstawie (c)

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{l}x = \frac{x(l-x)}{l^2}$$

oraz

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x = 0.$$

Tak więc (patrz (5.35)):

$$A_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \frac{x(l-x)}{l^2} \sin \frac{n\pi x}{l} \, \mathrm{d}x = \frac{4}{(n\pi)^3} \left[1 - (-1)^n\right],$$

$$B_n \frac{n\pi a}{l} = \frac{2}{l} \int\limits_0^l 0 \sin \frac{n\pi x}{l} \, \mathrm{d}x = 0,$$

ostatecznie

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^n} \cos \frac{(2n+1)\pi a t}{l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}$$

jest rozwiązaniem problemu (a), (b), (c).

Na przykładach pokażemy, jak stosować metodę rozdzielania zmiennych, zwaną również metodą Fouriera, dla równań parabolicznych i eliptycznych.

Przykład 5.17. Znaleźć rozwiązanie równania, typu parabolicznego

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{a}$$

($0 < x < l$, $t > 0$), spełniające warunki:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \qquad t > 0 \tag{b}$$

oraz

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad 0 < x \leqslant \frac{l}{2} \\ l - x & \text{dla} \quad \frac{l}{2} < x < l \end{cases} \tag{c}$$

Szukamy rozwiązania w postaci iloczynu dwóch funkcji

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{d}$$

Z warunków (b), wynika że

$$X(0) = X(l) = 0 \tag{e}$$

Postępując analogicznie jak w przykładzie 5.16, otrzymujemy

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

gdzie $\lambda > 0$.

Aby znaleźć λ i X należy rozwiązać problem brzegowy (f), (e)

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{f}$$

Na podstawie przykładu 5.16 liczby:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

są szukanymi wartościami własnymi, zaś odpowiadające im funkcje własne są następujące:

$$X_n(x) = D_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}\right)x, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

gdzie D_n — dowolne stałe.

Funkcja T_n spełnia równanie

$$T_n' + a^2\frac{n\pi}{l}T_n = 0 \tag{g}$$

a więc

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2\frac{n\pi}{l}t}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

gdzie C_n — dowolne stałe. Zatem

$$u_n(x,t) = A_n e^{-a^2\frac{n\pi}{l}t}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

gdzie $A_n = D_n C_n$ — są dowolnymi stałymi.

Utwórzmy szereg

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-a^2\frac{n\pi}{l}t}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Na podstawie (c)

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = f(x).$$

Korzystając z rozwinięcia funkcji $f(x)$ w niepełny szereg trygonometryczny Fouriera według sinusów, mamy

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\,\mathrm{d}x\right] = \frac{4l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2},$$

a więc

$$A_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 2k \\ \dfrac{4l(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2} & \text{dla } n = (2k+1) \end{cases},$$

gdzie $k = 0, 1, \ldots$.

Rozwiązaniem zagadnienia (a), (b), (c) jest więc funkcja

$$u(x,t) = \frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\exp\left[-a^2\frac{(2k+1)\pi t}{l}\right]\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}.$$

Przykład 5.18. Znaleźć rozwiązanie równania Laplace'a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{a}$$

w prostokącie $D = \{(x,y) \in R^2 \colon 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b\}$, przyjmując na ∂D następujące wartości:

$$u(0,y) = \varphi_0(y), \qquad u(a,y) = \varphi_1(y) \qquad \text{dla } y \in [0,b] \tag{b}$$
$$u(x,0) = \psi_0(x), \qquad u(x,b) = \psi_1(x) \qquad \text{dla } x \in [0,a] \tag{c}$$

przy czym:

$$\varphi_0(0) = \psi_0(0), \qquad \varphi_1(b) = \psi_1(a),$$
$$\varphi_0(b) = \psi_1(0), \qquad \varphi_1(0) = \psi_0(a).$$

Rozwiązania tak postawionego zagadnienia Dirichleta należy szukać w dwóch etapach:

1. Znaleźć funkcję harmoniczną $u_1(x,y)$, spełniającą następujące warunki:

$$u_1(0,y) = \varphi_0(y), \qquad u_1(a,y) = \varphi_1(y),$$
$$u_1(x,0) = 0, \qquad u_1(x,b) = 0.$$

2. Znaleźć funkcję harmoniczną $u_2(x,y)$, spełniającą następujące warunki:

$$u_2(0,y) = 0, \qquad u_2(a,y) = 0,$$
$$u_2(x,0) = \psi_0(x), \qquad u_2(x,b) = \psi_1(x).$$

Wówczas funkcja $u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y)$ jest rozwiązaniem zagadnienia (a), (b), (c). Funkcji u_1 oraz u_2 należy szukać metodą rozdzielania zmiennych.

Przykład 5.19. Znaleźć funkcję harmoniczną wewnątrz pierścienia $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$, spełniającą warunki brzegowe

$$\begin{cases} u(x,y) = 0 & \text{dla } x^2 + y^2 = 1 \\ u(x,y) = Ay & \text{dla } x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \tag{c}$$

Równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{a}$$

przekształcamy, wprowadzając współrzędne biegunowe:

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi,$$

otrzymując równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{a'}$$

w miejsce równania (a) oraz warunki:

$$u(1,\varphi) = 0 \tag{b'}$$
$$u(2,\varphi) = 2A\sin\varphi \tag{c'}$$

w miejsce warunków (b), (c).

Szukamy rozwiązania w postaci iloczynu

$$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \tag{d}$$

Z warunku (c') wynika, że

$$\Phi(\varphi) = \frac{2A\sin\varphi}{R(2)} \tag{e}$$

Wstawiając związek (d) do równania (a') otrzymujemy

$$R''\Phi + \frac{1}{r}R'\Phi + \frac{1}{r^2}R\Phi'' = 0$$

lub

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = \frac{-\Phi''}{\Phi} = \lambda.$$

Uzyskujemy w ten sposób dwa równania zwyczajne

$$r^2R'' + rR' = \lambda R \tag{f}$$

oraz

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda.$$

Z powyższego równania i związku (e) wynika, że $\lambda = 1$. Wobec tego, równanie (f) ma postać

$$r^2 R'' + rR' - R = 0.$$

Jest to równanie Eulera i ma rozwiązanie ogólne (por. rozdział 3)

$$R(r) = C_1 r + C_2 \frac{1}{r}.$$

Z warunku (b') wynika, że $R(1) = 0$, a więc

$$C_1 + C_2 = 0,$$

zatem

$$R(r) = C_1 \left(r - \frac{1}{r} \right),$$

w szczególności $R(2) = C_1 \frac{3}{2}$, skąd $C_1 = \frac{2}{3} R(2)$. Wobec tego szukane rozwiązanie jest następujące

$$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi) = \frac{4}{3} A \left(\frac{r^2 - 1}{r} \right) \sin\varphi.$$

Przykład 5.20. W tym przykładzie pokażemy, jak stosować metodę separacji zmiennych w przypadku większej liczby zmiennych niezależnych.

Niech $D = \{(x,y,z) \in R^3 \colon x \in (0,l_1), y \in (0,l_2), z \in (0,l_3)\}$. Wyznaczyć w obszarze D rozwiązanie równania falowego (a), dla $t > 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{a}$$

spełniające następujące warunki początkowe:

$$u(x,y,z,0) = u_0 \quad \text{w } D \tag{b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,0) = 0 \quad \text{w } D \tag{c}$$

oraz warunki brzegowe:

$$u(0,y,z,t) = u(l_1,y,z,t) = 0 \tag{d}$$

$$u(x,0,z,t) = u(x,l_2,z,t) = 0 \tag{e}$$

$$u(x,y,0,t) = u(x,y,l_3,t) = 0 \tag{f}$$

dla $(x,y,z) \in D$ i $t > 0$.

Poszukujemy rozwiązania w postaci

$$u(x,y,z,t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t).$$

Wstawiając powyższą funkcję do równania (a), mamy

$$X''YZT + XY''ZT + ZYZ''T = \frac{1}{a^2}XYZT'',$$

lub

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = \frac{1}{a^2}\frac{T''}{T}.$$

Z uwagi na to, że poszczególne składniki są funkcjami jednej (nie tej samej) zmiennej, każdy ze składników musi przyjmować wartości stałe. Dostaniemy cztery równania różniczkowe zwyczajne:

$$\frac{X''}{X} = -K \tag{α}$$

$$\frac{Y''}{Y} = -M \tag{β}$$

$$\frac{Z''}{Z} = -N \tag{γ}$$

$$\frac{T''}{T} = -\lambda a^2 \tag{δ}$$

oraz warunki brzegowe:

$$X(0) = X(l_1) = 0 \tag{d'}$$

$$Y(0) = Y(l_2) = 0 \tag{e'}$$

$$Z(0) = Z(l_3) = 0 \tag{f'}$$

przy czym $\lambda = K + M + N$ oraz $K > 0$, $M > 0$, $N > 0$.

Rozwiązaniem powyższych problemów brzegowych są odpowiednio funkcje:

$$X_k(x) = B_k \sin\frac{k\pi x}{l_1},$$

$$Y_m(y) = C_m \sin\frac{m\pi y}{l_2},$$

$$Z_n(z) = D_n \sin\frac{n\pi z}{l_3},$$

$$T_{kmn}(x) = E_{kmn}\cos\sqrt{\lambda_{kmn}}at + F_{kmn}\sin\sqrt{\lambda_{kmn}}at,$$

gdzie $\lambda_{kmn} = \left(\frac{k^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2} + \frac{n^2}{l_3^2}\right)\pi^2$. Z warunku (c) wynika, że $F_{kmn} = 0$.

Otrzymaliśmy następujący ciąg rozwiązań

$$u_{kmn}(x,y,z,t) = A_{kmn}\sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}\sin\frac{n\pi z}{l_3}\cos\left(\sqrt{\lambda_{kmn}}at\right).$$

Utwórzmy szereg

$$u(x,y,z,t) = \sum_{k,m,n=1}^{\infty} A_{kmn}\sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}\sin\frac{n\pi z}{l_3}\cos\left(\sqrt{\lambda_{kmn}}at\right).$$

Z warunku (b) wynika, że

$$u_0 = \sum_{k,m,n=1}^{\infty} A_{kmn}\sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}\sin\frac{n\pi z}{l_3},$$

skąd

$$A_{kmn} = \frac{u_0\iiint\limits_D \sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}\sin\frac{n\pi z}{l_3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint\limits_D \sin^2\frac{k\pi x}{l_1}\sin^2\frac{m\pi y}{l_2}\sin^2\frac{n\pi z}{l_3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

lub po obliczeniu całek

$$A_{kmn} = \frac{64u_0(-1)^{k+m+n}}{\pi^3(2k-1)(2m-1)(2n-1)}, \qquad k,m,n = 1,2,\ldots.$$

Zadania

1. Znaleźć rozwiązanie równania

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

   spełniające warunki brzegowe $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ oraz początkowe:

   $$u(x,0) = \frac{x^2}{\pi^2} - \frac{x}{\pi}, \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = -a\left(\frac{x^2}{\pi^2} - \frac{x}{\pi}\right)$$

   dla $x \in [0,\pi]$, $t > 0$.

2. Struna jednorodna, zamocowana na końcach $x = 0$, $x = l$, mająca w chwili początkowej kształt

   $$u(x,0) = \frac{16}{5}h\left[\left(\frac{x}{l}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{x}{l}\right], \qquad h > 0,$$

   zaczyna drgać bez prędkości początkowej. Zbadać drgania swobodne struny.

3. Jednorodna struna o długości l została zamocowana w końcu $x = 0$, a do drugiego końca struny przymocowano pierścień, którego masę można zaniedbać. Pierścień może się przesuwać po gładkim pręcie. Pierścień został odchylony na małą odległość h od położenia równowagi i puszczony w chwili $t = 0$. Znaleźć odchylenie $u(x, t)$ struny w dowolnym punkcie $x \in [0, l]$ oraz chwili $t > 0$.

4. Jednorodna membrana kwadratowa, mająca w chwili początkowej $t = 0$, kształt

$$u(x, y, 0) = Axy(b - x)(b - y), \qquad A = \text{const},$$

zaczyna drgać bez prędkości początkowej. Zbadać drgania swobodne membrany zamocowanej na brzegu.

5. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = b \sinh x$$

przy warunkach granicznych:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \qquad u(x, 0) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

6. Znaleźć rozkład potencjału pola elektrycznego $u(x, y)$, wewnątrz prostokąta $DACB$, na którego boku DB potencjał równa się U, a trzy pozostałe boki są uziemione. Wewnątrz prostokąta nie ma ładunków elektrycznych. Przy czym: $D = (0, 0)$, $A = (a, 0)$, $B = (0, b)$, $C = (a, b)$.

7. Znaleźć rozwiązanie równania Laplace'a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

wewnątrz obszaru $D = \{(x, y) \colon x \in (0, +\infty), y \in (0, 2\pi)\}$ spełniające warunki: $u(x, 0) = u(x, 2\pi) = 0$, $u(0, y) = 2y$, $\lim\limits_{x \to \infty} u(x, y) = 0$.

8. Znaleźć funkcję harmoniczną wewnątrz kołowego wycinka $0 \leqslant \rho \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant$ $\leqslant \alpha$, spełniającą warunki brzegowe $u(\rho, 0) = u(\rho, \alpha) = 0$, $u(R, \varphi) = A\varphi$.

9. Znaleźć rozwiązanie równania

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 4\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

w obszarze $D = \{(x, t) \colon x \in [0, 1], t > 0\}$, jeżeli:
$u(0, t)u(1, t) = 0$ dla $t > 0$,
$u(x, 0)x$ dla $x \in [0, 1]$.

10. Rozpuszczalna substancja o początkowym stężeniu $C_0 = \text{const}$ dyfunduje z roztworu zawartego pomiędzy płaszczyznami $x = 0$ i $x = h$ do rozpuszczalnika ograniczonego płaszczyznami $x = h$ i $x = l$. Opisać proces wyrównywania stężeń, zakładając że brzegi $x = 0$ i $x = l$ są nieprzenikliwe dla rozpuszczonej substancji.

Odpowiedzi

1. $u(x,t) = \dfrac{8}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{\sin(2n-1)at}{(2n-1)^4} - \dfrac{\cos(2n-1)at}{(2n-1)^3} \right] \sin(2n-1)x$

2. $u(x,t) = \dfrac{1536h}{5\pi^5} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^5} \cos \dfrac{(2n+1)\pi at}{l} \sin \dfrac{(2n+1)\pi x}{l}$

3. $u(x,t) = \dfrac{8h}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cos \dfrac{(2n+1)\pi at}{2l} \sin \dfrac{(2n+1)\pi x}{2l}$

   Wskazówka: należy rozwiązać równanie $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ przy warunkach:

   $$u(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0, \quad u(x,0) = \frac{hx}{l}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

4.
$$u(x,y,t) = \frac{64Ab^4}{\pi^6} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\sin \dfrac{(2n+1)\pi x}{b} \sin \dfrac{(2m+1)\pi y}{b}}{(2n+1)^3(2m+1)^3)} \cdot$$
$$\cdot \cos \frac{\sqrt{(2n+1)^2 + (2m+1)^2} a\pi t}{b}$$

   Wskazówka: rozwiązać równanie $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$

   przy warunkach brzegowych $u\big|_{x=0} = u\big|_{x=b} = u\big|_{y=0} = u\big|_{y=b} = 0$

   i początkowych: $u\big|_{t=0} = Axy(b-x)(b-y), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0.$

5.
$$u(x,t) = \frac{b}{a^2} \left(\frac{x}{l} \sin hl - \sin hx \right) + \frac{2b}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \cos \frac{n\pi at}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} +$$
$$- \frac{2b\pi \sin hl}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2\pi^2 + l^2} \cdot \cos \frac{n\pi at}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

   Wskazówka: szukać rozwiązania w postaci $u(x,t) = u_1(x) + u_2(x,t)$.

6.
$$u(x,y) = \frac{4U}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin h \dfrac{(2n+1)(a-x)\pi}{b} \sin \dfrac{(2n+1)\pi y}{b}}{(2n+1) \sin h \dfrac{(2n+1)\pi a}{b}}$$

   Wskazówka: rozwiązać równanie $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ wewnątrz prostokąta, przy warunkach brzegowych: $u(0,y) = U$, $u(a,y) = u(x,0) = u(x,b) = 0$.

7. $u(x,y) = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} \exp\left(-\dfrac{nx}{2}\right) \sin \dfrac{ny}{2}$

8. $u(\rho,\varphi) = \frac{2A\alpha}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}$

9. $u(x,t) = e^{x-2t}\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n e^{-2n^2\pi^2 t}\sin n\pi x$

gdzie $A_n = 2n\pi\frac{24(1-n^2\pi^2)+(-1)^{n-1}e^{-1}(49+3n^2\pi^2+3n^4\pi^4+n^6\pi^6)}{(1-6n^2\pi^2+n^4\pi^4)^2+16m^2\pi^2(1-n^2\pi^2)^2}$

10. $C(x,t) = C_0\left(\frac{h}{l}+\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi h}{l}\exp\left[-\frac{n^2\pi^2}{l^2}Dt\right]\cos\frac{n\pi x}{l}\right)$

Wskazówka: rozwiązać równanie $\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ przy warunkach: $\frac{\partial C}{\partial x}(0,t) = 0$, $\frac{\partial C}{\partial x}(l,t) = 0$

$C(x,0) = \begin{cases} C_0 & \text{dla } x \in (0,h) \\ 0 & \text{dla } x \in (h,l) \end{cases}.$

Rozdział **6.**

Przybliżone metody rozwiązywania zwyczajnych równań różniczkowych

6.1. Metoda Czapłygina

Twierdzenie 6.1. (o nierównościach różniczkowych). *Niech $f(x,y)$ i $F(x,y)$ będą funkcjami ciągłymi w obszarze*

$$D = \{(x,y)\colon x \in [x_0 - a, x_0 + a], y \in [y_0 - b, y_0 + b] \quad (a > 0, b > 0)\},$$

spełniającymi nierówność

$$f(x,y) \leqslant F(x,y) \qquad \text{dla } (x,y) \in D.$$

Niech funkcja $f(x,y)$ spełnia warunek Lipschitza ze względu na y, tzn.

$$\bigvee_{L \in R} \; \bigwedge_{x \in [x_0, x_0 + a]} \; \bigwedge_{y_1, y_2 \in [y_0 - b, y_0 + b]} |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant L\,|y_1 - y_2|\,.$$

Oznaczmy przez $y(x)$ i $U(x)$ odpowiednio rozwiązanie równań różniczkowych $y' = f(x,y)$, $U' = F(x,U)$ przechodzące przez punkt $(x_0, y_0) \in D$. Wówczas $U(x) \geqslant y(x)$ dla $x \in [x_0, x_0 + a]$.

Uwaga 6.1. Jeżeli w miejsce funkcji $F(x,y)$ weźmiemy funkcję $\varphi(x,y)$ taką, że $f(x,y) \geqslant \varphi(x,y)$ w rozpatrywanym obszarze, to jeżeli $u(x)$ jest rozwiązaniem równania $u' = \varphi(x,u)$ spełniającym warunek $u(x_0) = y_0$, wówczas funkcje $y(x)$ i $u(x)$ spełniają nierówność $y(x) \geqslant u(x)$ dla $x \in [x_0, x_0 + a]$.

Twierdzenie o nierównościach różniczkowych pozwala nam znaleźć funkcje $U(x)$ i $u(x)$, między którymi zawarte jest dokładne rozwiązanie $y(x)$.

Niech będzie dane równanie $y' = f(x,y)$.

Metoda Czapłygina polega na znalezieniu takich $F(x,y)$ i $\varphi(x,y)$ spełniających nierówność $F(x,y) \geqslant f(x,y) \geqslant \varphi(x,y)$ oraz takich, aby równania $U' = F(x,U)$ i $u' = \varphi(x,u)$ dały się łatwo scałkować. Wówczas rozwiązanie naszego równania jest zawarte pomiędzy $u(x)$ i $U(x)$, tzn. $\displaystyle\bigwedge_{x \in [x_0, x_0 + a]} u(x) \leqslant y(x) \leqslant U(x)$.

Przykład 6.1. Dane jest równanie $y' = x^2 + y^2$. Szukamy rozwiązania $y(x)$ w przedziale $[0,1]$ spełniającego warunek początkowy $y(0) = 0$.

Jako funkcje $F(x,y)$ i $\varphi(x,y)$ można wziąć odpowiednio:

$$F(x,y) = 1 + y^2, \qquad \varphi(x,y) = x^2.$$

Funkcje te spełniają oczywiście nierówność

$$x^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1 + y^2 \qquad \text{dla } x \in [0,1].$$

Rozwiązując równania $u' = x^2$ oraz $U' = 1+U^2$ z warunkami początkowymi $U(0) = 0$, $u(0) = 0$ otrzymujemy $u = \dfrac{x^3}{3}$, $U = \operatorname{tg} x$. Mamy więc, że

$$\frac{x^3}{3} \leqslant y(x) \leqslant \operatorname{tg} x \qquad \text{dla } x \in [0,1].$$

Metoda ta nie zawsze daje nam wystarczające oszacowanie rozwiązania. W tych przypadkach można skorzystać ze sposobu Czapłygina ulepszenia przybliżeń.

Załóżmy, że $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ w obszarze ograniczonym prostymi $x = x_0$ i $x = x_0+a$ oraz krzywymi $y = u(x)$ i $y = U(x)$. Wówczas zamiast funkcji $u(x)$ możemy wziąć funkcję $u_1(x) = u(x) + z(x)$, gdzie $z(x)$ spełnia równanie różniczkowe $z' = z\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \psi(x)$ z warunkiem początkowym $z(x_0) = 0$, zaś $\psi(x) = f(x,u) - u'$.

Natomiast w miejsce funkcji $U(x)$ można wziąć funkcję $U_1(x) = U(x) - T(x)$, gdzie $T(x)$ spełnia równanie $T' = \dfrac{f(x,U) - f(x,u)}{U-u}T + Q(x)$ z warunkiem początkowym $T(x_0) = 0$, zaś $Q(X) = U' - f(x,u)$.

Mamy oczywiście w tym przypadku, że

$$u(x) \leqslant u_1(x) \leqslant y(x) \leqslant U_1(x) \leqslant U(x).$$

Jeżeli $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \leqslant 0$, to stosujemy postępowanie odwrotne, tzn. bierzemy $U_1(x) = U(x) - Z(x)$, gdzie $Z(x)$ jest rozwiązaniem równania $Z' = Z\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,u) - \psi(x)$, z warunkiem $Z(x_0) = 0$, zaś $\psi(x) = U' - f(x,U)$ oraz $u_1(x) = u(x) + T(x)$, gdzie $T(x)$ spełnia równanie $T' = \dfrac{f(x,U) - f(x,u)}{U-u}T - Q(x)$, z warunkiem początkowym $T(x_0) = 0$, a $Q(x) = f(x,u) - u'$. Wtedy także $u_1(x) \leqslant y(x) \leqslant U_1(x)$.

Przykład 6.2. Stosując metodę ulepszenia przybliżeń do równania z przykładu 6.1 otrzymujemy dla $z(x)$ i $T(x)$ następujące równania:

$$Z' = \frac{2x^3}{3}z + \frac{x^6}{9},$$
$$T' = \left(\operatorname{tg} x + \frac{x^3}{3}\right)T + (1 - x^2).$$

Rozwiązaniami tych równań spełniającymi warunek początkowy $z(0) = T(0) = 0$ są funkcje:

$$z = e^{\frac{x^4}{6}} \int\limits_0^x e^{-\frac{x^4}{6}} \frac{x^6}{9} \,\mathrm{d}x,$$

$$T = \frac{1}{\cos x} e^{\frac{x^4}{12}} \int\limits_0^x \left(1 - x^2\right) e^{-\frac{x^4}{12}} \cos x \,\mathrm{d}x,$$

natomiast:

$$u_1 = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{9} e^{\frac{x^4}{6}} \int\limits_0^x e^{-\frac{x^4}{6}} \,\mathrm{d}x,$$

$$U_1 = \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} e^{\frac{x^4}{12}} \int\limits_0^x \left(1 - x^2\right) e^{-\frac{x^4}{12}} \cos x \,\mathrm{d}x.$$

6.2. Metoda Rungego–Kutty

Zajmiemy się równaniem $y' = f(x, y)$ z warunkiem początkowym $y(x_0) = y_0$. Załóżmy, że funkcja $f(x, y)$ posiada ciagłe pochodne cząstkowe do rzędu n.

Oznaczmy: $h = x - x_0$, $y_0^{(k)} = y_0^{(k)}(x_0)$. Przybliżoną wartość funkcji w punkcie x możemy otrzymać ze wzoru Taylora

$$y(x) \cong y_0 + y_0' h + \frac{1}{2} y_0'' h^2 + \cdots + \frac{1}{n!} y_0^{(n)} h^n \tag{6.1}$$

z błędem $O(h^n)$.

Występujące we wzorze pochodne możemy obliczyć z następujących zależności:

$$\begin{aligned} y_0' &= f(x_0, y_0) = f_0 \\ y_0'' &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) y_0' \end{aligned} \tag{6.2}$$

Różniczkując kolejno można uzyskać następne pochodne.

Chcąc uniknąć obliczeń przy wyznaczaniu pochodnych, rozpatrzmy liniową kombinację funkcji $k_i(h)$ $(i = 1, \ldots, r)$

$$\sum_{i=1}^{r} p_{ri} k_i(h) \tag{6.3}$$

gdzie:

$$k_i(h) = h f(\xi_i, \eta_i),$$

$\xi_i = x_0 + \alpha_i h,$
$\eta_i = y_0 + \sum\limits_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j(h)\alpha_i,$
gdzie: α_i, β_{ij}, p_{ri} są pewnymi stałymi, przy czym $\alpha_1 = 0$.

Stałe α_i, β_{ij}, p_{ri} dobieramy tak, aby funkcja

$$\varphi_r(h) = y(x_0 + h) - y_0 - \sum_{i=1}^{r} p_{ri} k_i(h) \tag{6.4}$$

spełniała warunki:

$$\varphi_r(0) = \varphi_r'(0) = \ldots = \varphi_r^{(s)}(0) = 0, \qquad \varphi_r^{(s+1)}(0) \neq 0,$$

z możliwie największym s i przy dowolnych h i $f(x, y)$. Wówczas otrzymujemy

$$y(x_0 + h) \cong y(x_0) + \sum_{j=1}^{r} p_{ri} k_i(h),$$

przy czym błąd przybliżenia wynosi

$$R_r(h) = \frac{h^{s+1}\varphi_r^{(s+1)}(\xi)}{(s+1)!}, \quad \text{gdzie } \xi \in [0, h].$$

Przypadek r = 1

Ze wzoru (6.4) mamy:

$$\varphi_1(h) = y(x_0 + h) - y_0 - p_{11}k_1(h) = y(x_0 + h) - y_0 - p_{11}hf(x_0, y_0),$$
$$\varphi_1'(h) = y'(x_0 + h) - p_{11}f(x_0, y_0).$$

Dla $h = 0$ otrzymujemy

$$\varphi_1'(0) = y'(x_0) - p_{11}f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) - p_{11}f(x_0, y_0).$$

Mamy więc $\varphi_1(0) = 0$ dla $p_{11} = 1$.

Zauważmy, że $\varphi_1''(0) = y''(x_0) \neq 0$ dla większości przypadków. Otrzymujemy więc

$$y(x_0 + h) \cong y_0 + hf(x_0, y_0).$$

W tym przypadku dokładność metody ma rząd h^2, czyli

$$R_1(h) = \frac{h^2}{2!} y''(\xi), \qquad \xi \in [x_0, x_0 + h].$$

Przypadek r = 2

Mamy więc:

$$\varphi_2(h) = y(x_0 + h) - y_0 - [p_{21}k_1(h) + p_{22}k_2(h)],$$

$$\varphi_2'(h) = y'(x_0 + h) - [p_{21}k_1'(h) + p_{22}k_2'(h)].$$

Z kolei

$$\varphi_2'(0) = y'(x_0) - [p_{21}f(x_0, y_0) + p_{22}f(x_0, y_0)],$$

ponieważ

$$k_1(h) = hf(x_0, y_0),$$

stąd $k_1'(h) = f(x_0, y_0)$, natomiast

$$k_2(h) = hf(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + \beta_{11}hf(x_0, y_0)),$$

stąd

$$\begin{aligned} k_2'(h) = {} & f(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + \beta_{11}hf(x_0, y_0)) + \\ & + h\left[\alpha^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + \beta_{11}hf(x_0, y_0)) + \right. \\ & \left. + \beta_{11}f(x_0, y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + \beta_{11}hf(x_0, y_0))\right]. \end{aligned}$$

Mamy więc $\varphi_2'(0) = 0$ jeżeli $p_{21} + p_{22} = 1$.
Dalej

$$\begin{aligned} \varphi_2''(0) &= y''(x_0) - [p_{21}k_1''(0) + p_{22}k_2''(0)] = \\ &= y''(x_0) - p_{22}\left[2\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\alpha_2 + 2\beta_{11}f(x_0, y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right] = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + f(x_0, y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) - \\ &\quad - 2p_{22}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\alpha_2 + 2\beta_{11}f(x_0, y_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right], \end{aligned}$$

czyli $\varphi_2''(0) = 0$ jeżeli $1 - 2p_{22}\alpha_2 = 0$ oraz $1 - 2p_{22}\beta_{11} = 0$.
Otrzymujemy więc na nieznane współczynniki następujące układy równań:

$$\begin{aligned} & p_{21} + p_{22} = 1, \\ & 2p_{22}\alpha_2 = 1, \\ & 2p_{22}\beta_{11} = 1. \end{aligned}$$

Układ ten posiada nieskończenie wiele rozwiązań. Na przykład $\alpha_2 = \beta_{11} = 1$, $p_{22} = p_{21} = \frac{1}{2}$. Otrzymujemy wtedy

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + \frac{1}{2}[f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y_0 + hf(x_0, y_0))].$$

Błąd przybliżenia jest teraz rzędu h^3.

Przypadek r = 3

Mamy wówczas

$$\varphi_3(h) = y(x_0 + h) - y(x_0) - \big[p_{31}k_1(h) + p_{32}k_2(h) + p_{33}k_3(h)\big].$$

Przyrównując pochodne do rzędu czwartego funkcji $\varphi_3(h)$ w punkcie $h = 0$ do zera otrzymujemy następujące warunki na stałe występujące w określeniu funkcji $\varphi_3(h)$ (wzór (6.4)):

$$\begin{aligned}
&\alpha_2 = \beta_{21},\\
&\alpha_3 = \beta_{31} + \beta_{32},\\
&p_{31} + p_{32} + p_{33} = 1,\\
&p_{32}\alpha_2 + p_{33}\alpha_3 = \frac{1}{2},\\
&p_{32}\alpha_2^2 + p_{33}\alpha_3^2 = \frac{1}{3},\\
&p_{33}\beta_{32}\alpha_2 = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Układ ten posiada nieskończenie wiele rozwiązań. Jednym z nich jest: $\alpha_2 = \beta_{21} = \frac{1}{2}$, $\alpha_3 = 1$, $\beta_{32} = 2$, $\beta_{31} = -1$, $p_{33} = \frac{1}{6}$, $p_{32} = \frac{2}{3}$, $p_{31} = \frac{1}{6}$.

Otrzymujemy wówczas

$$y(x_0 + h) \approx y(x_i) + \frac{1}{6}[k_1 + 4k_2 + k_3],$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
&k_1 = hf(x_0, y_0),\\
&k_2 = hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}k_1),\\
&k_3 = hf(x_0 + h, y_0 - k_1 + 2k_2).
\end{aligned}$$

Dokładność jest w tym przypadku rzędu h^4.

Metodę Rungego–Kutty można stosować również do układu równań rzędu pierwszego postaci

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y, z) \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = g(x, y, z) \end{cases},$$

z warunkiem początkowym $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$.

Konstruujemy funkcje:

$$k_i(h) = hf(\xi_i, \eta_i, \zeta_i),$$

$$l_i(h) = hg(\overline{\xi}_i, \overline{\eta}_i, \overline{\zeta}_i),$$

gdzie:

$$
\begin{aligned}
\xi_i &= x_0 + \alpha_i h, \quad \alpha_1 = 0,\\
\overline{\xi}_i &= x_0 + \overline{\alpha}_i h, \quad \alpha_1 = 0,\\
\eta_i &= y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j,\\
\overline{\eta}_i &= y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \overline{\beta}_{ij} k_j,\\
\zeta_i &= z_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij} l_j,\\
\overline{\zeta}_i &= z_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \overline{\gamma}_{ij} l_j,
\end{aligned}
$$

a następnie aproksymujemy:

$$
\begin{aligned}
y(x_0 + h) &\cong y(x_0) + \sum_{i=1}^{r} p_{ri} k_i(h),\\
z(x_0 + h) &\cong z(x_0) + \sum_{i=1}^{r} q_{ri} l_i(h),
\end{aligned}
$$

gdzie p_{ri}, q_{ri} $(i = 1, \ldots, r)$ oznaczają pewne stałe.

Dobierając wartości stałych, podobnie jak w przypadku jednego równania, otrzymujemy przybliżone rozwiązanie układu z dokładnością rzędu h^{s+1}.

Metodę tę można stosować dla dowolnego układu równań rzędu pierwszego, którego prawe strony są dostatecznie regularne.

Metoda Rungego–Kutty znajduje również zastosowanie w równaniach rzędu drugiego $y'' = f(x, y, y')$ z warunkami $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.

Sprowadzamy równanie rzędu drugiego do układu równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$
\begin{aligned}
y' &= z,\\
z' &= f(x, y, z),
\end{aligned}
$$

z warunkami $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = y_1$, otrzymujemy przypadek poprzedni.

Przykład 6.3. Dany jest układ

$$
\begin{cases} y' = -3y - z \\ z' = y - z \end{cases},
$$

gdzie: $y(0) = 2$, $z(0) = -1$. Znaleźć wartość rozwiązania $y(0.1)$, $z(0.1)$ z dokładnością do 0.001.

Zastosujemy tutaj metodę Rungego–Kutty z dokładnością rzędu h^3, przyjmując $h = 0.1$.

Korzystamy ze wzorów wyprowadzonych w przypadku $r = 2$:

$$\begin{aligned}
&y(x_0 + h) \cong y(x_0) + [p_{21}k_1(h) + p_{22}k_2(h)],\\
&z(x_0 + h) \cong z(x_0) + [q_{21}l_1(h) + q_{22}l_2(h)],
\end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
&k_1(h) = hf(x_0, y_0, z_0),\\
&k_2(h) = hf(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + \beta_{21}hf(x_0, y_0, z_0), z_0 + \gamma_{21}hg(x_0, y_0, z_0)),\\
&l_1(h) = hg(x_0, y_0, z_0),\\
&l_2(h) = hg(x_0 + \overline{\alpha}_2 h, y_0 + \overline{\beta}_{21}hf(x_0, y_0, z_0), z_0 + \overline{\gamma}_{21}hg(x_0, y_0, z_0)).
\end{aligned}$$

Podobnie jak w metodzie Rungego–Kutty dla jednego równania otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
&\alpha_2 = \beta_{21} = \overline{\alpha}_2 = \overline{\beta}_{21} = \gamma_{21} = \overline{\gamma}_{21} = 1,\\
&p_{22} = p_{21} = q_{22} = q_{21} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned}
y(0.1) &\cong y(0) + \frac{1}{2}hf(0, 2, -1) + \frac{1}{2}hf(h, 2 + hf(0, 2, -1), -1 + hg(0, 2, -1)) =\\
&= 2 + \frac{1}{2}0.1(-4) + \frac{1}{2}0.1f(0.1, 2 + 0.1(-0.4), -1 + 0.1 \cdot 3) =\\
&= 2 - \frac{1}{2}0.4 + \frac{1}{2}0.1 \cdot f(0.1, 1.6, -0.7) = 2 - 0.2 + 0.1(-4.1)\frac{1}{2} =\\
&= 1.8 - 0.205 = 1.595,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z(0,1) &\cong z(0) + \frac{1}{2}hg(0, 2, -1) + h\frac{1}{2}g(h, 2 + f(0, 2, -1)h, -1 + hg(0, 2, -1)) =\\
&= -1 + 0.5 \cdot 0.1 \cdot 3 + 0.5 \cdot 0.1 \cdot 2.3 = -1 + 0.15 + 0.115 = -0.735.
\end{aligned}$$

Zadania

1. Korzystając z metody Czapłygina znaleźć oszacowania dla rozwiązania równania $y' = x^4 + y^4$ dla $x \in [0, 2]$ spełniającego warunek początkowy $y(0) = 0$.
2. Za pomocą ulepszonej metody Czapłygina znaleźć oszacowanie dla rozwiązania równania $y' = x^6 + 3y^4$ dla $x \in [0, 1]$ spełniającego warunek początkowy $y(0) = 0$.

3. Znaleźć za pomocą metody Rungego–Kutty wartość rozwiązania $y\,(0.1)$ równania $y' = x^2 + y^2$ spełniającego warunek $y(0) = 0$ z dokładnością rzędu h^3 (przyjąć $h = 0.1$).

4. Znaleźć za pomocą metody Rungego–Kutty z dokładnością rzędu h^2 przybliżone rozwiązanie równania $y' = \dfrac{y}{x} - y^2$, z warunkiem $y(1) = 1$ dla $x \in [1, 2]$, gdzie $h = 0.2$.

5. Korzystając z metody Rungego–Kutty znaleźć przybliżone wartości $y\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $z\left(\dfrac{1}{2}\right)$, z dokładnością do 0.01, gdzie $y(x)$, $z(x)$ spełniają układ równań

$$\begin{cases} y = -x + 2y + z \\ z = x + 2y + 3z \end{cases},$$

z warunkami $y(0) = 2$, $z(0) = -2$.

6. Znaleźć przybliżone rozwiązanie na odcinku $[0, 0.5]$ równania $y'' = -\dfrac{0.0003}{y^2} + {}$ $+0.01(y')^2$ z warunkami $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, z dokładnością 0.01.

Rozdział 7.

Pewne metody różnicowe dla równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych

Celem tego rozdziału jest zasygnalizowanie Czytelnikom możliwości stosowania metod różnicowych w równaniach o pochodnych cząstkowych, natomiast głębsze zaznajomienie się z nimi wymaga przestudiowania literatury z tego zakresu, np. [2].

7.1. Metoda różnicowa dla równań różniczkowych typu parabolicznego

7.1.1. Zagadnienie Cauchy'ego

Rozważmy liniowe równanie różniczkowe typu parabolicznego

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - c(x,t)u = f(x,t) \tag{7.1}$$

gdzie funkcje a, b, c, f są funkcjami ciągłymi dla $x \in R$, $t \geqslant 0$.

Zadanie będzie polegało na znalezieniu rozwiązania spełniającego warunek początkowy $u(x,0) = \varphi(x)$ dla $x \in R$.

Konstruujemy siatkę składającą się z prostych $x = ih$, $t = jk$ ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ $j = 0, 2, \ldots,$ h, k są ustalonymi liczbami). Punkty przecięcia prostych będziemy nazywali punktami węzłowymi i oznaczymy je przez M_{ij} (punkt przecięcia prostych $x = ih$ i $t = jk$).

Pochodne występujące w równaniu zastępujemy przez odpowiednie ilorazy różnicowe:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(M_{ij}) \cong \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} \\
&\frac{\partial u}{\partial x}(M_{ij}) \cong \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2^k} \\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_{ij}) \cong \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}
\end{aligned} \tag{7.2}$$

gdzie u_{ij} oznacza wartość rozwiązania w punkcie M_{ij}.

Wstawiając odpowiednie ilorazy różnicowe do równania (7.1) mamy

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j+1}-u_{ij}}{k} = a_{ij}\left(\frac{u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1,j}}{h^2}\right) + \\ + b_{ij}\frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{h^2} + c_{ij}u_{ij} + f_{ij} \\ (j = 1,2,\ldots, \quad i = 0,\pm 1,\pm 2,\ldots) \end{aligned} \tag{7.3}$$

gdzie: a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, f_{ij} oznaczają wartości funkcji $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$ w punktach węzłowych M_{ij}.

Otrzymane równanie różnicowe aproksymuje analizowane równanie różniczkowe z dokładnością $O(h^2+k)$.

Dla węzłów leżących na osi $t=0$ wartości rozwiązania otrzymujemy z warunku początkowego

$$u_{i0} = \varphi(ih) \qquad i = 0,\pm 1,\ldots \tag{7.4}$$

Przekształcając równanie różnicowe (7.3) otrzymujemy

$$\begin{aligned} u_{i,j+1} = u_{ij} + k\Bigg[a_{ij}\frac{u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1,j}}{h^2} + \\ + b_{ij}\frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2h} + c_{ij}u_{ij} + f_{ij}\Bigg] \\ (j = 1,2,\ldots, \quad i = 0,\pm 1,\pm 2,\ldots) \end{aligned} \tag{7.5}$$

Z postaci tego równania łatwo widać, że znając wartości rozwiązania na poziomie j-tym, można wyliczyć wartość rozwiązania dla poziomu $j+1$. Schemat taki nosi nazwę schematu jawnego. Wartości rozwiązania przybliżonego znajdujemy więc według wzorów (7.4) i (7.5).

7.1.2. Zagadnienie mieszane

Zajmiemy się równaniem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{7.6}$$

Będziemy szukać rozwiązania w zbiorze $D = \{(x,y)\colon x \in [a,b], t \in [0,T]\}$, spełniającego warunki:

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad \text{dla } x \in [a,b] \tag{7.7}$$

$$\begin{aligned} \beta_1\frac{\partial u}{\partial x}(a,t) + \gamma_1 u(a,t) = \psi_1(t), \qquad t \in [0,T] \\ \beta_2\frac{\partial u}{\partial x}(b,t) + \gamma_2 u(b,t) = \psi_2(t), \qquad t \in [0,T] \end{aligned} \tag{7.8}$$

gdzie: β_1, β_2, γ_1, γ_2 są funkcjami zmiennej t.

Skonstruujemy siatkę składającą się z prostych: $x = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $t = jl$, $j = 0, 1, \ldots, m$, gdzie $h = \dfrac{b-a}{n}$, $l = \dfrac{T}{m}$.

Węzły leżące na prostych $x = a$, $x = b$, $t = 0$ nazywamy węzłami brzegowymi, pozostałe — węzłami wewnętrznymi.

Zastępując pochodne występujące w równaniu różniczkowym przez odpowiednie ilorazy różnicowe, otrzymujemy równanie różnicowe dla węzłów wewnętrznych

$$u_{i,j+1} = u_{ij} + \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}, \quad j = 1, \ldots, m, \quad i = 1, \ldots, n-1 \tag{7.9}$$

Dla węzłów leżących na prostej $t = 0$ wartość rozwiązania przybliżonego otrzymujemy z warunku (7.7)

$$u_{i0} = \varphi_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n), \quad \text{gdzie } \varphi_i = \varphi(a + ih) \tag{7.10}$$

Dla węzłów leżących na prostych $x = a$ i $x = b$, z warunków brzegowych (7.8), zastępując pochodną $\dfrac{\partial u}{\partial x}(M_{ij})$ przez iloraz $\dfrac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{h}$, mamy:

$$\begin{aligned} &\beta_{1j}\frac{u_{1j} - u_{0j}}{h} - \gamma_{1j}u_{0j} = \psi_{1j} \\ &\beta_{2j}\frac{u_{nj} - u_{(n-1)j}}{h} + \gamma_{2j}u_{nj} = \psi_{2j} \qquad (j = 0, 1, \ldots, m) \end{aligned} \tag{7.11}$$

gdzie: $\beta_{1j} = \beta_1(jl)$, $\beta_{2j} = \beta_2(jl)$, $\gamma_{1j} = \gamma_1(jl)$, $\gamma_{2j} = \beta_2(jl)$, $\psi_{1j} = \psi_1(jl)$, $\psi_{2j} = = \beta_2(jl)$.

Wprowadzając oznaczenie $\alpha = \dfrac{k}{h^2}$ uzyskamy następujący problem różnicowy

$$u_{i,j+1} = (1 - 2\alpha)u_{ij} + \alpha(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}),$$

dla: $i = 1, \ldots, n-1$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$

$$\begin{cases} \beta_{1j}u_{1j} + (h\gamma_{1j} - \beta_{1j})u_{0j} = h\psi_{1j} & \\ (\beta_{2j} + h\gamma_{2j})u_{nj} - \beta_{2j}u_{n-1j} = h\psi_{2j} & \text{dla } j = 1, 2, \ldots, m \\ u_{i0} = \varphi_i & \text{dla } i = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{7.12}$$

Od schematu różnicowego będziemy żądali, aby był on zbieżny i stabilny.

Definicja 7.1. *Schemat różnicowy nazywa się schematem zbieżnym, jeżeli przy zadanym sposobie zmierzania h i k do zera, rozwiązanie układu różnicowego zmierza do dokładnego rozwiązania równania różnicowego.*

Definicja 7.2. *Schemat różnicowy nazywamy stabilnym, jeśli mały błąd dopuszczalny w procesie liczenia popełniony na jednym poziomie $t = jh$, nie rośnie przy przejściu na inny poziom.*

Dokładniej, jeżeli błąd popełniliśmy na przykład na poziomie pierwszym ($t = 0$) i v_i oznacza błąd popełniony przy wyliczaniu wartości w węźle M_{i0}, a v_{ij} powstały na skutek tego błąd w węźle M_{ij}, to schemat różnicowy nazywamy stabilnym, jeżeli dla każdego $\epsilon > 0$, istnieje $\delta > 0$ takie, że jeżeli $\sum\limits_{i=0}^{n-1} v_{i0}^2 \leqslant \delta$, to $\sum\limits_{i=0}^{n-1} v_{ij}^2 \leqslant \epsilon$ dla dowolnego j przy czym δ nie zależy od h i k.

Rozpatrywany przez nas schemat różnicowy jest schematem zbieżnym i stabilnym, jeżeli $\alpha = \dfrac{k}{h^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Uwaga 7.1. Metody różnicowe można stosować do dużo bardziej skomplikowanych równań różniczkowych, np. nieliniowych, zawierających pochodne mieszane itp.

Przykładowo w równaniu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_1(x,y,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2(x,y,t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_3(x,y,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \\ + b_1(x,y,t)\frac{\partial u}{\partial x} + b_2(x,y,t)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y,t)u + f(x,y,t)$$

aproksymując wartość pochodnej mieszanej w punkcie M o współrzędnych $x = ih$, $y = jh$, $t = sl$ można zastosować jeden z ilorazów różnicowych

$$\frac{1}{h^2}(u_{i+1,j,s} + u_{i,j-1,s} - u_{i,j,s} - u_{i+1,j-1,s})$$

lub

$$\frac{1}{h^2}(-u_{i+1,j,s} - u_{i,j+1,s} + u_{i,j,s} + u_{i+1,j+1,s}),$$

gdzie $u_{i,j,s}$ oznacza wartość rozwiązania w punkcie o współrzędnych $x = ih$, $y = jh$, $t = sl$.

7.2. Metoda różnicowa dla równań różniczkowych typu hiperbolicznego

7.2.1. Zagadnienie Cauchy'ego

Rozpatrzmy równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y) \tag{7.13}$$

z warunkami:

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \psi(x) \quad \text{dla } x \in R \tag{7.14}$$

Wprowadzając siatkę złożoną z prostych $x = ih$, $i = 0, \pm 1, \ldots$ oraz $y = jl$, $j = 0, 1, \ldots$ i zastępując w punkcie węzłowym M_{ij} pochodne przez ilorazy różnicowe:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\cong \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &\cong \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{l^2} \end{aligned} \tag{7.15}$$

otrzymujemy w węźle M_{ij} następujące równanie różnicowe

$$u_{i,j+1} = \frac{l^2}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) - 2u_{ij} + u_{i,j-1} - l^2 f_{ij} \tag{7.16}$$

Do obliczania wartości rozwiązania w węzłach na poziomie $y = (j+1)l$ potrzebne nam są wartości na poziomie $y = jl$ i $y = (j-1)l$, czyli żeby rozpocząć obliczenia musimy znać wartości rozwiązania dla $j = 0$ i $j = 1$.

Możemy to uzyskać przez:

1. Zastąpienie w warunku początkowym (7.14) pochodnej $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x, 0)$ przez iloraz $\dfrac{u_{i1} - u_{i0}}{l}$. Wówczas na znalezienie u_{i1} i u_{i0} otrzymujemy układ równań:

$$u_{i0} = \varphi_i, \qquad u_{i1} - u_{i0} = l\psi_i, \qquad i = 0, \pm 1, \ldots \tag{7.17}$$

2. Wprowadzenie dodatkowego poziomu dla $j = -1$ $(y = -1)$ i zastąpienie pochodnej $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x, 0)$ przez $\dfrac{u_{i1} - u_{i,-1}}{2l}$. Wówczas z warunków początkowych otrzymamy:

$$u_{i0} = \varphi_1, \qquad u_{i1} - u_{i,-1} = 2l\psi_i \tag{7.18}$$

Wykorzystujemy również fakt, że równanie różnicowe powinno być spełnione w węźle M_{i0}, czyli

$$l^2(u_{i+1,0} - 2u_{i0} + u_{i-1,0}) - h^2(u_{i1} - 2u_{i0} + u_{i,-1}) = l^2 h^2 f_{i0} \tag{7.19}$$

a stąd

$$u_{i,-1} = -l^2 f_{i0} + \frac{l^2}{h^2}(u_{i+1,0} - 2u_{i0} + u_{i-1,0}) - (u_{i1} - 2u_{i0}) \tag{7.20}$$

Wstawiając (7.8) do (7.6) obliczamy potrzebne nam wartości u_{i0} i u_{i1}.

Drugi sposób daje nam lepszą aproksymację warunków brzegowych.

Zbieżność otrzymanego ciągu wartości rozwiązania przybliżonego zapewnia warunek $\dfrac{l}{h} < 1$, na kroki h i l.

7.2.2. Zagadnienie mieszane

Rozpatrzmy zagadnienie znalezienia rozwiązania równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

z warunkami:

$$\begin{array}{lll} u(x,0) = \varphi_1(x), & \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \psi(x) & \text{dla } x \in [0,1] \\ u(0,y) = \gamma_1(y), & u(1,y) = \gamma_2(y) & \text{dla } y \in [0,A] \end{array} \tag{7.21}$$

Konstruujemy siatkę, podobnie jak w poprzednim przypadku, tzn. proste $x = ih$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, $h = \dfrac{1}{n}$, $y = jl$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$, $ml \leqslant A < (m+1)l$. Węzły leżące na prostych $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$ nazywamy węzłami brzegowymi, natomiast pozostałe węzłami wewnętrznymi. Wartości w węzłach wewnętrznych, jak i dla węzłów leżących na prostej $y = 0$ $(x \in (0, 1))$ znajdujemy według wzorów (7.16) oraz (7.17) lub (7.16), (7.18), (7.20).

Dla węzłów brzegowych leżących na prostych $x = 0$, $x = 1$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} u_{0j} &= \gamma_1(jl) = \gamma_{1j} \\ u_{nj} &= \gamma_2(jl) = \gamma_{2j} \end{aligned} \tag{7.22}$$

7.3. Metoda różnicowa dla równań różniczkowych typu eliptycznego

Będziemy rozpatrywać równanie Laplace'a w pewnym obszarze S o brzegu C

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{7.23}$$

z warunkiem

$$u(x, y) = f(x, y) \qquad \text{dla } (x, y) \in C \tag{7.24}$$

Ustalimy liczbę dodatnią $h > 0$ i zbudujemy siatkę złożoną z dwóch rodzin prostych wzajemnie prostopadłych, odległych od siebie o h.

Dany obszar S zastąpimy przez obszar S_h będący sumą kwadratów o boku h leżących wewnątrz S. Przez C_h oznaczmy łamaną będącą brzegiem S_h.

W węźle M_{ik} krzywej C_h określimy wartość brzegową jako równą wartości funkcji f w najbliższym punktowi M_{ij} punkcie brzegu C.

Oznaczymy przez u_{ik} wartość rozwiązania u w punkcie (x_i, y_k) gdzie $x_i = ih$, $y_k = kh$. Zastępując pochodne występujące w równaniu przez ilorazy różnicowe (7.2), otrzymujemy równanie

$$u_{i+1,k} + u_{i,k+1} + u_{i-1,k} + u_{i,k-1} - 4u_{ik} = 0 \tag{7.25}$$

dla $(x_i, y_k) \in S_h$, natomiast dla punktów węzłowych leżących na C_h

$$u_{ik} = f_h^{ik} \qquad \text{dla } (x_i, y_k) \in C_h \tag{7.26}$$

Rozwiązanie tego zagadnienia polega na znalezieniu wartości funkcji siatkowej u_{ik} w wewnętrznych punktach węzłowych obszaru S_h.

W każdym wewnętrznym punkcie węzłowym powinno być spełnione równanie różnicowe (7.25). A więc dla wyznaczenia wartości u_{ik} otrzymujemy układ równań algebraicznych liniowych o liczbie równań równej liczbie niewiadomych. Układ ten posiada rozwiązanie jednoznaczne.

Uwaga 7.2. Zastępując równanie różniczkowe (7.23) przez równanie różnicowe (7.25), popełniamy błąd wielkości h^2.

Aproksymacją wartości rozwiązania w punktach brzegowych siatki można posłużyć się np. wzorem

$$u(A) = \frac{\delta_A u(M) + hf(B)}{\delta_A + h},$$

gdzie A oznacza punkt brzegowy siatki ($A \in C_h$, $A = (x_i, y_j)$, $x_i = ih$, $y_j = jh$), B jest punktem należącym do brzegu rozważanego obszaru $S(B \in C)$, będącym punktem przecięcia prostej $y = jh$ z krzywą C, leżącym najbliżej punktu A, M jest punktem węzłowym obszaru S_h leżącym na prostej $y = jh$, najbliżej punktu A, δ_A oznacza odległość punktu A od punktu B (oczywiście $\delta_A < h$).

Błąd popełniany przy tego rodzaju aproksymacji jest również wielkości h^2.

Zadania

Rozwiązać metodą różnicową następujące problemy graniczne:

1. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ przy warunkach:

$$u(x, 0) = \sin \pi x \qquad \text{dla } x \in [0, 1]$$

oraz $u(0, 1) = u(1, t) = 0$

2. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ z warunkami:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - 2u = 1 \qquad \text{dla } x = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} - 2u = 2 \qquad \text{dla } x = 1$$

oraz $u(x, 0) = \cos x$

3. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ z warunkami $u(0,x) = 0$ oraz

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0)=0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,\tfrac{1}{2})=1$$

4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x + y$ z warunkami: $u(x,0) = e^x$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 2x$

5. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ z warunkami: $u(x,0) = \cos x$, $u(0,y) = 1$, $u(\frac{\pi}{2},y) = 0$

6. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ z warunkami: $u(x,0) = 0$, $u(1,y) = \sin \pi y$, $u(x,0) = 0$, $u(x,1) = 0$

Spis literatury

[1] Bicadze A. W.: *Równania fizyki matematycznej.* Warszawa, PWN 1984

[2] Bieriezin N. S., Żidkow N. P.: *Metody wyczislenij.* T. II. Moskwa, Gosizdat. fiz.--mat. lit. 1959

[3] Bierski F.: *Struktury algebraiczne. Elementy algebry liniowej. Analizy macierzy z zastosowaniem od układów równań różniczkowych i form kwadratowych.* Kraków, Wydawnictwa AGH 1977

[4] Bierski F.: *Równania różniczkowe cząstkowe.* Kraków, Wydawnictwa AGH 1985

[5] Matwiejew N. M.: *Zadania z równań różniczkowych zwyczajnych.* Warszawa, PWN 1974

[6] Maurin L., Mączyński M.: *Matematyka.* T. II. Warszawa, PWN 1975

[7] Mikhallov V.: *Equations aux derivees partielles.* Moskwa, Mir 1980

[8] Smirnow M. M.: *Zadania z równań różniczkowych cząstkowych.* Warszawa, PWN 1974

[9] Tichonow A. N., Samarski A. A.: *Równania fizyki matematycznej.* Warszawa, PWN 1963