

METODY NUMERYCZNE RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH CZĄSTKOWYCH

1. Klasyfikacja liniowych równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu. Podać odpowiednie przykłady i krótko omówić interpretację fizyczną.
2. Podać definicję nieliniowego równania różniczkowego cząstkowego drugiego rzędu typu parabolicznego w sensie Waltera. Podać przykłady równań liniowych, które są paraboliczne w zwykłym sensie (odpowiednia macierz jest osobliwa), ale nie są paraboliczne w sensie Waltera.
3. Udowodnić, że macierz symetryczna ze słabo (silnie) dominującą diagonalą jest półokreślona dodatnio (dodatnio określona).
4. Podać definicje: zgodności, rzędu aproksymacji, zbieżności, stabilności i dobrego postawienia metody różnicowej.
5. Podać wzory Taylora z resztą Peana i Lagrange'a. Udowodnić twierdzenie o szybkości aproksymacji pochodnej ilorazem różnicowym dla jednego wybranego ilorazu.
6. Udowodnić twierdzenie o zbieżności jawnej metody różnicowej dla równania ciepła z warunkiem Dirichleta.
7. Udowodnić twierdzenie o zgodności jawnej metody różnicowej dla równania ciepła z warunkiem Dirichleta.
8. Udowodnić twierdzenie o zbieżności niejawnej metody różnicowej dla równania ciepła z warunkiem Dirichleta.
9. Udowodnić twierdzenie o istnieniu rozwiązania schematu w niejawnej metodzie różnicowej dla równania ciepła z warunkiem Dirichleta.
10. Udowodnić twierdzenie o zbieżności jawnej metody różnicowej dla nieliniowego równania ciepła z warunkiem Dirichleta.
11. Udowodnić twierdzenie o zbieżności jawnej metody różnicowej dla nieliniowego równania parabolicznego z warunkiem Dirichleta.
12. Podać definicję normy. Pokazać, że norma macierzowa $\| \cdot \|_{\infty}$ jest zgodna z normą wektorową $\| \cdot \|_{\infty}$. Sprawdzić, czy norma macierzowa $\| \cdot \|_{\infty}$ spełnia *nierówność multiplikatywną* - warunek (4). Podać przykład normy macierzowej i wektorowej, które nie są zgodne.
13. Podać definicję zasady maksimum dla macierzy względem zadanej podprzestrzeni. Udowodnić twierdzenie Vargi lub wkw. o zasadzie maksimum dla znormalizowanej macierzy względem zadanej podprzestrzeni.
14. Podać definicję rozszerzonej zasady maksimum dla macierzy względem zadanej podprzestrzeni. Udowodnić odpowiednie twierdzenie, gdy macierz jest monotoniczna.
15. Podać definicję monotoniczności macierzy. Udowodnić twierdzenie o związku monotoniczności macierzy z zasadą maksimum dla znormalizowanej macierzy względem zadanej podprzestrzeni oraz wkw. monotoniczności macierzy.
16. Podać definicję dodatniego typu macierzy. Jaki jest związek macierzy dodatniego typu z jej monotonicznością i dominacją diagonalą (drugi związek udowodnić)?

17. Omówić kwestię istnienia rozwiązania schematu różnicowego dla równania Poissona z warunkiem brzegowym typu Dirichleta oraz zgodności metody różnicowej dla tego zagadnienia.
18. Udowodnić twierdzenie o oszacowaniu a priori rozwiązania schematu różnicowego dla równania Poissona z warunkiem Dirichleta.
19. Udowodnić, że metoda różnicowa dla równania Poissona z warunkiem Dirichleta jest stabilna.
20. Udowodnić, że metoda różnicowa dla równania Poissona z warunkiem Dirichleta jest zbieżna.
21. Omówić metodę prostych dla równania ciepła z warunkiem brzegowym typu Dirichleta. Sformułować odpowiednie twierdzenia o zbieżności.
22. Sformułować trzy postaci wariacyjne jednowymiarowego równania Poissona z warunkiem brzegowym typu Dirichleta. Udowodnić, że zagadnienia te są równoważne i mają jedyne rozwiązanie.
23. Omówić metody Galerkina, Ritza i elementów skończonych. Dokonać krótkiego porównania z metodami różnicowymi dla równań różniczkowych cząstkowych.
24. Udowodnić twierdzenie o związku równania wariacyjnego z minimalizacją pewnej formy kwadratowej.
25. Udowodnić twierdzenie o związku skończenie wymiarowego równania wariacyjnego z minimalizacją pewnej formy kwadratowej.
26. Udowodnić twierdzenie o istnieniu rozwiązania równań wariacyjnych w przestrzeniach Banacha i jej domkniętych podprzestrzeniach. Omówić zastosowanie tego twierdzenia do wykazania zbieżności metody Ritza w przypadku ośrodkowych przestrzeni Hilberta.
27. Podać przykłady baz dla metody elementów skończonych, Galerkina i Ritza. Pokazać zastosowanie na przykładzie wybranego zagadnienia wariacyjnego.