

Układy dynamiczne. Klasyfikacja punktów stacjonarnych na płaszczyźnie

Autorzy:

Vsevolod Vladimirov

2019


open
AGH E-PODRĘCZNIKI



Publikacja udostępniona jest na licencji Creative Commons Uznanie autorstwa - Na tych samych warunkach 3.0 Polska. Pewne prawa zastrzeżone na rzecz autorów i Akademii Górniczo-Hutniczej. Zezwala się na dowolne wykorzystanie treści publikacji pod warunkiem wskazania autorów i Akademii Górniczo-Hutniczej jako autorów oraz podania informacji o licencji tak długo, jak tylko na utwory zależne będzie udzielana taka sama licencja. Pełny tekst licencji dostępny na stronie <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/pl/>.

Autor: Vsevolod Vladimirov

Rozpatrzmy układ n równań różniczkowych zwyczajnych, których prawe strony nie zależą od zmiennej t :

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n); \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n); \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n).\end{aligned}\tag{1}$$

Będziemy zakładać, że funkcje f_i , $i = 1, \dots, n$, są różniczkowalne w sposób ciągły po wszystkich zmiennych x_i . Układ (1) nazywa się układem autonomicznym, albo też układem dynamicznym.

DEFINICJA

Definicja 1:

Punkt $(x_{1,0}, x_{2,0}, \dots, x_{n,0}) \in R^n$ nazywa się **punktem stacjonarnym** układu (1), jeżeli $f_i(x_{1,0}, x_{2,0}, \dots, x_{n,0}) = 0$, $i = 1, \dots, n$.

Zamiast pełnego układu (1), w małym otoczeniu punktu stacjonarnego można rozpatrywać jego **linearyzację**. Rozpatrzmy prawą stronę tego układu. Każdą funkcję $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ można w otoczeniu punktu $(x_{1,0}, x_{2,0}, \dots, x_{n,0})$ przedstawić, zgodnie ze wzorem Taylora, w postaci

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_{1,0}, x_{2,0}, \dots, x_{n,0})(x_k - x_{k,0}) + O(|\xi|^2),$$

gdzie $\xi = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k,0})^2}$ oraz

$$\lim_{|\xi| \rightarrow 0} \frac{O(|\xi|^2)}{|\xi|} = 0.$$

Zatem zachodzi

LEMAT

Lemat 1:

Układ dynamiczny w otoczeniu punktu stacjonarnego $(x_{1,0}, x_{2,0}, \dots, x_{n,0})$ da się przedstawić w postaci

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{bmatrix} + O(|\xi|^2),\tag{2}$$

gdzie

$$\xi_k = x_k - x_{k,0}, \quad a_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_{1,0}, x_{2,0}, \dots, x_{n,0}), \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Układ (2) nazywa się **linearyzacją układu dynamicznego (1) w otoczeniu punktu stacjonarnego** $(x_{1,0}, x_{2,0}, \dots, x_{n,0})$.

Okazuje się, że przy pewnych warunkach, rozwiązania układu (1) oraz rozwiązania układu liniowego (2) są w małym otoczeniu

punktu stacjonarnego "jakościowo identyczne". Ponieważ rozwiązywać (analizować) układ liniowy jest na ogół niezmiernie prościej, niż układ pełny, opta się spróbować znaleźć warunki umożliwiające taką podmianę. To, czy zachowanie pełnego układu w otoczeniu punktu stacjonarnego jest rzeczywiście reprezentowane przez jego linearyzację, zależy od wartości własnych macierzy linearyzacji układu (2).

Przeanalizujemy to na przykładzie układu w R^2 , podając przy okazji klasyfikację prostych punktów stacjonarnych. Rozpatrzmy zatem układ równań

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \hat{A} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}. \quad (3)$$

DEFINICJA

Definicja 2:

Zbiór zmiennych $(\xi, \eta) \in R^2$ nazywamy **plaszczyną fazową** układu (3)

Portretem fazowym układu (3) nazywamy zbiór krzywych sparametryzowanych

$$C: \begin{cases} \xi = \xi[t], \\ \eta = \eta[t], \end{cases} \quad (4)$$

które tworzą rozwiązania tego układu. Posługując się terminologią zapożyczoną w mechanice punktu materialnego, krzywe (4) nazywają też często **trajektoriami** lub **trajektoriami fazowymi**.

Przystępujemy do klasyfikacji punktów stacjonarnych układu (3).

1. Przypadek, gdy wartości własne λ_1, λ_2 macierzy $\hat{A}$ są rzeczywiste, różne, dodatnie.

Niech na przykład $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Wtedy punkt $(0, 0)$ przestrzeni fazowej nazywa się **źródłem**. Wówczas da się znaleźć taką liniową zamianę zmiennych

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix},$$

że układ (3) przybierze postać

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Rozwiązaniem tego układu są wówczas funkcje

$$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

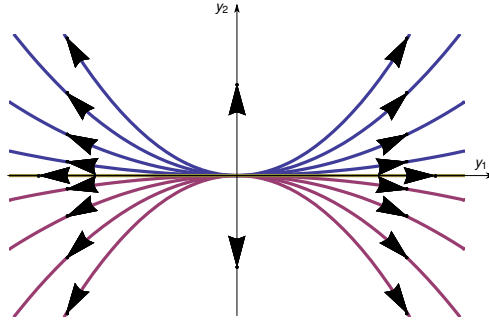
W przypadku, gdy $C_1 \neq 0$, rozwiązanie to można przedstawić w postaci równoważnej, przedstawiając y_2 jako funkcję y_1 poprzez wyrugowanie t :

$$y_2 = C_3 y_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}},$$

gdzie

$$C_3 = C_2 \cdot \begin{cases} 1/(C_1)^{\lambda_2/\lambda_1} & \text{gdy } C_1 > 0, \\ -1/(|C_1|)^{\lambda_2/\lambda_1} & \text{gdy } C_1 < 0. \end{cases} \quad (6)$$

Portret fazowy układu (5) wygląda w tym przypadku tak, jak jest to pokazane na Rys. 1.



Rysunek 1: Portret fazowy układu (5)

Zwróćmy uwagę na to, że osie współrzędnych są trajektoriami fazowymi układu. Oś pozioma odpowiada przypadkowi $C_2 = 0$, zaś oś pionowa odpowiada przypadkowi osobliwemu $C_1 = 0$. Te dwie trajektorie fazowe nie są ujęte we wzorze (6).

2. Wartości własne λ_1, λ_2 macierzy $\hat{A}$ są rzeczywiste, różne, ujemne.

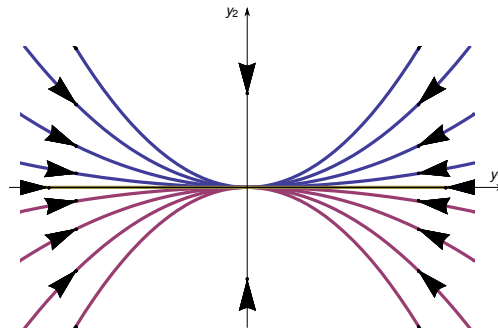
Niech na przykład $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Punkt $(0, 0)$ przestrzeni fazowej nazywa się wówczas **zlewem**. Podobnie jak w przypadku poprzednim, istnieje liniowa zamiana zmiennych $(\xi, \eta) \rightarrow (y_1, y_2)$ taka, że w nowych zmiennych układ (3) ma postać

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Zauważmy teraz, że zamiana zmiennej niezależnej $t \rightarrow \tau = -t$ odzworowuje układ (7) w układ

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\lambda_1| & 0 \\ 0 & |\lambda_2| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

równoważny układowi (5). Przekształcenie $t \rightarrow \tau = -t$ nazywa się odbiciem zmiennej czasowej. Prowadzi ono do tego, że ruch wzdłuż każdej trajektorii fazowej odbywa się w przeciwnym kierunku. Poza tym portret fazowy pozostaje bez zmian. Wynika stąd, że portret fazowy układu (7) będzie taki, jak pokazano na Rys. 2.



Rysunek 2: Portret fazowy układu (7)

3. Przypadek gdy wartości własne λ_1, λ_2 macierzy $\hat{A}$ są rzeczywiste, niezerowe i mają różne znaki.

Niech, na przykład, $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$. Wtedy punkt $(0, 0)$ przestrzeni fazowej nazywa się **siodłem**. Wówczas istnieje liniowa zamiana zmiennych $(\xi, \eta) \rightarrow (y_1, y_2)$ taka że w nowych zmiennych układ (3) ma postać

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & -|\lambda_2| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Rozwiązanie tego układu dane jest wzorami

$$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_2 = C_2 e^{-|\lambda_2| t}.$$

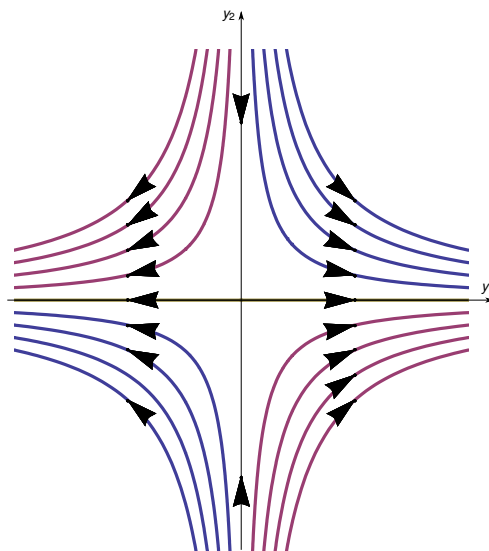
W przypadku, gdy $C_1 \neq 0$, rozwiązanie to można też przepisać w postaci równoważnej, przedstawiając y_2 jako funkcję y_1 poprzez wyrugowanie zmiennej t :

$$y_2 = C_3 y_1^{-|\lambda_2/\lambda_1|}, \quad (10)$$

gdzie

$$C_3 = C_2 \cdot \begin{cases} 1/(C_1)^{\lambda_2/\lambda_1}, & \text{gd } C_1 > 0, \\ -1/(|C_1|)^{\lambda_2/\lambda_1}, & \text{gd } C_1 < 0. \end{cases}$$

Portret fazowy układu (9) w tym przypadku wygląda tak, jak to jest pokazane na Rys. 3. Zwróćmy uwagę na to, że osie współrzędnych są również trajektoriami fazowymi układu (10). Oś pozioma odpowiada przypadkowi $C_2 = 0$; oś pionowa odpowiada przypadkowi osobliwemu $C_1 = 0$. Te dwie trajektorie fazowe nie są wyrażone poprzez wzór (9)



Rysunek 3: Portret fazowy układu (9)

4. Przypadek gdy wartości własne λ_1, λ_2 macierzy $\hat{A}$ są czysto urojone i różnią się znakiem: $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$.

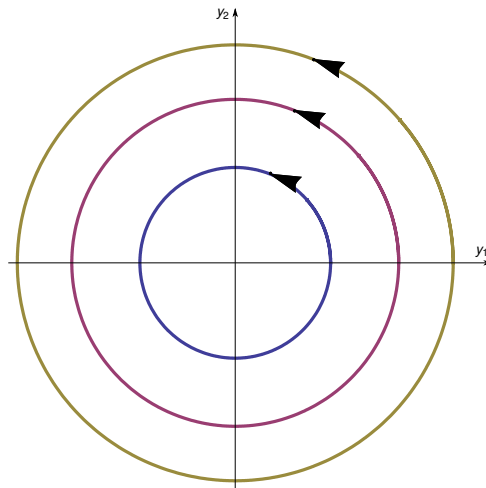
W tym przypadku punkt $(0, 0)$ przestrzeni fazowej nazywa się **środkiem**. Istnieje liniowa zamiana zmiennych $(\xi, \eta) \rightarrow (y_1, y_2)$ taka, że w nowych zmiennych układ (3) ma postać

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Rozwiązanie tego układu dane jest wzorami

$$y_1 = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad y_2 = \omega [B \cos \omega t - A \sin \omega t]. \quad (12)$$

Rozwiązania te są funkcjami okresowymi. W płaszczyźnie fazowej na rysunku Rys. 4 są one przedstawione w postaci krzywych (orbit) zamkniętych.

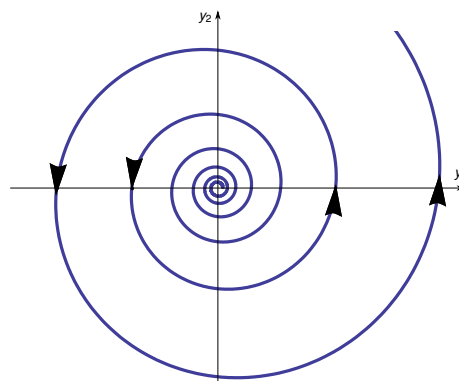


Rysunek 4: Portret fazowy układu (11)

5. Przypadek gdy wartości własne λ_1, λ_2 macierzy $\hat{A}$ są zespolone, czyli $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$.

W tym przypadku punkt $(0, 0)$ przestrzeni fazowej nazywa się **ogniskiem** niestabilnym w przypadku gdy $\alpha > 0$ oraz stabilnym gdy $\alpha < 0$.

Portret fazowy ogniska niestabilnego przedstawiono na Rys. 5. Portret fazowy ogniska stabilnego wygląda podobnie, przy czym trajektorie są tu skierowane do początku układu współrzędnych.



Rysunek 5: Obraz ogniska niestabilnego na płaszczyźnie fazowej.

Zachodzi

TWIERDZENIE

Twierdzenie 1:

Charakter punktów stacjonarnych oraz przebieg trajektorii w ich małym otoczeniu jakościowo nie zmienia się przy dodaniu członów nieliniowych, odrzuconych pod czas przejścia do układów zlinearyzowanych, dla wszystkich wymienionych przypadków **za wyjątkiem środka**.

Uwaga 1:

Klasyfikację podobną do podanej dla przypadku $n = 2$, stosuje się również do zlinearyzowanego układu n -wymiarowego (2). Analog sformułowanego wyżej twierdzenia mówi, że układ wyjściowy oraz jego linearyzacja posiadają podobne jakościowo portrety fazowe w małym otoczeniu punktu stacjonarnego, gdy macierz linearyzacji nie posiada wartości własnych o zerowych częściach rzeczywistych.

Publikacja udostępniona jest na licencji Creative Commons Uznanie autorstwa - Na tych samych warunkach 3.0 Polska. Pewne prawa zastrzeżone na rzecz autorów i Akademii Górniczo-Hutniczej. Zezwala się na dowolne wykorzystanie treści publikacji pod warunkiem wskazania autorów i Akademii Górniczo-Hutniczej jako autorów oraz podania informacji o licencji tak długo, jak tylko na utwory zależne będzie udzielana taka sama licencja. Pełny tekst licencji dostępny na stronie <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/pl/>.



Data generacji dokumentu: 2019-04-15 07:29:29

Oryginalny dokument dostępny pod adresem: <https://epodreczniki.open.agh.edu.pl/openagh-permalink.php?link=a92c8b2d7fce12819fa6c15322184385>

Autor: Vsevolod Vladimirov