

Wydział Matematyki Stosowanej AGH
Wstęp do równań różniczkowych cząstkowych
ZESTAW 1

Będzie uzupełniany...

Równania różniczkowe cząstkowe I rzędu

1. Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym. Załóżmy, że funkcje $\psi_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ oraz $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ są klasy C^1 . Definiujemy funkcję $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$\psi = F \circ (\psi_1, \dots, \psi_m).$$

Wykazać, że $\psi, \psi_1, \dots, \psi_m$ są funkcyjnie zależne w U .

2. Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym. Dane są funkcje $\psi, \psi_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $m < n$ klasy C^1 . Wykazać, że jeśli $\psi, \psi_1, \dots, \psi_m$ są funkcyjnie zależne w otwartym podzbiorku $U_0 \subset U$ i $\psi_1, \dots, \psi_m$ są funkcyjnie niezależne w U_0 , to istnieje otwarty podzbiór $\tilde{U}_0 \subset U_0$ i funkcja $F : \mathbb{R}^m \supset \psi_1(\tilde{U}_0) \times \dots \times \psi_m(\tilde{U}_0) \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^1 taka, że w $\tilde{U}_0$ mamy

$$\psi = F \circ (\psi_1, \dots, \psi_m).$$

A co będzie, gdy $m = n$ i $m > n$?

3. Wyznaczyć rozwiązania ogólne równań:

3.1. $2u_x + 5u_y = 0$,

3.2. $2u_x + 5u_y + 7u_z = 0$,

3.3. $4yu_x + 5xu_y = 0$,

3.4. $(x - y)u_x + (x + y)u_y = 0$,

3.5. $(x + z)u_x + xyzu_y + zu_z = 0$.

Sprawdzić, że znalezione funkcje rzeczywiście są rozwiązaniami.

4. Wyznaczyć rozwiązania ogólne równań:

4.1. $u_x + u_y = 1$,

4.2. $u_x + u_y = xy$,

4.3. $u_x + u_y = u$,

4.4. $u_x + u_y = u^2$,

4.5. $xu_y - yu_x + (1 + z^2)u_z = 2zu$.

Znalezione rozwiązania doprowadzić do postaci jawnej i sprawdzić, że znalezione funkcje rzeczywiście są rozwiązaniami.

(Wskazówka: 4.5. Zauważyć, że $\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}$, czyli $\frac{dx}{-y} = \frac{d(\frac{y}{x})}{1+(\frac{y}{x})^2}$).

5. Wyznaczyć rozwiązania ogólne równań:

5.1. $u_x + uu_y = 0$,

5.2. $u_x + (2y - u)u_y = y + 2u$,

5.3. $xuu_x - yuu_y = y^2 - x^2$,

5.4. $(y + xu)u_x - (x + yu)u_y = x^2 - y^2$,

5.5. $u_x + uu_y + u_z = x - z$.

6. Znaleźć (o ile istnieją) rozwiązania równania

$$3yu_x - 2xu_y = 0$$

przechodzące przez krzywą:

a) $u = x^2, \quad y = x$,

b) $u = 1, \quad 2x^2 + 3y^2 = 4$,

c) $u = x, \quad 2x^2 - 3y^2 = 4$.

7. Metodami całek pierwszych i krzywych charakterystycznych rozwiązać problem początkowy

$$\begin{cases} u_x - uu_y = 0 \\ u(x, 0) = \frac{1}{x} \end{cases}.$$

8. Znaleźć rozwiązanie równania

$$(u - y)u_x + (x - u)u_y = y - x$$

spełniające warunek początkowy:

$$x^2 - 4u^2 = 3, \quad y + u = 0.$$

9. Znaleźć rozwiązanie równania

$$xu_x + yu_y = u^3$$

przechodzące przez prostą:

$$x = 2 + s, \quad y = 1 - 3s, \quad u = 4 + 3s.$$

10. Znaleźć rozwiązanie równania

$$(x - y)u_x + (y - x - u)u_y = u$$

przechodzące przez krzywą:

$$x = s, \quad y = 3s, \quad u = 1.$$

11. Znaleźć (o ile istnieją) rozwiązania równania

$$(x + y)u_x + yu_y = u + y^3 e^y$$

przechodzące przez krzywą:

a) $u = x, \quad y = 1$,

b) $u = y(y - 1)e^y, \quad y = e^{\frac{x}{y}}$,

c) $u = y, \quad y = e^{\frac{x}{y}}$.

12. Znaleźć (o ile istnieją) rozwiązania równania

$$x^2 u_x + y^2 u_y = y u^2$$

przechodzące przez krzywą:

a) $x = 2y, \quad u = 1,$

b) $xy = x - y, \quad u = 1,$

c) $xy = x - y, \quad u(1 - \ln y) = 1.$

13. Znaleźć rozwiązanie równania

$$yzu_x + xzu_y + xyu_z = xyz$$

przechodzące przez powierzchnię dwuwymiarową:

$$u = 3x^2 + y^2, \quad z = 1.$$

14. Wyznaczyć powierzchnię całkową równania

$$xu_x + yu_y + zu_z = u$$

taką, że:

$$u = \frac{1}{2}(y + z) \quad \text{dla} \quad x = 2.$$

15. Rozważmy quasi-liniowe równanie cząstkowe

$$u_x + uu_y = 0$$

z warunkiem początkowym

$$u(0, y) = f(y),$$

gdzie

$$f(y) = \begin{cases} -1, & y \leq -\frac{1}{2}\pi \\ \sin y, & -\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi \\ 1, & y \geq \frac{1}{2}\pi \end{cases}.$$

Wykazać, że problem ten ma rozwiązanie uwikłane $u(x, y)$ na zbiorze $(-1, 1) \times \mathbb{R}$ i nie ma rozwiązań na każdym zbiorze $(-1 - \varepsilon, 1) \times \mathbb{R}$ dla $\varepsilon > 0$.