

Wydział Matematyki Stosowanej AGH
Wstęp do równań różniczkowych cząstkowych
ZESTAW 2

Będzie uzupełniany...

Równania różniczkowe cząstkowe II rzędu

1. Określić typ równań:

1.1. $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0$,

1.2. $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + 2u_y = 0$,

1.3. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 0$,

1.4. $u_{xx} + 4u_{yy} + 2u_{zz} + 2u_{xz} + u_x - u_y + 2u = 0$,

1.5. $-u_{xx} - 4u_{yy} - 2u_{zz} - 2u_{xz} - u_x + u_y - 2u = 0$,

1.6. $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + 2u_{xy} + u_x + 3u_y + u_z = 0$,

1.7. $u_{xx} + 2u_{yy} - u_{zz} + 2u_{xy} + u_y + 4u = 0$,

1.8. $u_{xx} - 2(\cos x)u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} - yu_y = 0$,

1.9. $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + 2x^2u_{yy} + yu_y = 0$,

1.10. $(tg^2x)u_{xx} - 2y(tgx)u_{xy} + y^2u_{yy} + (tg^3x)u_x = 0$,

1.11. $yu_{xx} + u_{yy} = 0$,

1.12. $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy} - 2xu_x + 4yu_y + 16x^4u = 0$,

1.13. $(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$,

1.14. $(\sin^2 x)u_{xx} - 2y(\sin x)u_{xy} + y^2u_{yy} = 0$.

2. Wykazać, że jeśli macierz $A \in M_s^2$ jest osobliwa, to jest ona nieujemnie lub niedodatnio określona. Podać przykład macierzy $A \in M_s^3$, która jest osobliwa i nieokreślona.

3. Udowodnić twierdzenie 3.1 z wykładu.

4. Udowodnić twierdzenie 3.2 z wykładu.

5. Znaleźć rozwiązania problemów początkowo-brzegowych:

5.1.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x \in (0, 2\pi), t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad u(2\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x, & x \in [0, 2\pi] \\ u_t(x, 0) = \sin 5x + \sin 10x, & x \in [0, 2\pi] \end{cases},$$

5.2.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0, 2\pi), t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad u(2\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x, & x \in [0, 2\pi] \end{cases},$$

5.3.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = -2x^2 + 2\pi x + 1 - \cos 2x, & x \in [0, \pi] \\ u_t(x, 0) = \sin x, & x \in [0, \pi] \end{cases},$$

5.4.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = -2x^2 + 2\pi x + 1 - \cos 2x, & x \in [0, \pi] \end{cases},$$

5.5.

$$\begin{cases} u_{tt} = 4 u_{xx}, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(0, t) = 3, \quad u(1, t) = 5, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = 2x + 3, & x \in [0, 1] \\ u_t(x, 0) = \sin \pi x, & x \in [0, 1] \end{cases},$$

5.6.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x \in (0, 2\pi), t > 0 \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(2\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x, & x \in [0, 2\pi] \\ u_t(x, 0) = \cos 5x + \cos 10x, & x \in [0, 2\pi] \end{cases}.$$

Wykazać, że odpowiednie szeregi są jednostajnie zbieżne.

6. Znaleźć rozwiązanie problemu początkowo-brzegowego

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{t} u_{xx}, & x \in (0, \pi) \times (1, 2) \\ u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, & t \in [1, 2] \\ u(x, 1) = \varphi(x), & x \in [0, \pi] \end{cases},$$

o ile funkcja φ jest odpowiednio regularna.

7. Znaleźć rozwiązania (formalne) problemów początkowo-brzegowych:

7.1.

$$\begin{cases} u_t = 4 u_{xx}, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(0, t) = 3, \quad u(1, t) = 5, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = 2x + 3 + \sin x, & x \in [0, 1] \end{cases},$$

7.2.

$$\begin{cases} u_{tt} = 9 u_{xx}, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = x(1 - x), & x \in [0, 1] \\ u_t(x, 0) = \sin \pi x, & x \in [0, 1] \end{cases},$$

7.3.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(0, t) = 1, \quad u(1, t) = 2, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = x + 1, & x \in [0, 1] \\ u_t(x, 0) = \sin \pi x, & x \in [0, 1] \end{cases},$$

7.4.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + t, & x \in (0, 2), t > 0 \\ u(0, t) = 3, \quad u(2, t) = 6, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \frac{3}{2}x + 3, & x \in [0, 2] \\ u_t(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{2}, & x \in [0, 2] \end{cases},$$

7.5.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + tx, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(0, t) = 4, \quad u(\pi, t) = 2, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \frac{-2}{\pi}x + 4, & x \in [0, \pi] \\ u_t(x, 0) = \sin x, & x \in [0, \pi] \end{cases},$$

7.6.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + t^2 \cosh x, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = x, & x \in [0, \pi] \\ u_t(x, 0) = x^3, & x \in [0, \pi] \end{cases}.$$

8. Znaleźć rozwiązania równania Laplace'a i Poissona z warunkiem brzegowym Dirichleta:

8.1.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x, y) \in (0, \pi) \times (0, 1) \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0, & y \in [0, 1] \\ u(x, 0) = \sin x, \quad u(x, 1) = 0, & x \in [0, \pi] \end{cases},$$

8.2.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x, y) \in (0, \pi) \times (0, \infty) \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0, & y \in [0, \infty) \\ u(x, 0) = \sin 3x, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = 0, & x \in [0, \pi] \end{cases},$$

8.3.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x, y) \in (0, \pi) \times (0, 1) \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0, & y \in [0, 1] \\ u(x, 0) = \sin x + \sin 2x, \quad u(x, 1) = 0, & x \in [0, \pi] \end{cases},$$

8.4.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ u(0, y) = u(1, y) = 0, & y \in [0, 1] \\ u(x, 0) = x^4 - 2x^3 + x, \quad u(x, 1) = 0, & x \in [0, 1] \end{cases},$$

8.5.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x, y) \in (0, \pi) \times (0, 1) \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0, & y \in [0, 1] \\ u(x, 0) = \sin x, \quad u(x, 1) = \sin 2x, & x \in [0, \pi] \end{cases},$$

8.6.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \sin x, & (x, y) \in (0, \pi) \times (0, 1) \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0, & y \in [0, 1] \\ u(x, 0) = \sin x, \quad u(x, 1) = 0, & x \in [0, \pi] \end{cases},$$

8.7.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \sin 2x, & (x, y) \in (0, \pi) \times (0, 1) \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0, & y \in [0, 1] \\ u(x, 0) = \sin x, \quad u(x, 1) = 0, & x \in [0, \pi] \end{cases},$$

8.8.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \sin x e^y, & (x, y) \in (0, \pi) \times (0, 1) \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0, & y \in [0, 1] \\ u(x, 0) = \sin x, \quad u(x, 1) = 0, & x \in [0, \pi] \end{cases}.$$

Wykazać, że odpowiednie szeregi są jednostajnie zbieżne.

9. Równania sprowadzić do postaci kanonicznej, korzystając z metody charakterystyk. Następnie znaleźć rozwiązania ogólne w przypadkach 9.1 i 9.2:

9.1.

$$u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} = 0,$$

9.2.

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0,$$

9.3.

$$u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0.$$

10. Równania w zadaniu 1 (w przypadku dwóch zmiennych niezależnych x i y) sprowadzić do postaci kanonicznej, korzystając z metody charakterystyk. Następnie znaleźć rozwiązania ogólne w przypadkach hiperbolicznym i parabolicznym, o ile to możliwe.

11. Równania sprowadzić do postaci kanonicznej, korzystając z metody charakterystyk. Następnie znaleźć rozwiązania ogólne i rozwiązać problemy początkowe:

11.1.

$$\begin{aligned} u_{xx} - 3u_{yy} + 2u_{xy} &= 0 \\ u(x, 0) &= 3x^2, \quad u_y(x, 0) = 0, \end{aligned}$$

11.2.

$$\begin{aligned} u_{xx} - u_{yy} &= \frac{2}{y-x}(u_x + u_y) \\ u(x, 0) &= 0, \quad u_y(x, 0) = 2x, \end{aligned}$$

11.3.

$$\begin{aligned} u_{xx} - u_{yy} &= \frac{2}{y-x}(u_x + u_y) \\ u(x, 1) &= 0, \quad u_y(x, 1) = x, \end{aligned}$$

11.4.

$$\begin{aligned} x^2 u_{xx} + y^2 u_{yy} - 2xy u_{xy} + xu_x + yu_y &= 0 \\ u(1, y) &= y^2, \quad u_x(1, y) = 2(y^2 + y), \end{aligned}$$

11.5.

$$u_{xx} - (\cos^2 x)u_{yy} - 2(\sin x)u_{xy} - \cos x u_y = 0,$$

11.6.

$$x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} - 3y^2 u_{yy} + 2xu_x = 0.$$

12. a) Obliczyć $\nabla u(1, 2)$ dla $u(x, y) = x^2 + y^2$.

b) Obliczyć $\frac{\partial u}{\partial n}(2, -2, 1)$ dla $u(x, y, z) = x + y + z$ i kuli $B(0, 3) \subset \mathbb{R}^3$.

c) Wskazać jakąkolwiek funkcję u taką, że $\Delta u(x, y) = x + y$.

13. Znaleźć postać operatorów Laplace'a

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

odpowiednio we współrzędnych biegunowych i sferycznych.

14. Wykazać, że równanie Laplace'a

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

jest niezmiennicze ze względu na obroty, tzn. że jeśli A jest macierzą $n \times n$ ortogonalną o wyznaczniku równym 1 i położymy

$$v(\bar{x}) = u(Ax), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

to

$$\Delta v(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Można dla uproszczenia zacząć analizę od przypadku $n = 2$ i macierzy

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in [0, 2\pi).$$

15. Niech $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ będzie obszarem ograniczonym z brzegiem ∂U klasy C^1 . Wykazać, że jeśli $c \leq 0$, to problem brzegowy Dirichleta

$$\begin{cases} \Delta u + cu = f(x), & x \in U \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial U \end{cases}$$

ma co najwyżej jedno rozwiązanie $u \in C^2(\bar{U})$. W przypadku $c > 0$ podać kontrprzykład.

16. Niech $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ będzie obszarem ograniczonym z brzegiem ∂U klasy C^1 . Wykazać, że jeśli $c < 0$, to problem brzegowy Neumanna

$$\begin{cases} \Delta u + cu = f(x), & x \in U \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) = \varphi(x), & x \in \partial U \end{cases}$$

ma co najwyżej jedno rozwiązanie $u \in C^2(\bar{U})$. W przypadku $c \geq 0$ podać kontrprzykłady.

17. Niech $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ będzie obszarem ograniczonym z brzegiem ∂U klasy C^1 . Udowodnić, że każde dwa rozwiązania $u, v \in C^2(\bar{U})$ problemu brzegowego Neumanna dla równania Poissona (o ile istnieją) różnią się o stałą.

18. Niech $c \in \mathbb{R}$. Pokazać, że jeśli $u \in C^2(\bar{U})$ jest rozwiązaniem problemu brzegowego Dirichleta w zadaniu 15, to

$$\int_U (f - cu) dx = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma.$$

19. Niech $c \in \mathbb{R}$. Pokazać, że jeśli $u \in C^2(\bar{U})$ jest rozwiązaniem problemu brzegowego Neumanna w zadaniu 16, to

$$\int_U (f - cu) dx = \int_{\partial U} \varphi d\sigma.$$

20. Wskazać przykłady zależności x od t takie, że

$$\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (0,0+) \\ x \in \mathbb{R}^n}} \Phi(x,t) = \alpha$$

dla z góry zadanej $\alpha \in [0, +\infty]$, gdzie funkcja Φ jest rozwiązaniem podstawowym równania $u_t = \Delta u$.

21. Pokazać, że

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(x,t) = 0$$

jednostajnie względem $x \in \mathbb{R}^n$, gdzie Φ jest rozwiązaniem podstawowym równania $u_t = \Delta u$ (najpierw udowodnić dla $n = 1$ i uogólnić dla $n \in \mathbb{N}$). Zwrócić uwagę, że

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t) dx \neq \int_{\mathbb{R}^n} 0 dx = 0.$$

Dlaczego w tym przypadku twierdzenie o przejściu granicznym nie działa?

22. Udowodnić, że jeśli funkcja $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ jest ograniczona, to rozwiązanie problemu początkowego dla równania ciepła

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

znalezione przy pomocy rozwiązania podstawowego Φ równania $u_t = \Delta u$ jest ograniczone:

$$\inf_{y \in \mathbb{R}^n} \varphi(y) \leq u(x, t) \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \varphi(y), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0.$$

23. Udowodnić, że jeśli funkcja $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ jest całkowalna, to rozwiązanie problemu początkowego

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

znalezione przy pomocy rozwiązania podstawowego Φ równania $u_t = \Delta u$ jest zbieżne jednostajnie po czasie względem $x \in \mathbb{R}^n$ do zera:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0.$$

Podać przykład funkcji $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ ograniczonej, dla której taka własność nie zachodzi.

24. Dana jest funkcja

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}.$$

Wyprowadzić wzór na rozwiązanie

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \left(e^{-\frac{(x+1)^2}{4t}} - 2e^{-\frac{x^2}{4t}} + e^{-\frac{(x-1)^2}{4t}} \right) \\ & + \frac{1-x}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-1}{2\sqrt{t}}}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-y^2} dy + \frac{1+x}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\frac{x+1}{2\sqrt{t}}} e^{-y^2} dy, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \end{aligned}$$

problemu Cauchy'ego

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Sprawdzić przy pomocy elementarnych rachunków, że rzeczywiście jest to rozwiązanie i $u \in C(\mathbb{R} \times [0, \infty)) \cap C^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$. Narysować wykres tego rozwiązania w chwili $t = 1$, w szczególności uzasadnić, że $u(0, 1) < 1$ i $u(1, 1) > 0$, $u(-1, 1) > 0$.

25. Dana jest funkcja

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - |x - 1|, & |x - 1| \leq 1 \\ 0, & |x - 1| > 1 \end{cases}.$$

Wyprowadzić wzór na rozwiązanie

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \left(e^{-\frac{x^2}{4t}} - 2e^{-\frac{(x-1)^2}{4t}} + e^{-\frac{(x-2)^2}{4t}} \right) \\ & + \frac{2-x}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-2}{2\sqrt{t}}}^{\frac{x-1}{2\sqrt{t}}} e^{-y^2} dy + \frac{x}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-1}{2\sqrt{t}}}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-y^2} dy, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \end{aligned}$$

problemu Cauchy'ego

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Sprawdzić przy pomocy elementarnych rachunków, że rzeczywiście jest to rozwiązanie i $u \in C(\mathbb{R} \times [0, \infty)) \cap C^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$.

26. Dana jest funkcja

$$\varphi(x) = \begin{cases} -1, & x < -1 \\ x, & |x| \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}.$$

Korzystając z rozwiązania podstawowego Φ równania $u_t = u_{xx}$, znaleźć rozwiązanie problemu Cauchy'ego

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Sprawdzić przy pomocy elementarnych rachunków, że rzeczywiście jest to rozwiązanie i $u \in C(\mathbb{R} \times [0, \infty)) \cap C^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$.

27. Uzasadnić, że w zadaniach 24, 25 i 26 rozwiązanie jest ograniczone:

$$0 \leq u(x, t) \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

oraz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$$

jednostajnie względem $x \in \mathbb{R}^n$.

28. Wyprowadzić wzór na rozwiązanie

$$u(x, t) = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4t}} + \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-y^2} dy, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

problemu Cauchy'ego

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = |x|, & x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Sprawdzić przy pomocy elementarnych rachunków, że rzeczywiście jest to rozwiązanie i $u \in C(\mathbb{R} \times [0, \infty)) \cap C^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$. Narysować wykres tego rozwiązania w chwili $t = 1$. Wykazać, że:

$$0 \leq u(x, t) \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t} + |x|, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \infty$$

jednostajnie względem $x \in \mathbb{R}$.

29. Niech $u(x, t) = v\left(\frac{x^2}{t}\right)$, $x \in \mathbb{R}, t > 0$.

a) Wykazać, że

$$u_t = u_{xx} \tag{1}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$4yv''(y) + (2+y)v'(y) = 0, \quad y \geq 0. \tag{2}$$

b) Wykazac, że funkcja

$$v(y) = C_1 \int_0^y e^{-\frac{s}{4}} s^{-\frac{1}{2}} ds + C_2, \quad y \geq 0$$

jest rozwiązaniem ogólnym równania (2).

c) Zróżniczkować $v\left(\frac{x^2}{t}\right)$ względem x (sprawdzić, że ta pochodna też spełnia równanie (1)) i dobrać stałą C_1 tak, aby otrzymać rozwiązanie podstawowe Φ równania (1).

30. Znaleźć rozwiązanie problemu początkowego

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(t), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

gdzie funkcja $f \in C([0, \infty))$ jest dana.

31. Znaleźć rozwiązanie problemu początkowego

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f'(t), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

gdzie funkcja różniczkowalna $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest dana.

32. Niech $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ będzie obszarem ograniczonym z brzegiem ∂U klasy C^1 . Dla $T > 0$ połączmy $U_T = U \times (0, T]$ i $\Gamma_T = \overline{U}_T \setminus U_T$. Wykazać, że dla każdego $c \in \mathbb{R}$ problem początkowo-brzegowy Dirichleta

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + cu + f(x, t), & (x, t) \in U_T \\ u(x, t) = \varphi(x, t), & (x, t) \in \Gamma_T \end{cases}$$

ma co najwyżej jedno rozwiązanie $u \in C^2(\overline{U}_T)$.

33. Niech $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ będzie obszarem ograniczonym z brzegiem ∂U klasy C^1 . Dla $T > 0$ połączmy $U_T = U \times (0, T]$ i $\Gamma_T = \overline{U}_T \setminus U_T$. Wykazać, że dla każdego $c \in \mathbb{R}$ problem początkowo-brzegowy Neumanna

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + cu + f(x, t), & (x, t) \in U_T \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = \psi(x, t), & (x, t) \in \Gamma_T, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \overline{U} \end{cases}$$

ma co najwyżej jedno rozwiązanie $u \in C^2(\overline{U}_T)$.

34. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{2}{x}u_x.$$

35. Rozwiązać problem początkowy

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + 2x \\ u(x, 0) &= x^2, \quad u_t(x, 0) = x. \end{aligned}$$

36. Rozpatrzmy problem początkowy

$$\begin{cases} u_{tt} + cu_t + a(x, t)u = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases},$$

gdzie $c = \text{const} \in \mathbb{R}$ i funkcje a, φ, ψ są dane. Znaleźć postać tego zagadnienia po zmianie zmiennych

$$u(x, t) = w(x, t)e^{-\frac{ct}{2}}.$$

Rozwiązać ten problem, gdy $a(x, t) \equiv \frac{c^2}{4}$ - zwrócić uwagę na efekt tłumienia, gdy $c > 0$. Jeśli $c > 0$, to równanie różniczkowe w tym zagadnieniu nazywane jest tłumionym równaniem falowym, równaniem telegrafistów lub równaniem linii telegraficznej. A kiedy w nowych zmiennych jest to równanie Kleina-Gordona?

37. Kształt struny nieograniczonej wyznacza w chwili początkowej $t = 0$ funkcja

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - |x - 1|, & |x - 1| \leq 1 \\ 0, & |x - 1| > 1 \end{cases}.$$

Prędkość początkowa $\psi(x) \equiv 0$. Narysować kształt tej struny w chwilach $t = 0$, $t = \frac{1}{2}$ i $t = 1$, zakładając, że $a = 1$ (wiadomo, że odpowiedni problem początkowy ma jedyne rozwiązanie).

38. Kształt struny półograniczonej zamocowanej w punkcie $x = 0$ wyznacza w chwili początkowej $t = 0$ funkcja

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - |x - 1|, & |x - 1| \leq 1 \\ 0, & x \geq 2 \end{cases}.$$

Prędkość początkowa $\psi(x) \equiv 0$. Narysować kształt tej struny w chwilach $t = 0$, $t = \frac{1}{2}$ i $t = 1$, zakładając, że $a = 1$ (wiadomo, że odpowiedni problem początkowy ma jedyne rozwiązanie).

39. Niech $f \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ i $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$. Wyprowadzić wzór d'Alemberta

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(y, s) dy ds,$$

$x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, na rozwiązanie problemu Cauchy'ego

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Sprawdzić, że jest to rozwiązanie klasyczne, tzn. $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$.

40. Udowodnić, że jeśli $f \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$, $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ i f, φ, ψ są ograniczone, to istnieją stałe $a, b, c \geq 0$ takie, że

$$|u(x, t)| \leq at^2 + bt + c,$$

gdzie u jest rozwiązaniem problemu początkowego dla równania struny

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + f(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

41. (Ekwipatrycja energii). Niech $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ będzie rozwiązaniem zagadnienia początkowego dla równania struny

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Przypuśćmy, że $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ oraz nośniki funkcji φ i ψ są zwarte. Energie kinetyczną, potencjalną i całkowitą definiujemy odpowiednio wzorami:

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x, t) dx, \quad t \geq 0, \\ P(t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(x, t) dx, \quad t \geq 0, \\ E(t) &= K(t) + P(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Uzasadnić, że:

- a) $E(t) = \text{const}$, $t \geq 0$,
 b) istnieje $T > 0$ takie, że $K(t) = P(t)$, $t \geq T$.

42. Wykazać, że jeśli funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna i funkcja $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem

$$F(x, t) = f(x + t) \pm f(x - t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2,$$

to

$$F_{xx}(x, t) = F_{tt}(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Sprawdzić też, że jeśli funkcja f jest różniczkowalna i

$$F(x, t) = f(x + t) + f(x - t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2,$$

to

$$F_t(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R};$$

jeśli zaś

$$F(x, t) = f(x + t) - f(x - t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2,$$

to

$$F_t(x, 0) = 2f'(x, 0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

43. Niech $f(x) = |x^3 - 1|$, $x \in \mathbb{R}$. Obliczyć dystrybucje T'_f i T''_f oraz sprawdzić, czy są regularne.

44. Niech $f(x) = |x^2 - 1|$, $x > 0$. Obliczyć dystrybucje T'_f i T''_f oraz sprawdzić, czy są regularne.

45. Rozważmy funkcję $\Phi(x) = \frac{1}{2} \sin |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Uzasadnić, że Φ jest rozwiązaniem podstawowym dla operatora $P = \frac{d^2}{dx^2} + 1$. Jakim wzorem całkowym można wyrazić rozwiązanie równania

$$u'' + u = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

gdzie $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$?

46. Rozważmy funkcję $\Phi(x) = \frac{1}{2} e^{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Uzasadnić, że Φ jest rozwiązaniem podstawowym dla operatora $P = \frac{d^2}{dx^2} - 1$. Jakim wzorem całkowym można wyrazić rozwiązanie równania

$$u'' - u = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

gdzie $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$?

47. Niech $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N}$. Uzasadnić, że ciąg transformacji Fouriera $(\widehat{\Delta^n \varphi})$ jest zbieżny punktowo w jednostkowej kuli otwartej o środku w zerze, gdzie $\Delta^n = \Delta \circ \dots \circ \Delta$.

48. Znaleźć rozwiązanie problemu początkowo-brzegowego

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u, & x \in (0, \pi), \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in [0, \pi] \end{cases},$$

o ile funkcja φ jest odpowiednio regularna.

49. Znaleźć rozwiązanie problemu początkowo-brzegowego

$$\begin{cases} u_t = D_1 u_{xx} + au + bv, & x \in (0, \pi), \quad t > 0 \\ v_t = D_2 v_{xx} + cu + dv, & x \in (0, \pi), \quad t > 0 \\ u(0, t) = v(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = v(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad v(x, 0) = \psi(x), & x \in [0, \pi] \end{cases},$$

gdzie $D_1, D_2 > 0$, $a, b, c, d = \text{const} \in \mathbb{R}$, o ile funkcje φ i ψ są odpowiednio regularne.