

[Zad 390]

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [u_t^2(x,t) + u_x^2(x,t)] dx$$

I sposób

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [\varphi(x-t) + \varphi(x+t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(y) dy$$

φ, ψ - moje dowolne funkcje

$$E(t) = \text{const}, \quad t \geq 0 \quad (\text{X})$$

Pokażemy, że $E'(t) = 0, \quad t \geq 0$.

Wzłedamy dowodze $t \geq 0$:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [u_t^2(x,t) + u_x^2(x,t)] dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

(Bo funkcje φ, ψ dowolne)

$$E'(t) = \frac{d}{dt} \int_{\alpha}^{\beta} (u_t u_{tt} + u_x u_{xt}) dx = \dots$$

$$u_t = \frac{1}{2} (-\varphi'(x-t) + \varphi'(x+t)) + \frac{1}{2} (\psi(x+t) + \psi(x-t))$$

$$u_x = \frac{1}{2} (\varphi'(x-t) + \varphi'(x+t)) + \frac{1}{2} (\psi(x+t) - \psi(x-t))$$

$$u_{tt} = \frac{1}{2} (\varphi''(x-t) + \varphi''(x+t)) + \frac{1}{2} (\psi'(x+t) - \psi'(x-t))$$

$$u_{xt} = \frac{1}{2} (-\varphi''(x-t) + \varphi''(x+t)) + \frac{1}{2} (\psi'(x+t) + \psi'(x-t))$$

$$\dots = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [\underbrace{\varphi'(x+t)\varphi''(x+t)}_{\text{dla}} - \underbrace{\varphi'(x-t)\varphi''(x-t)}_{\text{dla}} + \underbrace{\varphi'(x+t)\psi'(x+t)}_{\text{dla}} + \underbrace{\varphi'(x-t)\psi'(x-t)}_{\text{dla}} + \underbrace{\psi(x+t)\varphi''(x+t)}_{\text{dla}} + \underbrace{\psi(x-t)\varphi''(x-t)}_{\text{dla}} + \underbrace{\psi'(x+t)\varphi'(x+t)}_{\text{dla}} - \underbrace{\psi'(x-t)\varphi'(x-t)}_{\text{dla}}] dx$$

- Głedny całki podkreślone na niebiesko sę równe zero, bo dla paryłodu wzwozimy pierwszy z nich:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi'(x+t)\varphi''(x+t) dx = \underbrace{(\varphi'(x+t))}_{\text{0}}^{2/\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \varphi''(x+t)\varphi'(x+t) dx.$$

A ntgd

$$2 \int_{\alpha}^{\beta} \varphi'(x+t) \varphi''(x+t) dx = 0,$$

użyli

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi'(x+t) \varphi''(x+t) dx = 0.$$

•• Z ciekawości podkreślony na czerwono potęgujemy inną

$$\varphi'(x+t) \varphi'(x+t) + \varphi(x+t) \varphi''(x+t) = (\varphi'(x+t) \varphi(x+t))',$$

$$\varphi'(x-t) \varphi'(x-t) + \varphi(x-t) \varphi''(x-t) = (\varphi'(x-t) \varphi(x-t))'.$$

A więc przytłoczono dla tej pierwszej sumy mamy

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\varphi'(x+t) \varphi(x+t))' dx = \varphi'(x+t) \varphi(x+t) \Big|_{\alpha}^{\beta} = 0.$$

Finalem $E'(t) = 0$ dla $t > 0$. Zatem $E(t) = \text{const}, t > 0$.

A teraz b) :)

...

§ Nie łączymy ~~znowa~~ obliczamy $R(t) - P(t)$, przy założeniu, że $K'(t) - P'(t) \geq 0$ i wskazujemy $T > 0$.

(pamiętajmy, iż nośniki φ i ψ są zwarte).

II sposób do 39a)

Σ pozostawiamy wzoru na wzajemność $u(x,t)$ widocznym, że $u(\cdot, t)$ ma zwarty nośnik dla dowolnie ustalonego $t > 0$. Zatem dla ustalonego $t > 0$

$$E'(t) = \int_{\alpha}^{\beta} (u_t u_{tt} + u_x u_{xt}) dx = \int_{\alpha}^{\beta} u_t (\underbrace{u_{tt} - u_{xx}}_{=0}) dx = 0,$$

$$\text{skąd} \int_{\alpha}^{\beta} u_x u_{xt} dx = \underbrace{u_x u_t}_{=0} \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} u_{xx} u_t dx = - \int_{\alpha}^{\beta} u_{xx} u_t dx \quad \square$$