

Wydział Górnictwa i Geoinżynierii AGH
Zadania z Analizy matematycznej, III semestr
ZESTAW 1

Ekstrema lokalne funkcji wielu zmiennych,
funkcje uwikłane

1. Obliczyć ekstrema lokalne funkcji:

1.1. $f(x, y) = x^2 - xy - y^2$,

1.2. $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x$,

1.3. $f(x, y) = (y - x)^2 + (y + 2)^2$,

1.4. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$, $a = \text{const} \in \mathbf{R}$,

1.5. $f(x, y) = xy(1 - x - y)$,

1.6. $f(x, y) = x^2y^3(6 - x - y)$,

1.7. $f(x, y) = 4xy + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$,

1.8. $f(x, y) = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x$,

1.9. $f(x, y) = x\sqrt{y+1} + y\sqrt{x+1}$,

1.10. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$,

1.11. $f(x, y) = 3\ln \frac{x}{6} + 2\ln y + \ln(12 - x - y)$,

1.12. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$,

1.13. $f(x, y, z) = x^3 + xy + y^2 - 2xz + 2z^2 + 3y - 1$,

1.14. $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 1$,

1.15. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.

2. Wyznaczyć prostopadłościan wpisany w kulę o promieniu $R > 0$, który ma największą objętość.

3. Sprawdzić jakie powinny być wymiary prostopadłościennej otwartej wanny o pojemności $V > 0$, aby ilość blachy zużytej do jej zrobienia była najmniejsza.

4. Obliczyć ekstrema lokalne funkcji uwikłanych odpowiednio $y(x)$ i $z(x, y)$ określonych przez równania:

4.1. $x^2 - 2x - 2y + y^2 + 1 = 0$,

4.2. $x^2 + 2xy + y^2 - 4y - \frac{1}{4} = 0$,

4.3. $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 19 = 0$,

4.4. $y^3 + 2xy + x^2 = 0$,

4.5. $x^3 + y^3 - 12xy = 0$,

4.6. $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0$,

4.7. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 2 = 0$,

4.8. $z^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0$.

5. Obliczyć pierwszą i drugą pochodną funkcji uwikłanych $y(x)$ określonych przez równania, we wskazanych punktach:

5.1. $y - \sin y + x^2 = 0, \quad (x_0, y_0) = (\sqrt{\pi}, -\pi),$

5.2. $y^2 - \arctg y - e^x + 1 = 0, \quad (x_0, y_0) = (0, 0),$

5.3. $x = y + \ln y, \quad (x_0, y_0) = (1, 1).$

6. Napisać równanie stycznej do krzywej określonej równaniem

$$x + e^x = y + e^y$$

w punkcie $(x_0, y_0) = (1, 1).$

Teoria pola

1. Obliczyć gradient - ∇f i laplasjan - Δf pól skalarnych:

1.1. $f(x, y) = x^{10}y^4 + 5x^7y^3 - 4xy^2 + 1,$

1.2. $f(x, y) = (4x - 5y^2)^{10},$

1.3. $f(x, y, z) = x^8y^3z^2 + xz^5 + y^4 - 5xyz,$

1.4. $f(x, y, z) = x^5y^2 + 4xy^2z^3 - x^4 + 1.$

2. Obliczyć rotację - $\text{rot} w$ i dywergencję - $\text{div} w$ pól wektorowych:

2.1. $w(x, y) = (x^2y^3, 2x - 3y),$

2.2. $w(x, y) = (e^{xy} + \sin(4x^2 + y^3), \cos(x^4y^5)),$

2.3. $w(x, y, z) = (5x + 2y - 3z, x^2y^4, xyz - 1),$

2.4. $w(x, y, z) = (\ln(xyz), x + y^2 + z^3, x^2y^4z^6 + 3).$