

Wydział Górnictwa i Geoinżynierii AGH
Zadania z Analizy matematycznej, III semestr
ZESTAW 3

Całki krzywoliniowe nieskierowane, na płaszczyźnie

Obliczyć całki:

1.

$$\int_l y \, dl,$$

gdzie l jest krzywą $y = \frac{1}{3}x^3$, $x \in \langle 1, 2 \rangle$.

2.

$$\int_l xy \, dl,$$

gdzie l jest brzegiem rombu $|x| + |y| = 1$.

3.

$$\int_l xy^2 \, dl,$$

gdzie l jest półokręgiem $x^2 + y^2 = 9$, $x \leq 0$.

4.

$$\int_l (x^2 + y^2) \, dl,$$

gdzie l jest częścią ewolwenty okręgu o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $a > 0$: $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$, $t \in \langle \pi, 2\pi \rangle$.

Całki krzywoliniowe skierowane, na płaszczyźnie

Obliczyć całki:

1.

$$\int_l (x + 2y^2) \, dx + (xy - x^2) \, dy,$$

gdzie l jest częścią paraboli $y = x^2$, $x \in \langle 0, 2 \rangle$ skierowaną zgodnie ze wzrostem zmiennej x .

2.

$$\int_l x \, dx + y \, dy,$$

gdzie l jest częścią ewolwenty okręgu o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $a > 0$: $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$, $t \in \langle \pi, 2\pi \rangle$ skierowaną zgodnie ze wzrostem parametru t .

3.

$$\oint_l (x+y)^2 dx + (y-x)^2 dy,$$

gdzie l jest brzegiem prostokąta o wierzchołkach $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (1,2)$, $D = (0,2)$ zorientowanym dodatnio.

4.

$$\oint_l \frac{1}{2}xy^2 dx + x^2y dy,$$

gdzie l jest brzegiem trójkąta o wierzchołkach $A = (-1,0)$, $B = (1,0)$, $C = (0,1)$ zorientowanym dodatnio.

5.

$$\oint_l \frac{y}{x^2+y^2+1} dx + \frac{x}{x^2+y^2+1} dy,$$

gdzie l jest okręgiem $x^2 + y^2 = 4$ zorientowanym ujemnie.

6.

$$\int_{(1,1)}^{(2,1)} 2xy dx + x^2 dy$$

po dowolnej krzywej łączącej punkty $A = (1,1)$ i $B = (2,1)$, skierowanym od A do B .

7.

$$\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

po dowolnej krzywej łączącej punkty $A = (1,0)$ i $B = (6,8)$, nie przechodzącej przez punkt $(0,0)$, skierowanym od A do B .

Całki krzywoliniowe nieskierowane, w przestrzeni

Obliczyć całki:

1.

$$\int_l xyz dl,$$

gdzie l jest linią śrubową: $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$, $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, $a = \text{const} > 0$.

2.

$$\int_l \frac{z}{\sqrt{1+x^2+4y^2}} dl,$$

gdzie l jest krzywą: $x = t$, $y = \frac{1}{2}t^2$, $z = \frac{1}{3}t^3$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$.

Całki krzywoliniowe skierowane, w przestrzeni

Obliczyć całki:

1.

$$\int_l x dx + xy dy + xyz dz,$$

gdzie l jest odcinkiem łączącym punkty $A = (1, -1, 0)$ i $B = (-3, 1, 2)$, skierowanym od A do B .

2.

$$\int_{(1,-1,2)}^{(3,1,0)} 2x dx + 4y dy + 6z dz$$

po dowolnej krzywej łączącej punkty $A = (1, -1, 2)$ i $B = (3, 1, 0)$, skierowanej od A do B .

3.

$$\int_{(0,2,-1)}^{(1,2,3)} (y + z + yz) dx + (x + z + xz) dy + (x + y + xy) dz$$

po dowolnej krzywej łączącej punkty $A = (0, 2, -1)$ i $B = (1, 2, 3)$, skierowanej od A do B .

4.

$$\int_{(1,0,0)}^{(1,1,-1)} (3x^2 + 4y - 2z + 1) dx + (3y^2 + 4x + 5z + 1) dy + (3z^2 - 2x + 5y - 1) dz$$

po dowolnej krzywej łączącej punkty $A = (1, 0, 0)$ i $B = (1, 1, -1)$, skierowanej od A do B .

5.

$$\int_{(1,0,-3)}^{(2,1,-1)} \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

po dowolnej krzywej łączącej punkty $A = (1, 0, -3)$ i $B = (2, 1, -1)$, nie przechodzącej przez punkt $(0, 0, 0)$, skierowanej od A do B .