

~~11.11~~, ~~11.11~~

Liny zespolone

Zadanie z matematyki, ZESTAW ~~10~~ 11

2. Wykonaj działania: W zadaniach: 1, 2 (a, b, c, g), 3, 4, 5 (e, f)
wynik podać w postaci algebraicznej.

$$(2+3i)(5-4i), \quad \frac{1-i}{2+5i}, \quad \frac{(1+i)(2-i)}{(1-i)^2}, \quad \sqrt{12-5i},$$
$$\sqrt{3+4i}, \quad \sqrt{2i}.$$

2. Obliczyć:

$$\sqrt[4]{1}, \quad \sqrt[4]{1}, \quad \sqrt[3]{2}, \quad \sqrt[5]{1+i}, \quad \sqrt[7]{1-i}, \quad \sqrt[4]{1+i\sqrt{3}},$$
$$\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}, \quad \sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}.$$

3. Obliczyć:

$$(1-i\sqrt{3})^4, \quad (-2\sqrt{3}-2i)^5, \quad (-1+i\sqrt{3})^7, \quad (-1-i\sqrt{3})^9.$$

4. Rozwiązać równania:

$$z^2 - 2z + 5 = 0, \quad z^2 + 4z + 5 = 0, \quad z^2 - 6z + 11 = 0,$$
$$z^4 + 3z^2 - 4 = 0, \quad z^3 - 4z^2 + 6z - 4 = 0, \quad z^2 - i = 0,$$
$$(4-3i)z^2 - (2+11i)z - (5+i) = 0, \quad z^3 - 4z^2 + 2z - 4 = 0.$$

5. Rozwiązać równania:

$$a) \quad z^5 - \frac{256(1+i)^{20}}{(1-i\sqrt{3})^{18}} = 0, \quad f) \quad z^2 + \sqrt{3}iz - i = 0,$$
$$b) \quad z^4 - \frac{(1+i\sqrt{3})^9}{(1-i)^{18}} = 0,$$
$$c) \quad (z+i)^5 + \frac{(1+i\sqrt{3})^9 i}{2(-1+i)^{16}} = 0,$$
$$d) \quad z^4 + \frac{8(-1-i)^{18}}{(1-i\sqrt{3})^{12}} = 0,$$
$$e) \quad (z-1)^3 + \frac{(1+i\sqrt{3})^9 i}{2(-1+i)^{16}} = 0.$$

6. ^{Narysować} ~~Wyznaczyć~~ zbiór punktów $z \in \mathbb{C}$. Słuch, że:

a) $|z-2| = |z-4|$, b) $|\bar{z}-1+2i| = |z+i|$,

c) $|z-1| = \operatorname{Re}(2+i)$, d) $|z| = 2 \operatorname{Im} z$,

e) $|z|=4$, f) $|z-2+3i|=9$, g) $\frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Arg} \frac{1}{z} \leq \frac{\pi}{2}$,

h) $\frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Arg} \frac{1}{z^3} \leq \frac{\pi}{2}$, i) $|z-i|^2 > \operatorname{Im}(2z+3i)$

7.* Udowodnić, że jeśli liczba $z_0 \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem wielomianu stopnia n o współczynnikach rzeczywistych, to liczba sprzężona $\bar{z}_0 \in \mathbb{C}$ jest także pierwiastkiem tego wielomianu.

8.* Udowodnić, że:

a) $\cos 5x = \cos x (16 \cos^4 x - 20 \cos^2 x + 5)$, $x \in \mathbb{R}$,

b) $\sin 5x = \sin x (5 - 20 \sin^2 x + 16 \sin^4 x)$, $x \in \mathbb{R}$,

c) $\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$.

L. Sępa