

I Rok, Wydział Górnictwa i Geoinżynierii AGH

Jastrzębie Zdrój

Zadania z MATEMATYKI

ZESTAW 1

Logika

1. Wykazać, że następujące formuły są tautologiami:

- a) $(p \vee q) \iff (q \vee p)$ - prawo przemienności alternatywy,
- b) $(p \wedge q) \iff (q \wedge p)$ - prawo przemienności koniunkcji,
- c) $[(p \vee q) \vee r] \iff [p \vee (q \vee r)]$ - prawo łączności alternatywy,
- d) $[(p \wedge q) \wedge r] \iff [p \wedge (q \wedge r)]$ - prawo łączności koniunkcji,
- e) $[(p \wedge q) \vee r] \iff [(p \vee r) \wedge (q \vee r)]$ - prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji,
- f) $[(p \vee q) \wedge r] \iff [(p \wedge r) \vee (q \wedge r)]$ - prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy,
- g) $(p \iff \sim q) \implies (\sim p \implies q)$.

2. Sprawdzić, czy poniższa formuła jest tautologią

$$[(p \vee q) \wedge (p \implies q)] \implies (q \implies p).$$

3. Zaprzeczyć zdaniom logicznym:

- a) $\bigwedge_{x \in \mathbf{R}} \bigvee_{y \in \mathbf{R}} \bigvee_{z \in \mathbf{Z}} x = y \implies x + y + z > 1$,
- b) $\bigwedge_{x \in \mathbf{R}} \bigwedge_{y \in \mathbf{N}} (x > 0 \vee y \leq 0) \implies x + y = 3$.

Zbiory

1. Udowodnić następujące równości zbiorów:

- a) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ - prawo rozdzielności iloczynu względem sumy,
- b) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ - prawo rozdzielności różnicy względem sumy,
- c) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ - prawo rozdzielności różnicy względem iloczynu,
- d) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

2. Sprawdzić, czy prawdziwe są równości:

- a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$,
- b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
- c) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$.

3. Dane są zbiory $A = \{-1, 5, 7, 10, 15\}$ i $B = \{2, 5, 8, 11, 15\}$. Wyznaczyć: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \times B$, $B \times A$.

Dziedzina funkcji, funkcja odwrotna, złożenie funkcji

1. Wyznaczyć dziedzinę funkcji:

a) $f(x) = \frac{5x+3}{1-|x|} + \sqrt{-2x^2 + x + 1}$,

b) $f(x) = \frac{x^2-x-1}{\sqrt{2|x|-6}} - \sqrt{x^2 + 3x - 4}$,

c) $f(x) = \sqrt{5 - 3|x|} + \frac{1}{\sqrt{x^2+x-2}}$.

2. Wyznaczyć, o ile istnieją, funkcje odwrotne względem funkcji:

a) $y = 3x + 4$,

b) $y = x^2 + 1$,

c) $y = x^3 - 2$,

d) $y = \frac{1}{x}$.

Zrobić rysunki.

3. Dane są funkcje $f(x) = 2x + 3$ i $g(x) = \sqrt{4x - 5}$. Wyznaczyć złożenia: $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g$, $f \circ f \circ f$. Znaleźć dziedzinę tych złożień.