

Zadania 1

1 Udowodnić, że każda funkcja $u : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $u(t, x) := f(x - at) + g(x + at)$, $f, g \in C_*^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, jest rozwiązaniem równania struny drgającej

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

gdzie $0 < a = \text{const.}$

2 Udowodnić, że każda funkcja $u : (\mathbf{R} \setminus \{0\}) \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $u(x, y) := f\left(\frac{y}{x}\right) + xg\left(\frac{y}{x}\right)$, $f, g \in C_*^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, jest rozwiązaniem równania różniczkowego

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

3 Zbadać określoność macierzy i wyznaczyć formy kwadratowe generowane przez te macierze:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } \begin{bmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 7 & 2 & 5 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

4 Znaleźć macierz formy kwadratowej

$$Q(x, y, z, w) = x^2 - y^2 + 3z^2 - 5w^2 + xy - 4xw + 2zw.$$

5 Wykazać, że dowolna forma kwadratowa Q ma następującą własność:

$$\forall x, y, z \in \mathbf{R}^n \quad Q(x + y + z) - Q(x + y) - Q(y + z) - Q(x + z) + Q(x) + Q(y) + Q(z) = 0.$$

6 Niech macierze $A, B \in M_s^n$ będą dodatnio określone i niech $\alpha \in \mathbf{R}$ będzie dowolną liczbą. Sprawdzić, czy macierze $A + B$, $A - B$, AB , αA też są dodatnio określone. Analogiczne rozumowanie przeprowadzić w przypadku, gdy A, B są ujemnie określone, półokreślone dodatnio, półokreślone ujemnie, nieokreślone.

7 Niech macierze $A, B \in M^n$ mają słabo (silnie) dominującą diagonalą i niech $\alpha \in \mathbf{R}$ będzie dowolną liczbą. Sprawdzić, czy macierze $A + B$, $A - B$, AB , αA też mają słabo (silnie) dominującą diagonalę.

8 Wykazać indukcyjnie, że jeśli macierz $A \in M_s^n$ ma słabo (silnie) dominującą diagonalę, to jest półokreślona dodatnio (dodatnio określona).

9 Niech $A = [a_{ij}(x)]_{i,j=1}^n \in M_s^n$, $x \in E \subset \mathbf{R}^n$. Udowodnić, że jeśli istnieje stała $g > 0$ taka, że

$$\forall x \in E \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad g \leq a_{ii}(x) - \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^n |a_{ij}(x)|,$$

to macierz A jest *koercytywna* w zbiorze E , tj. że

$$\exists c > 0 \quad \forall x \in E \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq c \|\xi\|^2.$$

Podać przykład wskazujący na to, że twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

10 Udowodnić twierdzenie Gerszgorina.

11 Udowodnić Lemat 1.1 sformułowany na ćwiczeniach.

12 Udowodnić, że w przypadku dwuwymiarowym ($n=2$) równania liniowe są w punkcie $x \in E$ typu:

- a) eliptycznego $\Leftrightarrow \det A > 0$,
- b) hiperbolicznego $\Leftrightarrow \det A < 0$,
- c) parabolicznego $\Leftrightarrow \det A = 0$.

13 Określić typ równań różniczkowych:

- a) $u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$,
- b) $u_{xx} + x u_{yy} + u_y = 0$,
- c) $u_{xx} - y u_{xy} + u_{yy} = x + y$,
- d) $x u_{xx} + 2y u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$,
- e) $x u_{xx} + 2y u_{xy} + x y u_{yy} + u u_x = y$

(zobacz Definicję Reymonda).

14 Sprawdzić, czy silnie nieliniowe równania różniczkowe:

- a) $u_t = x u_{xx} + \arctg u_{yy} + u + \frac{x}{y^2+1} u_x - e^{-t} u_y$,
- b) $u_t = u_{xx} + \arctg u_{yy} - u_{xy} - u_{yx}$,
- c) $u_t = u_{xx} + u_{yy} + \cos \frac{u_{xy} + u_{yx}}{2} - u_{xy}$

są paraboliczne w zbiorze $E = [0, 1] \times (0, 1)^2$ (zobacz Definicję Waltera).