

Zadania 3

1 Wykazać, że dla operatora $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$, $f(x) := (x^2, x^3)$ dla $x \in [0, 1]$, nie jest prawdziwy odpowiednik uogólnionego twierdzenia o wartości średniej.

2 Dana jest funkcja $u : \mathbf{R}^2 \supset (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbf{R}$ klasy C^2 w pewnym otoczeniu punktu $(t_0, x_0) \in (a, b) \times (c, d)$. Dobrać sensowne założenie na h_0, h , aby

$$\lim_{(h_0, h) \rightarrow (0, 0)} \frac{u(t_0 + h_0, x_0) - \frac{u(t_0, x_0 - h) + u(t_0, x_0 + h)}{2}}{h_0} = u_t(t_0, x_0).$$

3 Równanie ciepła

$$u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy}),$$

gdzie $a = \text{const} > 0$, sprowadzić do postaci kanonicznej. Na jaki zbiór przekształcony zostanie prostopadłościan $\Omega = [0, T] \times [-1, 1]^2$?

4 Rozważmy równanie ciepła ze współczynnikiem $a = 1$, z zadania 3. Niech Ω będzie zbiorem ograniczonym prostymi:

a) $x + y = 1, x + y = 5, x - 3y = 2, x - 3y = 3,$

b) $x + y = 1, x + y = 5, x + 2y = 2, x + 2y = 3.$

Dokonujemy zamiany zmiennych: $a = x + y, b = x - 3y$ w przypadku a); $a = x + y, b = x + 2y$ w przypadku b). Znaleźć wzory na rozważane równanie w nowych zmiennych. Przeanalizować kwestię typu równania oraz dominacji diagonal macierzy współczynników w starych i nowych zmiennych. Sprawdzić, czy dla zagadnienia początkowo-brzegowego z warunkiem brzegowym typu Dirichleta, przyjmując, że $u = 0$ dla $t = 0$ i na brzegu walca Ω , spełnione są założenia o problemie różniczkowym oraz ograniczenia na kroki siatki w starych i nowych zmiennych.

5 Niech $(a_n), n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, będzie dowolnym ciągiem liczbowym (rzeczywistym) i niech liczby $a, h_0 > 0, b \geq 0$ będą ustalone. Definiujemy iloraz różnicowy δ_0 za pomocą wzoru

$$\delta_0 a_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{h_0}, \quad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

a) Wykazać, że jeśli ciąg (a_n) jest rozwiązaniem różnicowego problemu początkowego

$$\begin{cases} \delta_0 a_n \leq a a_n + b, & n \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \\ a_0 = 0, \end{cases}$$

to prawdziwe jest oszacowanie

$$a_n \leq \frac{b}{a} (e^{a h_0 n} - 1), \quad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

Znaleźć podobne oszacowanie, gdy $a_0 > 0$.

b) Udowodnić, że ciąg $(a_n), a_n = \frac{b}{a} (e^{a h_0 n} - 1), n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} \delta_0 a_n > a a_n + b, & n \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

($b > 0$).

6 Niech $E = [0, 1] \times (-1, 1)$, $\Omega = [0, 1] \times [-1, 1]$. Sprawdzić, który funkcjonal $f_i : E \times C(\Omega, \mathbf{R}) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$:

$$\text{a) } f_1(t, x, z, p, q) = q + p + \int_0^t \int_{-x}^x z(s, y) dy ds + z(t, x),$$

$$\text{b) } f_2(t, x, z, p, q) = q + p + \int_0^t \int_{-1}^1 z(s, y) dy ds + z\left(\frac{t+1}{2}, 1\right) + tx,$$

$$\text{c) } f_3(t, x, z, p, q) = q^2 + |p| + \int_0^t \int_{-1}^1 z(s, y) dy ds + z\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

jest typu Volterra. Który funkcjonal f_i , $i = 1, 2, 3$, spełnia warunek Perrona względem zmiennej funkcyjnej z ? Odpowiedź uzasadnić.

7 Udowodnić lematy o szybkości aproksymacji funkcji u operatorami interpolacyjnymi S_h i T_h .