

Zadania 4

1 Wykazać, że norma $\|\cdot\|_\infty$ wektorowa i macierzowa są zgodne oraz, że norma macierzowa $\|\cdot\|_\infty$ jest multiplikatywna. Podać przykłady norm wektorowej i macierzowej, które nie są zgodne oraz przykład normy macierzowej, która nie jest multiplikatywna.

2 Niech $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ będzie liniowym ograniczonym operatorem i niech $|F| := \sup_{\|x\|_\infty=1} \|Fx\|_\infty$ będzie jego normą. Zadając bazy kanoniczne w $\mathbf{R}^n$, z operatorem F kojarzymy macierz A . Wykazać, że $|F| = \|A\|_\infty$.

3 Oznaczmy przez $(X, \|\cdot\|)$ przestrzeń unormowaną. Niech $F : X \rightarrow X$ będzie liniowym ograniczonym operatorem i niech $|F| := \sup_{\|x\|=1} \|Fx\|$ będzie jego normą. Udowodnić, że:

- a) normy $\|\cdot\|$ i $|\cdot|$ są zgodne,
- b) norma $|\cdot|$ jest multiplikatywna.

4 Dana jest podprzestrzeń wektorowa $S = \text{lin}(e_1)$ przestrzeni wektorowej $(\mathbf{R}^3, +, \mathbf{R}, \cdot)$ i macierz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dowieść, że $A \in N(S) \cap M(S)$, ale A nie jest monotoniczna.

5 Dana jest podprzestrzeń wektorowa $S = \text{lin}(e_1)$ przestrzeni wektorowej $(\mathbf{R}^2, +, \mathbf{R}, \cdot)$ i macierze

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- a) Wykazać, że $A \in M_1(S)$ i $B \in M_3(S)$.
- b) Czy istnieje $k \geq 0$ takie, że $A + B \in M_k(S)$. Odpowiedź uzasadnić.

6 Rozważmy podprzestrzeń wektorową S przestrzeni wektorowej $(\mathbf{R}^n, +, \mathbf{R}, \cdot)$ i macierze $A, B \in M^n$. Uzasadnić, że jeśli $\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{1+k}$ i $B \in M_k(S)$ dla pewnego $k \geq 0$, to $AB \in M_{\|A^{-1}\|_\infty(1+k)}(S)$.

7 Czy działania dodawania, odejmowania, mnożenia i mnożenia przez liczbę macierzy oraz odwrotność macierzy zachowują monotoniczność, zasadę maksimum, rozszerzoną zasadę maksimum oraz dodatni typ? Odpowiedź uzasadnić.