



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE
Wydział Matematyki Stosowanej

Praca dyplomowa

Słabe rozwiązania układu Nernsta-Plancka-Poissona

Weak solutions of the Nernst-Planck-Poisson system

Autor:
Kierunek studiów:
Opiekun pracy:

Katarzyna Czerlunczakiewicz
Matematyka Stosowana
dr Lucjan Sapa

Kraków, 2021

Spis treści

Streszczenie	2
Abstract	3
Wstęp	4
Rozdział 1. Elementy analizy funkcjonalnej	6
1.1. Definicje	6
1.2. Twierdzenia pomocnicze i lematy	9
Rozdział 2. Układ Nernsta-Plancka-Poissona	12
2.1. Problem różniczkowy	12
2.2. Założenia i słabe sformułowanie problemu różniczkowego	14
Rozdział 3. Istnienie słabego rozwiązania	16
Rozdział 4. Jednoznaczność słabych rozwiązań	26
Rozdział 5. Nieujemność słabych rozwiązań	30
Bibliografia	32

Streszczenie

Praca poświęcona jest jednowymiarowemu nieliniowemu układowi Nernsta-Plancka-Poissona równań różniczkowych cząstkowych z warunkiem początkowym oraz nieliniowym warunkiem brzegowym na stężenia jonów, który w szczególności może być warunkiem Changa-Jaffé, i warunkiem Dirichleta na potencjał elektrochemiczny. Udowodniono twierdzenia o istnieniu, jednoznaczności i nieujemności lokalnych w czasie słabych rozwiązań, tj. w odpowiednich przestrzeniach Sobolewa. Twierdzenie o istnieniu rozwiązania wykazano przy pomocy twierdzenia Schaudera-Tychonoffa o punkcie stałym.

Słowa kluczowe

Układ paraboliczno-eliptyczny, istnienie, jednoznaczność, nieujemność, lokalne słabe rozwiązanie, przestrzeń Sobolewa, silne i słabe topologie, twierdzenie Schaudera-Tychonoffa o punkcie stałym

Abstract

We study in this paper the one-dimensional nonlinear Nernst-Planck-Poisson system of partial differential equations with the initial condition and nonlinear boundary condition on the concentrations of ions, which especially covers the Chang-Jaffé condition, and the Dirichlet condition on an electrochemical potential. Theorems on existence, uniqueness and nonnegativity of local in time weak solutions are proved, i.e., in suitable Sobolev spaces. The main tool used in the proof of the existence result is the Schauder–Tychonoff fixed point theorem.

Key words

Parabolic-elliptic system, existence, uniqueness, nonnegativity, local weak solution, Sobolev space, strong and weak topologies, Schauder-Tychonoff fixed point theorem

Wstęp

Dyfuzja to jedno z najczęściej występujących zjawisk fizycznych w naturze. Nazwa pochodzi od słowa „diffusio” czyli rozprzestrzenianie. Jest to proces samorzutnego rozprzestrzeniania i przenikania cząsteczek lub energii w każdym ośrodku (np. w gazie, ciele stałym, cieczy, itd.) będący konsekwencją chaotycznych zderzeń cząsteczek dyfundującej substancji między sobą lub z cząsteczkami otaczającego ją ośrodka. W przeciwieństwie do mieszania nie wymaga dostarczania dodatkowej energii z zewnątrz układu.

Szczególnym przypadkiem dyfuzji jest elektrodyfuzja. Jest to proces łączący dwa zjawiska: transport dyfuzyjny masy oraz transport ładunku elektrycznego. Ponieważ ładunki są zlokalizowane na jonach, to te dwa procesy dało się uwzględnić przez odpowiednią definicję strumienia masy i dołożenie równania na rozkład pola elektrycznego lub potencjału elektrycznego. Pierwszy model matematyczny opisujący elektrodyfuzję opracowali niezależnie od siebie Nernst w 1889 roku i Planck w 1890 roku. Model ten był później badany przez Debye’a i Hückela. W literaturze jest on nazywany modelem Nernsta-Plancka-Poissona, modelem Poissona-Nernsta-Plancka lub czasami modelem Debye’a-Hückela. Transport i dyfuzja naładowanych elektrycznie cząstek (jonów, elektronów, dziur, koloidów) odgrywa ważną rolę w wielu dyscyplinach nauki i techniki, a szczególnie w elektrochemii, inżynierii elektrycznej i biomedycznej oraz medycynie. Wartym podkreślenia jest fakt, że Hodgkin i Huxley za odkrycia dotyczące mechanizmów jonowych związanych ze wzbudzaniem i hamowaniem w obwodowych i centralnych częściach błony komórkowej nerwu otrzymali w 1963 roku Nagrodę Nobla w dziedzinie fizjologii i medycyny. Od wielu lat trwają intensywne badania mechanizmu transportu jonów różnych pierwiastków w tzw. kanałach jonowych zlokalizowanych w błonach komórkowych różnych komórek żywych organizmów. Sztucznym jednowymiarowym odpowiednikiem biologicznych kanałów jonowych są np. jonowe selektywne elektrody (ISE). Układ Nernsta-Plancka-Poissona modelujący elektrodyfuzję składa się z równań ciągłości dla strumieni Nernsta-Plancka i równania Poissona na potencjał elektrochemiczny. Jest to układ paraboliczno-eliptyczny. Dodatkowo zadaje się warunki początkowo-brzegowe.

W tej pracy udowodnimy twierdzenia o istnieniu, jednoznaczności i nieujemności lokalnych w czasie słabych rozwiązań, tj. w odpowiednich przestrzeniach Sobolewa. Twierdzenie o istnieniu rozwiązania wykażemy przy pomocy twierdzenia Schaudera-Tychonoffa o punkcie stałym. Wykorzystamy również wiele nierówności elementarnych

i różniczkowych, twierdzenia o ciągłym i zwartym zanurzeniu, twierdzenie Banacha-Alaoglu, twierdzenie Lebesgue'a o zmajorzowanym przejściu granicznym, własności operatora Niemyckiego oraz lematy Gronwalla, Ehrlinga i Aubina-Lionsa. Praca została napisana w oparciu o artykuł L. Sapy, On local weak solutions to Nernst-Planck-Poisson system [9]. Wiele twierdzeń pomocniczych zostało zaczerpnięte z monografii [3], [5], [7], [8], [11], [12], [13], [14], [16].

Warto podkreślić, że będziemy rozważać nieliniowy warunek brzegowy na stężenia jonów, który w szczególności obejmuje warunek Changa-Jaffé [6], i warunek Dirichleta na potencjał. Wprawdzie zajmiemy się tylko sytuacją jednowymiarową, ale rozważane warunki brzegowe są bardzo fizyczne i dopuszczają tzw. układy otwarte. Przypadek wielowymiarowy był studiowany w [1], [2], [4], [10]. We wspomnianych artykułach strumień na całym brzegu jest równy zero lub na fragmentach brzegu zadane są niektóre stężenia, co zdecydowanie ułatwia analizę matematyczną problemu różniczkowego. Dodajmy jeszcze, że wyniki z [9] zostały uogólnione na przypadek wielowymiarowy w [15].

Praca podzielona jest na pięć rozdziałów. W pierwszym rozdziale sformułowano niektóre definicje, twierdzenia pomocnicze i lematy z analizy funkcjonalnej. W rozdziale drugim wprowadzono oznaczenia, zdefiniowano problem różniczkowy i sformułowano jego słabą postać. Najważniejszy trzeci rozdział dotyczy twierdzenia o istnieniu słabego rozwiązania. Przedmiotem rozdziału czwartego jest jednoznaczność takich rozwiązań, zaś w rozdziale piątym sformułowano twierdzenie o ich nieujemności.

Rozdział 1

Elementy analizy funkcjonalnej

W tym rozdziale sformułujemy podstawowe definicje, twierdzenia pomocnicze i lematy, które będą wykorzystywane w dalszej części pracy.

1.1. Definicje

Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią unormowaną. Będziemy pisać w skrócie X .

Definicja 1.1. Funkcjonał liniowy $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy ograniczonym, gdy istnieje stała $M \geq 0$ taka, że dla każdego $x \in X$ zachodzi nierówność

$$|\phi(x)| \leq M\|x\|.$$

Przestrzeń wszystkich takich funkcjonałów oznaczamy symbolem X^* i nazywamy przestrzenią dualną.

Definicja 1.2. Normę liniowego ograniczonego funkcjonału $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ definiujemy wzorem

$$\|\phi\|_* = \inf\{M \geq 0 : |\phi(x)| \leq M\|x\|, \quad x \in X\}.$$

Definicja 1.3. Przestrzeń unormowaną X nazywamy przestrzenią Banacha, gdy jest zupełna.

Definicja 1.4. Przestrzeń unormowaną X nazywamy przestrzenią ośrodkową, gdy istnieje podzbiór $A \subset X$ przeliczalny i gęsty w tej przestrzeni.

Definicja 1.5. Przestrzeń Banacha X nazywamy refleksywną, gdy jej obraz w zanurzeniu kanonicznym pokrywa się z całą przestrzenią bidualną X^{**} .

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a, o mierze $m(\Omega) > 0$. Każde dwie funkcje określone i całkowalne w sensie Lebesgue'a na Ω uważamy za identyczne, gdy są one równe prawie wszędzie na Ω . Relacja równości prawie wszędzie jest relacją równoważności.

Definicja 1.6. Mówimy, że przestrzeń unormowana X jest przestrzenią Hilberta, gdy jest zupełna, a norma jest generowana przez iloczyn skalarny.

Definicja 1.7. Symbolem $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ oznaczamy przestrzeń klas równoważności relacji równości prawie wszędzie funkcji $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ z normą

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dm \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Definicja 1.8. Przez $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ rozumiemy przestrzeń funkcji $u \in L^p(K)$ dla każdego mierzalnego w sensie Lebesgue'a podzbioru zwartego $K \subset \Omega$.

Definicja 1.9. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym. Symbolem $C_0^\infty(\Omega)$ oznaczamy przestrzeń funkcji $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nieskończenie wiele razy różniczkowalnych o nośniku zwartym w Ω .

Definicja 1.10. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym. Przypuśćmy, że $u, D^\alpha u \in L^1_{loc}(\Omega)$ i $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, jest wielowskaźnikiem, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Mówimy, że $D^\alpha u$ jest α -słabą pochodną w sensie Sobolewa funkcji u , gdy

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u \phi dx$$

dla wszystkich funkcji próbnych $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Definicja 1.11. Rozważmy liczbę rzeczywistą p taką, że $1 \leq p < \infty$ oraz liczbę całkowitą $m = 0, 1, \dots$. Wówczas przestrzeń wszystkich funkcji $u \in L^p(\Omega)$ takich, że dla każdego wielowskaźnika α , $|\alpha| \leq m$, słaba pochodna $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ nazywamy przestrzenią Sobolewa i oznaczamy symbolem $W^{m,p}(\Omega)$. W szczególności dla $m = 0$ otrzymujemy $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. Ponadto dla $p = 2$ przyjmuje się oznaczenie $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$. Symbolem $H_0^1(\Omega)$ oznaczamy podprzestrzeń przestrzeni $H^1(\Omega)$ złożoną z funkcji zerujących się na brzegu $\partial\Omega$ w sensie śladu.

Definicja 1.12. Normę w przestrzeni Sobolewa $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ określamy wzorem

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definicja 1.13. Mówimy, że funkcja $s : [0, T] \rightarrow X$ jest prosta, gdy

$$s(t) = \sum_{i=1}^m \chi_{E_i}(t) u_i, \quad t \in [0, T],$$

gdzie każdy ze zbiorów $E_i \subset [0, T]$ jest mierzalnym podzbiorem, a $u_i \in X$, $i = 1, \dots, m$.

Definicja 1.14. Mówimy, że $u : [0, T] \rightarrow X$ jest silnie mierzalna, gdy istnieje ciąg funkcji prostych $s_n : [0, T] \rightarrow X$ taki, że

$$s_n(t) \rightarrow u(t) \quad \text{dla p.w. } t \in (0, T).$$

Definicja 1.15. Symbolem $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$ oznaczamy przestrzeń funkcji silnie mierzalnych $u : [0, T] \rightarrow X$ takich, że

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Definicja 1.16. Niech $u \in L^1(0, T; Y)$. Funkcja $u^{(n)} \in L^1(0, T; Z)$ jest uogólnioną pochodną n -tego rzędu funkcji u , gdy

$$\int_0^T u(t) \phi^{(n)}(t) dt = (-1)^n \int_0^T u^{(n)}(t) \phi(t) dt$$

dla wszystkich funkcji próbnych $\phi \in C_0^\infty(0, T)$.

Definicja 1.17. Trójką ewolucyjną nazywamy układ trzech przestrzeni

$$V \subset H \subset V^*,$$

które spełniają warunki:

- (i) V jest rzeczywistą, ośrodkową i refleksywną przestrzenią Banacha,
- (ii) H jest rzeczywistą, ośrodkową przestrzenią Hilberta,
- (iii) zanurzenie $V \subset H$ jest ciągłe, tzn. że istnieje stała $C > 0$ taka, że

$$\|v\|_H \leq C \|v\|_V, \quad v \in V,$$

i V jest gęsta w H .

Definicja 1.18. Niech $V \subset H \subset V^*$ będzie trójką ewolucyjną. Symbolem $W^{1,p}(0, T; V, H)$ oznaczmy przestrzeń funkcji $u : [0, T] \rightarrow V$ takich, że $u \in L^p(0, T; V)$ i $u_t \in L^q(0, T; V^*)$, gdzie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p, q < \infty$.

Definicja 1.19. Normę w przestrzeni $W^{1,p}(0, T; V, H)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p, q < \infty$, definiujemy wzorem

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;V,H)} = \|u\|_{L^p(0,T;V)} + \|u_t\|_{L^q(0,T;V^*)},$$

gdzie $u \in W^{1,p}(0, T; V, H)$.

Definicja 1.20. Mówimy, że ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ elementów przestrzeni Banacha X jest słabo zbieżny do $x \in X$, gdy

$$x^*(x_n) \rightarrow x^*(x)$$

dla każdego ograniczonego funkcjonału linowego $x^* \in X^*$.

Definicja 1.21. Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha. Operator $F : X \rightarrow Y$ jest ciągowo słabo ciągły, gdy dla dowolnego ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ z X , jeśli $x_n \rightarrow x$ słabo w X , to $F(x_n) \rightarrow F(x)$ słabo w Y .

Definicja 1.22. Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha. Operator $F : X \rightarrow Y$ jest zwarty, gdy jest ciągły i dla dowolnego ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ograniczonego w X istnieje podciąg ciągu $(F(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ zbieżny w Y .

Definicja 1.23. Niech $X \subset Y$ będą przestrzeniami Banacha. Jeśli operator identyczności $i : X \rightarrow Y$ jest ciągły, tzn. że

$$\forall x \in X \quad \|x\|_Y \leq C \|x\|_X,$$

to mówimy, że zanurzenie X w Y jest ciągłe. Jeśli operator identyczności $i : X \rightarrow Y$ jest zwarty, to mówimy, że zanurzenie X w Y jest zwarte.

Definicja 1.24. Niech $s \in (0, 1)$. Przestrzeń wszystkich funkcji $u \in L^2(\Omega)$ takich, że

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy < \infty$$

nazywamy ułamkową przestrzenią Sobolewa i oznaczamy symbolem $H^s(\Omega)$.

Definicja 1.25. Normę w przestrzeni $H^s(\Omega)$, $s \in (0, 1)$ definiujemy wzorem

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definicja 1.26. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym zbiorem. Rozważmy funkcję $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, która spełnia warunki Carathéodorego:

1. $f(x, u)$ jest ciągła względem u dla p.w. $x \in \Omega$,
2. $f(x, u)$ jest mierzalna względem x dla każdego $u \in \mathbb{R}^m$.

Niech ponadto $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ będzie dowolną funkcją z ustalonej przestrzeni. Operator

$$F(u)(x) := f(x, u(x))$$

nazywamy operatorem Niemyckiego.

1.2. Twierdzenia pomocnicze i lematy

Twierdzenie 1.27 (Schauder-Tychonoff). *Niech X będzie refleksywną przestrzenią Banacha i niech $C \subset X$ będzie domkniętym, ograniczonym, wypukłym i niepustym zbiorem. Jeżeli funkcja $\Lambda : C \rightarrow C$ jest ciągłowo słabo ciągła, to ma punkt stały.*

Twierdzenie 1.28 (Banach-Alaoglu). *W refleksywnej przestrzeni Banacha X z każdego ciągu ograniczonego $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ elementów przestrzeni X da się wybrać podciąg słabo zbieżny do pewnego elementu $x \in X$.*

Twierdzenie 1.29. *Jeśli ciąg $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ elementów przestrzeni Banacha X ma podciąg $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ słabo zbieżny do $u \in X$ i każdy jego podciąg, który jest słabo zbieżny też jest słabo zbieżny do u , to ciąg $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest słabo zbieżny do u .*

Twierdzenie 1.30. *Niech $V \subset H \subset V^*$ będzie trójką ewolucyjną i niech $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Funkcja $u^{(n)} \in L^q(0, T; V^*)$ jest n -tą uogólnioną pochodną funkcji $u \in L^p(0, T; V)$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\int_0^T (u(t), v)_H \phi^{(n)}(t) dt = (-1)^n \int_0^T \langle u^{(n)}(t), v \rangle_V \phi(t) dt, \quad v \in V, \quad \phi \in C_0^\infty(0, T).$$

Uwaga 1.31. Z twierdzenia 1.30 i definicji 1.16 wynika, że dla dowolnie ustalonego $v \in V$

$$\frac{d^n}{dt^n} (u(t), v)_H = \langle u^{(n)}(t), v \rangle_V.$$

Twierdzenie 1.32. Niech $V \subset H \subset V^*$ będzie trójką ewolucyjną. Prawdziwa jest tożsamość

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_H^2 = \langle u_t(t), u(t) \rangle_V.$$

Twierdzenie 1.33. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ma miarę Lebesgue'a skończoną. Jeśli $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$, to:

$$i) \quad L^{p_2}(\Omega) \subset L^{p_1}(\Omega),$$

$$ii) \quad \|f\|_{L^{p_1}(\Omega)} \leq (m(\Omega))^{\frac{p_2-p_1}{p_1 p_2}} \|f\|_{L^{p_2}(\Omega)}.$$

Twierdzenie 1.34. Przestrzeń $W^{1,p}(0, T; V, H)$, $1 < p < \infty$, zanurza się w sposób ciągły w przestrzeni $C([0, T], H)$, tzn. że

$$\|u\|_{C([0, T], H)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(0, T; V, H)}, \quad u \in W^{1,p}(0, T; V, H)$$

dla pewnej stałej $C > 0$.

Uwaga 1.35. Nierówność w twierdzeniu 1.34 rozumiana jest w następującym sensie. Jeśli $u \in W^{1,p}(0, T; V, H)$, to istnieje dokładnie jedna ciągła funkcja $u_1 : [0, T] \rightarrow H$ równa prawie wszędzie na $[0, T]$ funkcji u , a ponadto

$$\|u_1\|_{C([0, T], H)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(0, T; V, H)}.$$

Twierdzenie 1.36 (O śladzie). Niech $1 \leq p < \infty$. Istnieje dokładnie jeden ograniczony operator liniowy

$$T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$$

taki, że:

$$i) \quad Tu = u|_{\partial\Omega}, \text{ gdy } u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}),$$

$$ii) \quad \|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

dla każdej $u \in W^{1,p}(\Omega)$, przy czym stała C zależy od p , n i Ω .

Lemat 1.37 (Nierówność Cauchy'ego z epsilon). Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ i dla dowolnego $\epsilon > 0$ zachodzi

$$|ab| \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon}.$$

Lemat 1.38 (Nierówność Cauchy'ego-Schwarza). W Przestrzeni unitarnej $(X, (\cdot, \cdot))$

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|, \quad x, y \in X.$$

Lemat 1.39 (Nierówność Höldera). Załóżmy, że $1 < p, q < \infty$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Jeśli $f \in L^p(G)$ i $g \in L^q(\Omega)$, to

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Twierdzenie 1.40. Przestrzenie $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$ i V^* stanowią trójkę ewolucyjną.

Twierdzenie 1.41. Jeżeli $u_n \rightarrow u$ w $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, to istnieje $g \in L^p(\Omega)$ taka, że $|u_n(x)| \leq g(x)$ dla p.w. $x \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$ i podciąg $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ taki, że $u_{n_k}(x) \rightarrow u(x)$ dla p.w. $x \in \Omega$.

Twierdzenie 1.42 (Lebesgue). *Niech $u_n : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągiem funkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a. Jeżeli:*

1. $u_n(t) \rightarrow u(t)$ dla p.w. $t \in (0, T)$,
2. $|u_n(t)| \leq g(t)$ dla p.w. $t \in (0, T)$, $n \in \mathbb{N}$ i g jest funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a,

to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T u_n(t) dt = \int_0^T u(t) dt.$$

Twierdzenie 1.43. *Jeżeli $\Omega \subset \mathbb{R}$, to zanurzenie jest:*

1. $H^1(\Omega) \subset H^s(\Omega)$, $s \in (\frac{1}{2}, 1)$ zwarte,
2. $H^s(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, $s \in [0, 1]$ ciągle,
3. $H^s(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$, $s \in (\frac{1}{2}, 1]$ ciągle.

Lemat 1.44 (Gronwall). *Niech u będzie funkcją nieujemną, absolutnie ciągłą na przedziale $[0, T]$. Załóżmy, że dla p.w. $t \in (0, T)$ spełniona jest nierówność różniczkowa*

$$u'(t) \leq a(t)u(t) + b(t),$$

gdzie a i b są nieujemnymi funkcjami całkowalnymi na $(0, T)$. Wówczas

$$u(t) \leq e^{\int_0^t a(s) ds} \left(u(0) + \int_0^t b(s) ds \right)$$

dla każdego $t \in [0, T]$.

Lemat 1.45 (Ehring). *Niech $X \subset Y \subset Z$ będą przestrzeniami Banacha. Jeżeli zanurzenie $X \subset Y$ jest zwarte i zanurzenie $Y \subset Z$ jest ciągle, to dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje stała $C(\epsilon)$ taka, że dla każdego $x \in X$*

$$\|x\|_Y \leq \epsilon \|x\|_X + C(\epsilon) \|x\|_Z.$$

Lemat 1.46 (Aubin-Lions). *Niech $X \subset Y \subset Z$ będą przestrzeniami Banacha. Jeżeli zanurzenie $X \subset Y$ jest zwarte i zanurzenie $Y \subset Z$ jest ciągle, to zanurzenie $W \subset L^p(0, T, Y)$ jest zwarte, gdzie*

$$W = \{u \in L^p(0, T; X) : u_t \in L^q(0, T; Z)\},$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad 1 < p, q < \infty.$$

Rozdział 2

Układ Nernsta-Plancka-Poissona

W tym rozdziale zdefiniujemy problem różniczkowy i sformułujemy jego słabą wersję. Wprowadzimy również stosowne założenia.

2.1. Problem różniczkowy

Oznaczmy $\Omega = (0, 1)$ i niech $T > 0$ będzie dowolne. Niech funkcje $u_0, v_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f_i, g_i : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ i stałe $\alpha_i, \beta_i, \lambda > 0$ dla $i = 1, 2$ będą dane. Rozważmy nieliniowy układ równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu, w którym dwa równania są typu parabolicznego i jedno równanie jest typu eliptycznego

$$\begin{cases} u_t(t, x) = \alpha_1 u_{xx}(t, x) - \alpha_2 (u(t, x) \phi_x(t, x))_x, & (t, x) \in [0, T] \times \Omega, \\ v_t(t, x) = \beta_1 v_{xx}(t, x) + \beta_2 (v(t, x) \phi_x(t, x))_x, & (t, x) \in [0, T] \times \Omega, \\ \phi_{xx}(t, x) = \lambda (u(t, x) - v(t, x)), & (t, x) \in [0, T] \times \Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

z warunkami początkowymi

$$u(0, x) = u_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x), \quad x \in \Omega \quad (2.2)$$

i nieliniowymi warunkami brzegowymi

$$\begin{cases} \alpha_1 u_x(t, 0) - \alpha_2 u(t, 0) \phi_x(t, 0) = f_1(t, u(t, 0)), & t \in [0, T], \\ \alpha_1 u_x(t, 1) - \alpha_2 u(t, 1) \phi_x(t, 1) = f_1(t, u(t, 1)), & t \in [0, T], \\ \beta_1 v_x(t, 0) + \beta_2 v(t, 0) \phi_x(t, 0) = g_1(t, v(t, 0)), & t \in [0, T], \\ \beta_1 v_x(t, 1) + \beta_2 v(t, 1) \phi_x(t, 1) = g_1(t, v(t, 1)), & t \in [0, T], \\ \phi(t, 0) = h_1(t), & t \in [0, T], \\ \phi(t, 1) = h_2(t), & t \in [0, T]. \end{cases} \quad (2.3)$$

Warto podkreślić, że równania w układzie (2.1) są silnie sprzężone, tj. przez ϕ_{xx} . Cztery pierwsze warunki brzegowe w (2.3) również są sprzężone przez ϕ_x i są one nieliniowym uogólnieniem warunku Robina.

Uwaga 2.1. Układ (2.1) jest szczególnym przypadkiem w pełni fizycznego n wymiarowego układu, tzn. $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} (c_i)_t = D_i \left(\Delta c_i + z_i \frac{F}{RT} \nabla \cdot (c_i \nabla \phi) \right), & i = 1, \dots, m, \\ \Delta \phi = -\frac{F}{\epsilon_r \epsilon_0} \sum_{j=1}^m z_j c_j. \end{cases} \quad (2.4)$$

Wystarczy położyć:

$$n = 1, \quad m = 2, \quad z_1 = -z, \quad z_2 = z, \quad (z \in \mathbb{N}), \quad u = c_1, \quad v = c_2, \\ \alpha_1 = D_1, \quad \alpha_2 = -D_1 z_1 \frac{F}{RT}, \quad \beta_1 = D_2, \quad \beta_2 = D_2 z_2 \frac{F}{RT}, \quad \lambda = \frac{F}{\epsilon_r \epsilon_0},$$

gdzie c_i oznacza stężenie i -tych jonów, ϕ - potencjał elektryczny generowany przez wszystkie jony, D_i - współczynniki dyfuzji, F - stałą Faraday'a, R - stałą gazową, $\tilde{T}$ - temperaturę, z_i - wartości ładunków jonów, ϵ_0 , ϵ_r - stałą dielektryczną próżni i względną stałą dielektryczną ośrodka, odpowiednio, $\lambda = \frac{F}{\epsilon_0 \epsilon_r}$ - stałą Deby'a, zaś $\alpha = \frac{F}{RT}$.

Uwaga 2.2. Układ Nernsta-Plancka-Poissona (2.1) i warunki brzegowe (2.3) mogą być zapisane w sposób bardziej fizyczny

$$\begin{cases} u_t(t, x) = -(J_1)_x(t, x), & (t, x) \in [0, T] \times \Omega, \\ v_t(t, x) = -(J_2)_x(t, x), & (t, x) \in [0, T] \times \Omega, \\ \phi_{xx}(t, x) = \lambda(u(t, x) - v(t, x)), & (t, x) \in [0, T] \times \Omega, \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} J_1(t, 0) = -f_1(t, u(t, 0)), & t \in [0, T], \\ J_1(t, 1) = -f_2(t, u(t, 1)), & t \in [0, T], \\ J_2(t, 0) = -g_1(t, v(t, 0)), & t \in [0, T], \\ J_2(t, 1) = -g_2(t, v(t, 1)), & t \in [0, T], \\ \phi(t, 0) = h_1(t), & t \in [0, T], \\ \phi(t, 1) = h_2(t), & t \in [0, T], \end{cases} \quad (2.6)$$

gdzie J_1, J_2 są strumieniami Nernsta-Plancka postaci

$$J_1 = -\alpha_1 u_x + \alpha_2 u \phi_x, \quad J_2 = -\beta_1 v_x - \beta_2 v \phi_x. \quad (2.7)$$

Zauważmy, że warunki brzegowe (2.3) i (2.6) uogólniają dobrze znane w literaturze warunki Changa-Jaffé (CJ)

$$\begin{cases} J_1(t, 0) = a_{11} - a_{21}u(t, 0), \\ J_1(t, 1) = -a_{12} + a_{22}u(t, 1), \\ J_2(t, 0) = b_{11} - b_{21}v(t, 0), \\ J_2(t, 1) = -b_{12} + b_{22}v(t, 1), \end{cases} \quad (2.8)$$

gdzie stałe $a_{ij}, b_{ij} \geq 0$ dla $i, j = 1, 2$ są dane [6].

Uwaga 2.3. Jeżeli $h_1(t) \not\equiv 0$ lub $h_2(t) \not\equiv 0$, to podstawienie

$$\phi(t, x) = (h_2(t) - h_1(t))x + h_1(t) + \psi(t, x)$$

sprowadza problem (2.1)-(2.3) do postaci równoważnej z jednorodnymi warunkami na ψ . W celu uniknięcia niewygodnych obliczeń, w dalszej części pracy będziemy rozważać tylko przypadek $h_1(t) \equiv h_2(t) \equiv 0$. Wyniki mogą być z łatwością uogólnione na przypadek dowolnych $h_1, h_2 \in L^2(0, T)$. Dodatkowo, z fizycznego punktu widzenia, interesują nas wartości jonów $z_1 < 0$ i $z_2 > 0$. Nasze wyniki można bez trudu rozszerzyć na taką ogólną sytuację.

2.2. Założenia i słabe sformułowanie problemu różniczkowego

W tej pracy wykorzystamy standardowe przestrzenie Sobolewa $V = H^1(\Omega)$ i $H = L^2(\Omega)$. Wówczas przestrzenie

$$V \subset H \subset V^*$$

stanowią trójkę ewolucyjną, w której obydwie zanurzenia są gęste, ciągłe i zwarte. Symbolem H_+ oznaczmy zbiór nieujemnych funkcji z H ,

$$H_+ = \{u \in H : u(x) \geq 0 \text{ p.w. w } \Omega\}.$$

Stała $C > 0$ będzie oznaczać stałą generyczną zależną od danych w rozważanym zagadnieniu.

Przyjmijmy następujące założenia na warunki początkowe (2.2) oraz funkcje f_i, g_i w warunkach brzegowych (2.3).

Założenie H.

(H_0) $u_0 \in H, v_0 \in H$.

(H_1) $f_i, g_i, i = 1, 2$ spełniają warunki Carathéodory'ego, tzn. że funkcje $f_i(\cdot, u), g_i(\cdot, u)$ są mierzalne, zaś $f_i(t, \cdot), g_i(t, \cdot)$ są ciągłe.

(H_2) Zachodzą następujące warunki wzrostu

$$|f_i(t, u)| \leq a_{1i} + a_{2i}|u|, \quad |g_i(t, u)| \leq b_{1i} + a_{2i}|u|,$$

dla p.w. $t \in (0, T)$ oraz dla wszystkich $u \in \mathbb{R}$, ze stałymi $a_{1i}, a_{2i}, b_{1i}, b_{2i} \geq 0, i = 1, 2$.

(H_3) Spełnione są jednostronne warunki Lipschitza:

$$f_1(t, u_1) - f_1(t, u_2) \geq -L_{f_1}(u_1 - u_2),$$

$$g_1(t, u_1) - g_1(t, u_2) \geq -L_{g_1}(u_1 - u_2),$$

$$f_2(t, u_1) - f_2(t, u_2) \leq L_{f_2}(u_1 - u_2),$$

$$g_2(t, u_1) - g_2(t, u_2) \leq L_{g_2}(u_1 - u_2),$$

dla p.w. $t \in (0, T)$ i dla wszystkich $u_1, u_2 \in \mathbb{R}, u_1 \geq u_2$, ze stałymi $L_{f_i}, L_{g_i} \geq 0, i = 1, 2$.

Założenie H^+ .

(H_0^+) $u_0 \in H_+, v_0 \in H_+$.

(H_1^+) Dla $u < 0$ oraz dla p.w. $t \in (0, T)$

$$f_1(t, u) \leq 0 \quad \text{i} \quad g_1(t, u) \leq 0,$$

$$f_2(t, u) \geq 0 \quad \text{i} \quad g_2(t, u) \geq 0.$$

Uwaga 2.4. Zauważmy, że jeśli rozwiązania u, v problemu (2.1)-(2.3) przypuszczalnie są nieujemne, to funkcje f_i, g_i można zmodyfikować bez wpływu na te rozwiązania, do postaci:

$$f_i(t, u) = f_i(t, 0) \quad \text{ i } \quad g_i(t, u) = g_i(t, 0)$$

dla $u < 0$ i dla p.w. $t \in (0, T)$. A zatem zamiast (H_1^+) można założyć, że

$$f_1(t, 0) \leq 0, \quad g_1(t, 0) \leq 0 \quad \text{ oraz } \quad f_2(t, 0) \geq 0, \quad g_2(t, 0) \geq 0$$

dla p.w. $t \in (0, T)$.

Uwaga 2.5. Z uwagi 2.4 wynika, że Założenia **H** i **H**⁺ są spełnione w przypadku warunków brzegowych (CJ) postaci (2.8), gdyż możemy położyć

$$f_1(t, u) = -a_{11} + a_{21}u, \quad f_2(t, u) = a_{12} - a_{22}u,$$

$$g_1(t, u) = -b_{11} + b_{21}u, \quad g_2(t, u) = b_{12} - b_{22}u,$$

dla wszystkich $t \in [0, T]$ i $u \in \mathbb{R}$.

W dalszej części pracy będziemy pisać $\langle u_t, \eta \rangle_{V^* \times V}$ zamiast $\langle u_t, \eta \rangle_V$ dla podkreślenia, że mamy na myśli parę (u_t, η) . Taka notacja jest wygodna ze względu na współczesną analizę funkcyjną. Oryginalny problem początkowo-brzegowy (2.1)-(2.3) ma następujące słabe sformułowanie.

Problem PE. Znaleźć $u, v \in L^2(0, T; V)$ i $\phi \in L^2(0, T; H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ takie, że $u_t, v_t \in L^2(0, T; V^*)$ i dla p.w. $t \in (0, T)$ zachodzą równości

$$\begin{aligned} \langle u_t, \eta \rangle_{V^* \times V} + \int_{\Omega} (\alpha_1 u_x - \alpha_2 u \phi_x) \eta_x dx \\ = f_2(t, u(t, 1)) \eta(1) - f_1(t, u(t, 0)) \eta(0) \quad \text{ dla każdego } \eta \in V, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \langle v_t, \zeta \rangle_{V^* \times V} + \int_{\Omega} (\beta_1 v_x + \beta_2 v \phi_x) \zeta_x dx \\ = g_2(t, v(t, 1)) \zeta(1) - g_1(t, v(t, 0)) \zeta(0) \quad \text{ dla każdego } \zeta \in V, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\int_{\Omega} \phi_x \xi_x dx + \lambda \int_{\Omega} (u - v) \xi dx = 0 \quad \text{ dla każdego } \xi \in H_0^1(\Omega), \quad (2.11)$$

i spełniony jest warunek początkowy (2.2).

Rozdział 3

Istnienie słabego rozwiązania

W tym rozdziale udowodnimy twierdzenie 3.6 o istnieniu słabego rozwiązania badanego problemu różniczkowego. Najpierw dowiedzimy cztery lematy.

Podzielmy Problem **PE** na dwa problemy pomocnicze: eliptyczny (Problem **E**) oraz paraboliczny (Problem **P**).

Problem E. Dla ustalonych $w, z \in L^2(0, T; V)$ znaleźć $\psi \in L^2(0, T; H^3(\Omega)) \cap H_0^1(\Omega)$ takie, że dla p.w. $t \in (0, T)$

$$\int_{\Omega} \psi_x \xi_x dx + \lambda \int_{\Omega} (w - z) \xi dx = 0 \quad \text{dla każdego } \xi \in H_0^1(\Omega). \quad (3.1)$$

Problem P. Dla ustalonych $w, z \in L^2(0, T; V)$ i $\psi \in L^2(0, T; H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ znaleźć $u, v \in L^2(0, T; V)$ takie, że $u_t, v_t \in L^2(0, T; V^*)$ i dla p.w. $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} \langle u_t, \eta \rangle_{V^* \times V} + \int_{\Omega} (\alpha_1 u_x - \alpha_2 u \psi_x) \eta_x dx \\ = f_2(t, w(t, 1)) \eta(1) - f_1(t, w(t, 0)) \eta(0) \quad \text{dla każdego } \eta \in V, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \langle v_t, \zeta \rangle_{V^* \times V} + \int_{\Omega} (\beta_1 v_x + \beta_2 v \psi_x) \zeta_x dx \\ = g_2(t, z(t, 1)) \zeta(1) - g_1(t, z(t, 0)) \zeta(0) \quad \text{dla każdego } \zeta \in V, \end{aligned} \quad (3.3)$$

z początkowymi warunkami (2.2).

Zdefiniujmy przestrzeń wektorową dla dowolnego $T > 0$

$$X_T = \{(u, v) \in L^2(0, T; V) \times L^2(0, T; V) : u_t, v_t \in L^2(0, T; V^*)\} \quad (3.4)$$

z normą

$$\begin{aligned} \|(u, v)\|_{X_T} &= \|u\|_{L^2(0,T;V)} + \|v\|_{L^2(0,T;V)} + \|u_t\|_{L^2(0,T;V^*)} + \|v_t\|_{L^2(0,T;V^*)}, \\ \|u\|_{L^2(0,T;V)}^2 &= \int_0^T \|u(t)\|_V^2 dt, \quad \|u_t\|_{L^2(0,T;V^*)}^2 = \int_0^T \|u_t(t)\|_{V^*}^2 dt. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Będziemy używać dwóch topologii w tej przestrzeni, silnej oraz słabej. Zdefiniujemy zbiór

$$B = B(T, Q_0, Q_1, Q_2, R_0, R_1, R_2)$$

sparametryzowany przez czas $T > 0$ i stałe $Q_0, Q_1, Q_2, R_0, R_1, R_2 > 0$

$$\begin{aligned} B = \{(w, z) \in X_T : & \|w\|_{L^2(0,T;H)}^2 \leq Q_0, \quad \|w_x\|_{L^2(0,T;H)}^2 \leq Q_1, \\ & \|z\|_{L^2(0,T;H)}^2 \leq R_0, \quad \|z_x\|_{L^2(0,T;H)}^2 \leq R_1, \\ & \|w_t\|_{L^2(0,T;V^*)}^2 \leq Q_2, \quad \|z_t\|_{L^2(0,T;V^*)}^2 \leq R_2\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Zbiór B jest wypukły i silnie domknięty w X_T , zatem jest też słabo domknięty. Z faktu, że jest też silnie ograniczony wynika, że jest słabo zwarty. Zdefiniujemy operator

$$\Lambda_E : B \rightarrow L^2(0, T; H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)),$$

który dowolnej parze $(w, z) \in B$ przyporządkowuje jedyne rozwiązanie $\psi \in L^2(0, T; H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ Problemu **E** oraz operator

$$\Lambda_p : B \times L^2(0, T; H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \rightarrow X_T,$$

który dowolnej parze $(w, z) \in B$ i funkcji $\psi \in L^2(0, T; H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ przyporządkowuje jedyne rozwiązanie $(u, v) \in X_T$ Problemu **P**. Składając te dwa operatory, możemy zdefiniować operator

$$\Lambda : B \rightarrow X_T, \quad \Lambda(w, z) = \Lambda_p(w, z, \Lambda_E(w, z)).$$

Rozwiązaniem Problemu **PE** jest (u, v, ϕ) wtedy i tylko wtedy, gdy (u, v) jest punktem stałym operatora Λ oraz $\phi = \Lambda_E(u, v)$. Podamy kilka lematów, które implikują poprawność definicji $\Lambda_E, \Lambda_p, \Lambda$ i które będą przydatne przy wykazywaniu istnienia rozwiązania Problemu **PE**.

Lemat 3.1. *Problem **E** ma jedyne rozwiązanie i prawdziwe jest następujące oszacowanie*

$$\|\psi(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq C\lambda\|(w(t) - z(t))\|_H \quad \text{dla p.w. } t \in (0, T), \quad C > 0. \quad (3.7)$$

Dowód. Istnienie dla p.w. $t \in (0, T)$ oraz jedyność słabego rozwiązania $\psi = \psi(t, \cdot) \in H_0^1(\Omega)$ wynika z [8, rozdział 6.2, twierdzenie 3]. Następnie z [8, rozdział 6.3, twierdzenie 5] dla p.w. $t \in (0, T)$ $\psi(t) \in H^3(\Omega)$ oraz

$$\|\psi(t)\|_{H^3(\Omega)} \leq C\|\lambda(w(t) - z(t))\|_V \quad \text{dla p.w. } t \in (0, T). \quad (3.8)$$

Zauważmy, że z mierzalności w, z względem t , liniowości równania (3.1) i nierówności (3.8) wynika mierzalność ψ względem t . Stąd

$$\int_0^T \|\psi\|_{H^3(\Omega)}^2 dt \leq C \int_0^T \|\lambda(w(t) - z(t))\|_V^2 dt < \infty \quad (3.9)$$

i w konsekwencji $\psi \in L^2(0, T; H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$. Oszacowanie (3.7) wynika z [8, rozdział 6.3, twierdzenie 4]. $\square$

Lemat 3.2. *Jeżeli założenia (H_0) , (H_1) , (H_2) są spełnione, to Problem **P** ma jedyne rozwiązanie.*

Dowód. Zauważmy, że $\psi_x \in L^2(0, T; H^2(\Omega))$ oraz $f_i(\cdot, w(\cdot, 0))$, $f_i(\cdot, w(\cdot, 1))$, $g_i(\cdot, z(\cdot, 0))$, $g_i(\cdot, z(\cdot, 1)) \in L^2(0, T)$, $i = 1, 2$ są danymi funkcjami. Dowód istnienia i jedyności rozwiązania problemów liniowych postaci (3.2) i (3.3) jest standardowy i może być przeprowadzony na przykład przy użyciu metody Galerkin, analogicznie do dowodu w [7, twierdzenie 11.7]. $\square$

Lemat 3.3. *Jeśli założenia (H_0) , (H_1) , (H_2) są spełnione, to istnieje $T > 0$ takie, że*

$$\Lambda : B(T, Q_0, Q_1, Q_2, R_0, R_1, R_2) \rightarrow B(T, Q_0, Q_1, Q_2, R_0, R_1, R_2)$$

dla pewnych $Q_0, Q_1, Q_2, R_0, R_1, R_2 > 0$.

Dowód. Niech $(w, z) \in B(T, Q_0, Q_1, Q_2, R_0, R_1, R_2)$, gdzie Q_0, R_0 są dowolne, a T, Q_1, Q_2, R_1, R_2 zostaną określone później. Oznaczmy $\psi = \Lambda_E(w, z)$ oraz $(u, v) = \Lambda_p(w, z, \psi)$. Wyprowadzimy oszacowanie „a priori” dla Problemu **P**, kładąc $\eta = u(t)$ w (3.2) i $\zeta = v(t)$ w (3.3), otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_H^2 + \alpha_1 \|u_x(t)\|_H^2 - \alpha_2 \int_{\Omega} u(t) \psi_x(t) u_x(t) dx \\ = f_2(t, w(t, 1))u(t, 1) - f_1(t, w(t, 0))u(t, 0), \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|_H^2 + \beta_1 \|v_x(t)\|_H^2 + \beta_2 \int_{\Omega} v(t) \psi_x(t) v_x(t) dx \\ = g_2(t, z(t, 1))v(t, 1) - g_1(t, z(t, 0))v(t, 0), \end{aligned} \quad (3.11)$$

dla p.w. $t \in (0, T)$. Udowodnimy oszacowania:

$$\begin{aligned} \|u_x\|_{L^2(0, T; H)}^2 &\leq Q_1(Q_0, R_0), \\ \|u\|_{L^2(0, T; H)}^2 &\leq Q_0, \\ \|u_t\|_{L^2(0, T; V^*)}^2 &\leq Q_2(Q_0, Q_1(Q_0, R_0), R_0). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dowód oszacowań:

$$\begin{aligned} \|v_x\|_{L^2(0, T; H)}^2 &\leq R_1(Q_0, R_0), \\ \|v\|_{L^2(0, T; H)}^2 &\leq R_0, \\ \|v_t\|_{L^2(0, T; V^*)}^2 &\leq R_2(Q_0, R_1(Q_0, R_0), R_0) \end{aligned}$$

pomijamy, gdyż jest analogiczny.

Najpierw wykażemy pierwszą nierówność w (3.12). Zaczniemy od oszacowania wyrażenia $\alpha_2 \int_{\Omega} |u(t) \psi_x(t) u_x(t)| dx$ w (3.10). Korzystając z faktu, że $\psi_x(t) \in H^1(\Omega)$ z ciągłego zanurzenia $H^1(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ (zobacz twierdzenie 1.43) i nierówności Cauchy’ego z epsilon (zobacz lemat 1.37), mamy

$$\begin{aligned} \alpha_2 \int_{\Omega} |u(t) \psi_x(t) u_x(t)| dx \\ \leq \alpha_2 \int_{\Omega} (\epsilon |u_x(t)|^2 + C(\epsilon) |u(t)|^2 |\psi_x(t)|^2) dx \\ \leq \alpha_2 \epsilon \int_{\Omega} |u_x(t)|^2 dx + \alpha_2 C(\epsilon) \|\psi_x(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\Omega} |u(t)|^2 dx \\ = \frac{\alpha_1}{4} \|u_x(t)\|_H^2 + C \|\psi_x(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|u(t)\|_H^2 \end{aligned}$$

po położeniu $\epsilon = \frac{\alpha_1}{4}$. Ponieważ zanurzenie $H^1(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ jest ciągłe, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \alpha_2 \int_{\Omega} |u(t)\psi_x(t)u_x(t)|dx &\leq \frac{\alpha_1}{4} \|u_x(t)\|_H^2 + C\|\psi_x(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \|u(t)\|_H^2 \\ &\leq \frac{\alpha_1}{4} \|u_x(t)\|_H^2 + C\|\psi_x(t)\|_{H^2(\Omega)}^2 \|u(t)\|_H^2 \end{aligned}$$

oraz z (3.7)

$$\alpha_2 \int_{\Omega} |u(t)\psi_x(t)u_x(t)|dx \leq \frac{\alpha_1}{4} \|u_x(t)\|_H^2 + C\|w(t) - z(t)\|_H^2 \|u(t)\|_H^2. \quad (3.13)$$

Do oszacowania członów brzegowych w (3.10), tj. prawej strony, ustalmy dowolne $s \in (\frac{1}{2}, 1)$. Zdefiniujmy $Z = H^s(\Omega)$. Na podstawie twierdzenia 1.43 przestrzeń ta jest zanurzona w sposób ciągły w $C(\bar{\Omega})$. Rozważmy trójkę przestrzeni $V \subset Z \subset H$. Zanurzenie $V \subset Z$ jest zwarte (zobacz twierdzenie 1.43) oraz zanurzenie $Z \subset H$ jest ciągłe. Z lematu Ehrlinga (lemat 1.45) wynika, że dla dowolnego $\epsilon > 0$ możemy znaleźć $C(\epsilon) > 0$ taki, że

$$\begin{aligned} |y(1)| &\leq \|y\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|y\|_{H^s(\Omega)} \leq \epsilon\|y_x\|_H + C(\epsilon)\|y\|_H, \\ |y(0)| &\leq \|y\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|y\|_{H^s(\Omega)} \leq \epsilon\|y_x\|_H + C(\epsilon)\|y\|_H, \end{aligned}$$

dla wszystkich $y \in V$. Szacujemy teraz człony brzegowe w (3.10). Z (H_2) , nierówności Cauchy'ego z $\epsilon = 1$, nierówności Cauchy'ego i powyższych nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} &|f_2(t, w(t, 1))u(t, 1)| + |f_1(t, w(t, 0))u(t, 0)| \\ &\leq (a_{12} + a_{22}|w(t, 1)|)|u(t, 1)| + (a_{11} + a_{21}|w(t, 0)|)|u(t, 0)| \\ &\leq |u(t, 1)|^2 + C(a_{12} + a_{22}|w(t, 1)|)^2 + |u(t, 0)|^2 + C(a_{11} + a_{21}|w(t, 0)|)^2 \\ &\leq |u(t, 1)|^2 + |u(t, 0)|^2 + 2C(a_{12}^2 + a_{22}|w(t, 1)|^2) + 2C(a_{11}^2 + a_{21}|w(t, 0)|^2) \\ &\leq |u(t, 1)|^2 + |u(t, 0)|^2 + C + C|w(t, 1)|^2 + C|w(t, 0)|^2 \\ &\leq \epsilon\|u_x(t)\|_H^2 + C(\epsilon)\|u(t)\|_H^2 + C + \epsilon_1\|w_x(t)\|_H^2 + C(\epsilon_1)\|w(t)\|_H^2, \end{aligned}$$

gdzie stałe ϵ, ϵ_1 są dowolne. Weźmy $\epsilon = \frac{\alpha_1}{4}$ w ostatnim oszacowaniu, co po uwzględnieniu (3.13) w (3.10) i skorzystaniu z nierówności Cauchy'ego daje nierówność

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \|u(t)\|_H^2 + \alpha_1 \|u_x(t)\|_H^2 \\ &\leq \frac{\alpha_1}{4} \|u_x(t)\|_H^2 + C\|w(t) - z(t)\|_H^2 \|u(t)\|_H^2 \\ &\quad + \frac{\alpha_1}{4} \|u_x(t)\|_H^2 + C\|u(t)\|_H^2 + C + \epsilon_1\|w_x(t)\|_H^2 + C(\epsilon_1)\|w(t)\|_H^2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

i w efekcie

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \|u(t)\|_H^2 + \alpha_1 \|u_x(t)\|_H^2 \\ &\leq C(\|w(t)\|_H^2 + \|z(t)\|_H^2 + 1)\|u(t)\|_H^2 + C + \epsilon_1\|w_x(t)\|_H^2 + C(\epsilon_1)\|w(t)\|_H^2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

W szczególności na podstawie (3.15) stwierdzamy, że

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \|u(t)\|_H^2 \\ &\leq C(\|w(t)\|_H^2 + \|z(t)\|_H^2 + 1)\|u(t)\|_H^2 + C + \epsilon_1\|w_x(t)\|_H^2 + C(\epsilon_1)\|w(t)\|_H^2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Lemat Gronwalla (lemat 1.44) implikuje, że dla wszystkich $t \in [0, T]$ mamy

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_H^2 &\leq e^{\int_0^t C(\|w(s)\|_H^2 + \|z(s)\|_H^2 + 1)ds} \\
&\times \left[\|u_0\|_H^2 + \int_0^t (C + \epsilon_1 \|w_x(s)\|_H^2 + C(\epsilon_1) \|w(s)\|_H^2) ds \right] \\
&\leq e^{CT+C \int_0^T (\|w(t)\|_H^2 + \|z(t)\|_H^2) dt} \\
&\times \left[\|u_0\|_H^2 + CT + \int_0^T (\epsilon_1 \|w_x(t)\|_H^2 + C(\epsilon_1) \|w(t)\|_H^2) dt \right] \\
&\leq e^{C(T+Q_0+R_0)} \left(\|u_0\|_H^2 + CT + C(\epsilon_1)Q_0 + \epsilon_1 Q_1 \right).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Całkując (3.14) od 0 do T , otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\|u(T)\|_H^2 - \|u(0)\|_H^2 + \alpha_1 \int_0^T \|u_x(t)\|_H^2 dt \\
&\leq \int_0^T C(\|w(t)\|_H^2 + \|z(t)\|_H^2 + 1) \|u(t)\|_H^2 + C + \epsilon_1 \|w_x(t)\|_H^2 + C(\epsilon_1) \|w(t)\|_H^2 dt, \\
&\alpha_1 \int_0^T \|u_x(t)\|_H^2 dt \leq C \|u\|_{L^\infty(0,T;H)}^2 \int_0^T (\|w(t)\|_H^2 + \|z(t)\|_H^2 + 1) dt \\
&\quad + CT + \int_0^T (\epsilon_1 \|w_x(t)\|_H^2 + C(\epsilon_1) \|w(t)\|_H^2) dt + \|u_0\|_H^2.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Korzystając z nierówności (3.17), po wykonaniu elementarnych przekształceń otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\|u_x\|_{L^2(0,T;H)}^2 \\
&\leq C(\|u_0\|_H^2 + T + C(\epsilon_1)Q_0 + \epsilon_1 Q_1)(1 + (T + Q_0 + R_0)e^{C(T+Q_0+R_0)}) \\
&\leq \epsilon_1 C Q_1 (1 + (T + Q_0 + R_0)e^{C(T+Q_0+R_0)}) \\
&\quad + C(\|u_0\|_H^2 + T + C(\epsilon_1)Q_0)(1 + (T + Q_0 + R_0)e^{C(T+Q_0+R_0)}).
\end{aligned}$$

Bez straty ogólności możemy założyć, że $T \leq 1$, a stąd

$$\begin{aligned}
&\|u_x\|_{L^2(0,T;H)}^2 \leq \epsilon_1 C Q_1 (1 + (1 + Q_0 + R_0)e^{C(1+Q_0+R_0)}) \\
&\quad + C(\|u_0\|_H^2 + 1 + C(\epsilon_1)Q_0)(1 + (1 + Q_0 + R_0)e^{C(1+Q_0+R_0)}).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Ustalmy $Q_0, R_0 > 0$. Weźmy

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2C(1 + (1 + Q_0 + R_0)e^{C(1+Q_0+R_0)})} \tag{3.20}$$

oraz

$$Q_1 = 2C(\|u_0\|_H^2 + 1 + C(\epsilon_1)Q_0)(1 + (1 + Q_0 + R_0)e^{C(1+Q_0+R_0)}). \tag{3.21}$$

Z nierówności (3.19) wynika, że

$$\|u_x\|_{L^2(0,T;H)}^2 \leq Q_1.$$

Całkując (3.17) po przedziale $(0, T)$, otrzymujemy

$$\|u\|_{L^2(0,T;H)}^2 \leq CT e^{C(T+Q_0+R_0)} (\|u_0\|_H^2 + T + C(\epsilon_1)Q_0 + \epsilon_1 Q_1). \quad (3.22)$$

Uwzględniając, że $T \leq 1$, mamy

$$\|u\|_{L^2(0,T;H)}^2 \leq CT e^{C(1+Q_0+R_0)} (\|u_0\|^2 + 1 + C(\epsilon_1)Q_0 + \epsilon_1 Q_1) = TF(Q_0, R_0),$$

gdzie $F(Q_0, R_0)$ nie zależy od T , a tylko od Q_0, R_0 . Stąd jeśli weźmiemy $T = \min\{1, \frac{Q_0}{F(Q_0, R_0)}\}$, to otrzymamy

$$\|u\|_{L^2(0,T;H)}^2 \leq Q_0,$$

czyli drugą nierówność w (3.12).

Pozostało oszacować $\|u_t\|_{L^2(0,T;V^*)}^2$ przez odpowiednie Q_2 , tzn. uzasadnić trzecią nierówność w (3.12). Niech $\eta \in L^2(0,T;V)$ będzie dowolne. Uwzględniając nierówność Schwarz'a, założenie (H_2) , ciągłe zanurzenie $H^1(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ i inkluzję $L^2(0,T) \subset L^1(0,T)$, mamy

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle u_t(t), \eta(t) \rangle_{V^* \times V} dt + \int_0^T \int_{\Omega} (\alpha_1 u_x(t) - \alpha_2 u(t) \psi_x(t)) \eta_x(t) dx dt \\ &= \int_0^T [f_2(t, w(t, 1)) \eta(t, 1) - f_1(t, w(t, 0)) \eta(t, 0)] dt, \\ & \left| \int_0^T \langle u_t(t), \eta(t) \rangle_{V^* \times V} dt \right| \\ & \leq \alpha_1 \int_0^T \int_{\Omega} |u_x(t)| |\eta_x(t)| dx dt + \alpha_2 \int_0^T \int_{\Omega} |u(t)| |\psi_x(t)| |\eta_x(t)| dx dt \\ & + \int_0^T [(a_{12} + a_{22}|w(t, 1)|) |\eta(t, 1)| + a_{11} + a_{21}|w(t, 0)|] |\eta(t, 0)| dt \\ & \leq \alpha_1 \int_0^T \|u_x(t)\|_H \|\eta_x(t)\|_H dt + \alpha_2 \int_0^T \|\psi_x(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \|u(t)\|_H \|\eta_x(t)\|_H dt \\ & + \int_0^T (a_{11} + a_{12} + (a_{21} + a_{22}) \|w(t)\|_{L^\infty(\Omega)}) \|\eta(t)\|_{L^\infty(\Omega)} dt \\ & \leq \alpha_1 \int_0^T \|u_x(t)\|_H \|\eta(t)\|_V dt + \alpha_2 \int_0^T \|\psi_x(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \|u(t)\|_H \|\eta(t)\|_V dt \\ & + \int_0^T (a_{11} + a_{12} + C(a_{21} + a_{22}) \|w(t)\|_V) \|\eta(t)\|_V dt \\ & \leq \alpha_1 \|u_x\|_{L^2(0,T;H)} \|\eta\|_{L^2(0,T;V)} + \alpha_2 \|\psi_x\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))} \|u\|_{L^\infty(0,T;H)} \|\eta\|_{L^2(0,T;V)} \\ & + C_1 \|\eta\|_{L^2(0,T;V)} + C_2 \|w\|_{L^2(0,T;V)} \|\eta\|_{L^2(0,T;V)} \\ & \leq \left[\alpha_1 \|u_x\|_{L^2(0,T;H)} + \alpha_2 \|\psi_x\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))} \|u\|_{L^\infty(0,T;H)} + C_1 \right. \\ & \left. + C_2 \|w\|_{L^2(0,T;V)} \right] \|\eta\|_{L^2(0,T;V)}. \end{aligned}$$

A stąd

$$\begin{aligned} \|u_t\|_{L^2(0,T;V^*)} & \leq \alpha_1 \|u_x\|_{L^2(0,T;H)} + \alpha_2 \|\psi_x\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))} \|u\|_{L^\infty(0,T;H)} \\ & + C_1 + C_2 \|w\|_{L^2(0,T;V)}. \end{aligned}$$

Na podstawie lematu 3.1 i ciągłego zanurzenia $H^1(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ wnioskujemy, że

$$\|\psi_x\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|\psi_x(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|\psi(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|w(t) - z(t)\|_H,$$

$$\|\psi_x\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))} \leq C(\|w\|_{L^2(0,T;H)} + \|z\|_{L^2(0,T;H)}).$$

Ponadto z (3.17) wynika, że

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;H)} \leq e^{\frac{1}{2}C(T+Q_0+R_0)} \left(\|u_0\|_H^2 + CT + C(\epsilon_1)Q_0 + \epsilon_1 Q_1 \right)^{\frac{1}{2}},$$

gdzie ϵ_1, Q_1 dane są wzorami (3.20), (3.21). W konsekwencji możemy napisać, że

$$\|u_t\|_{L^2(0,T;V^*)} \leq G(T, Q_0, Q_1, R_0),$$

gdzie

$$\begin{aligned} G(T, Q_0, Q_1, R_0) = & \alpha_1 Q_1^{\frac{1}{2}} + \alpha_2 C(Q_0^{\frac{1}{2}} + R_0^{\frac{1}{2}}) e^{\frac{1}{2}C(T+Q_0+R_0)} \left(\|u_0\|_H^2 + CT + C(\epsilon_1)Q_0 \right. \\ & \left. + \epsilon_1 Q_1 \right)^{\frac{1}{2}} + C_1 + \sqrt{2}C_2(Q_0^{\frac{1}{2}} + Q_1^{\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Wystarczy położyć $Q_2 = G^2(T, Q_0, Q_1, R_0)$, co kończy dowód lematu. $\square$

Uwaga 3.4. Dowód lematu 3.3 jest możliwy bez użycia lematu Ehrlinga, ale z dodatkowymi silnymi ograniczeniami na stałe występujące w modelu, w szczególności na współczynniki dyfuzji.

Niech $B = B(T, Q_0, Q_1, Q_2, R_0, R_1, R_2)$ będzie zbiorem skonstruowanym przy pomocy lematu 3.3.

Lemat 3.5. *Jeśli założenia (H_0) , (H_1) , (H_2) są spełnione, to operator $\Lambda : B \rightarrow B$ jest ciągowo słabo ciągły.*

Dowód. Rozważmy ciągi $w_n \rightarrow w$ i $z_n \rightarrow z$ słabo zbieżne w $L^2(0, T; V)$ oraz $(w_n)_t \rightarrow w_t$ i $(z_n)_t \rightarrow z_t$ słabo zbieżne w $L^2(0, T; V^*)$, gdzie $w_n, z_n, w, z \in B$. Niech $(u_n, v_n) := \Lambda(w_n, z_n)$ i $\psi_n := \Lambda_E(w_n, z_n)$. Musimy pokazać, że $u_n \rightarrow u$ i $v_n \rightarrow v$ są słabo zbieżne w $L^2(0, T; V)$ oraz $(u_n)_t \rightarrow u_t$ i $(v_n)_t \rightarrow v_t$ są słabo zbieżne w $L^2(0, T; V^*)$, gdzie $(u, v) := \Lambda(w, z)$.

Jako, że $(u_n, v_n) \in B$ i B jest zbiorem ograniczonym w X_T , to istnieje podciąg, który dla uproszczenia oznaczmy znowu przez (u_n, v_n) taki, że $u_n \rightarrow u$ i $v_n \rightarrow v$ są słabo zbieżne w $L^2(0, T; V)$. Co więcej $(u_n)_t \rightarrow \bar{u}$ i $(v_n)_t \rightarrow \bar{v}$ są słabo zbieżne w $L^2(0, T; V^*)$ oraz $\bar{u} = u_t$ oraz $\bar{v} = v_t$. Jeśli uda nam się pokazać, że $(u, v) = \Lambda(w, z)$, to po powtórzeniu rozumowania dla dowolnego innego słabo zbieżnego podciągu ciągu (u_n, v_n) oraz skorzystaniu z lematów 3.1, 3.2 o jednoznaczności rozwiązania Problemów **P** i **E** i twierdzenia 1.29 dowód będzie skończony.

Dla dowolnych $\eta \in L^2(0, T; V)$, $\zeta \in L^2(0, T; V)$ oraz $\xi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ zachodzi:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle (u_n)_t(t), \eta(t) \rangle_{V^* \times V} dt + \int_0^T \int_\Omega \left(\alpha_1 (u_n)_x(t) - \alpha_2 u_n(t) (\psi_n)_x(t) \right) \eta_x(t) dx dt \\ &= \int_0^T \left(f_2(t, w_n(t, 1)) \eta(t, 1) - f_1(t, w_n(t, 0)) \eta(t, 0) \right) dt, \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle (v_n)_t(t), \zeta(t) \rangle_{V^* \times V} dt + \int_0^T \int_{\Omega} \left(\beta_1(v_n)_x(t) + \beta_2 v_n(t)(\psi_n)_x(t) \right) \zeta_x(t) dx dt \\ &= \int_0^T \left(g_2(t, z_n(t, 1)) \zeta(t, 1) - g_1(t, z_n(t, 0)) \zeta(t, 0) \right) dt, \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\psi_n)_x(t) \xi_x(t) dx dt + \lambda \int_0^T \int_{\Omega} \left(w_n(t) - z_n(t) \right) \xi(t) dx dt = 0. \quad (3.25)$$

Z lematu 3.1 mamy oszacowanie

$$\|\psi_n\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2 \leq C(\|w_n\|_{L^2(0,T;H)} + \|z_n\|_{L^2(0,T;H)}),$$

a stąd ciąg ψ_n jest ograniczony w $L^2(0, T; H^2(\Omega))$. Wobec tego istnieje podciąg, oznaczony dla uproszczenia znowu przez ψ_n taki, że $\psi_n \rightarrow \psi$ słabo w $L^2(0, T; H^2(\Omega))$. Zauważmy, że dla ustalonego $\xi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ funkcjonały

$$L^2(0, T; H^2(\Omega)) \ni p \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} p_x(t) \xi_x(t) dx dt,$$

$$L^2(0, T; V) \ni p \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} p(t) \xi(t) dx dt$$

są liniowe i ograniczone, gdyż

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} p_x(t) \xi_x(t) dx dt \right| \leq \|\xi_x\|_{L^2(0,T;H)} \|p\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))},$$

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} p(t) \xi(t) dx dt \right| \leq \|\xi\|_{L^2(0,T;H)} \|p\|_{L^2(0,T;V)}.$$

Możemy więc przejść do granicy w (3.25), co implikuje

$$\int_0^T \int_{\Omega} \psi_x(t) \xi_x(t) dx dt + \lambda \int_0^T \int_{\Omega} (w(t) - z(t)) \xi(t) dx dt = 0, \quad (3.26)$$

a zatem $\psi = \Lambda_E(w, z)$.

Pozostało przejść do granicy w (3.23). Dla (3.24) dowód jest analogiczny, więc go pomijamy. Przejście do granicy w składnikach z pochodną po czasie i ze stałą α_1 wynika wprost ze słabej zbieżności podciągu $u_n \rightarrow u$ oraz z liniowości i ograniczoności odpowiednich funkcjonałów całkowych po ustaleniu funkcji próbnych.

Teraz przejdziemy do granicy w składniku nieliniowym, tj. zawierającym $(\psi_n)_x$. Możemy napisać

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \left(u_n(t)(\psi_n)_x(t) - u(t)\psi_x(t) \right) \eta_x(t) dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} (u_n(t) - u(t))(\psi_n)_x(t) \eta_x(t) dx dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} ((\psi_n)_x(t) - \psi_x(t))u(t) \eta_x(t) dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} (u_n(t) - u(t))(\psi_n)_x(t) \eta_x(t) dx dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} (\psi_n)_x(t)u(t) \eta_x(t) dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \psi_x(t)u(t) \eta_x(t) dx dt. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ponownie korzystamy z lematu 3.1 i uzyskujemy oszacowanie

$$\|\psi_n\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} \leq C \left(\|w_n\|_{L^\infty(0,T;H)} + \|z_n\|_{L^\infty(0,T;H)} \right).$$

A zatem ciąg ψ_n jest ograniczony w przestrzeni $L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$, gdyż ciągi w_n, z_n są ograniczone w $L^\infty(0,T;H)$ na podstawie twierdzenia 1.34. Istnieje zatem podciąg oznaczony dla uproszczenia przez ψ_n taki, że $\psi_n \rightarrow \psi$ słabo w $L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$. Zauważmy, że funkcjonał

$$L^\infty(0,T;H^2(\Omega)) \ni p \rightarrow \int_0^T \int_\Omega p_x(t) u(t) \eta_x(t) dx dt$$

jest liniowy i ograniczony dla ustalonej funkcji próbnej η . Istotnie,

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_\Omega p_x(t) u(t) \eta_x(t) dx dt \right| \\ & \leq \int_0^T \|p_x(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \|u(t)\|_H \|\eta_x(t)\|_H dt \\ & \leq C \|u\|_{L^2(0,T;H)} \|\eta_x\|_{L^2(0,T;H)} \|p\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} \end{aligned}$$

dla dowolnego $p \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$. W konsekwencji na podstawie słabej zbieżności podciągu ψ_n stwierdzamy, że

$$\int_0^T \int_\Omega (\psi_n)_x(t) u(t) \eta_x(t) dx dt \rightarrow \int_0^T \int_\Omega \psi_x(t) u(t) \eta_x(t) dx dt. \quad (3.28)$$

Z twierdzenia Aubina-Lionsa (twierdzenie 1.46) o zwartości mamy

$$u_n \rightarrow u \quad \text{silnie w } L^2(0,T;H).$$

Przypomnijmy, że ciąg ψ_n jest ograniczony w przestrzeni $L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$. Zatem

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega |(u_n(t) - u(t))(\psi_n)_x(t) \eta_x(t)| dx dt \\ & \leq \int_0^T \|(\psi_n)_x(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\eta_x(t)\|_H \|u_n(t) - u(t)\|_H dt \\ & \leq \|\psi_n\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} \|\eta_x\|_{L^2(0,T;H)} \|u_n - u\|_{L^2(0,T;H)} \end{aligned} \quad (3.29)$$

i w efekcie

$$\int_0^T \int_\Omega |(u_n(t) - u(t))(\psi_n)_x(t) \eta_x(t)| dx dt \rightarrow 0. \quad (3.30)$$

W ten sposób na podstawie (3.28) i (3.30) lewa strona w (3.27) zbiega do 0.

Musimy jeszcze przejść do granicy w składniku brzegowym. Korzystając z faktu, że operatory Niemyckiego

$$\begin{aligned} \{y \in L^2(0,T;V) : y_t \in L^2(0,T;V^*)\} & \ni y \rightarrow y(\cdot, 0) \in L^2(0,T), \\ \{y \in L^2(0,T;V) : y_t \in L^2(0,T;V^*)\} & \ni y \rightarrow y(\cdot, 1) \in L^2(0,T) \end{aligned}$$

są zwarte, istnieją podciągi takie, że

$$w_n(\cdot, 0) \rightarrow w(\cdot, 0), \quad w_n(\cdot, 1) \rightarrow w(\cdot, 1) \quad \text{silnie w } L^2(0,T).$$

Warunek wzrostu (H_2) implikuje oszacowania:

$$|f_1(t, w_n(t, 0))| \leq a_{11} + a_{21}|w_n(t, 0)|,$$

$$|f_2(t, w_n(t, 1))| \leq a_{12} + a_{22}|w_n(t, 1)|,$$

dla p.w. $t \in (0, T)$. Na podstawie twierdzenia 1.41 istnieją podciągi takie, że

$$w_n(t, 0) \rightarrow w(t, 0), \quad w_n(t, 1) \rightarrow w(t, 1) \quad \text{p.w. w } (0, T)$$

oraz

$$|w_n(t, 0)| \leq g(t), \quad |w_n(t, 1)| \leq h(t) \quad \text{p.w. w } (0, T),$$

gdzie $g, h \in L^2(0, T) \subset L^1(0, T)$. Zatem

$$|f_1(t, w_n(t, 0))| \leq a_{11} + a_{21}g(t) \quad \text{p.w. w } (0, T),$$

$$|f_2(t, w_n(t, 1))| \leq a_{12} + a_{22}h(t) \quad \text{p.w. w } (0, T).$$

Z ciągłości funkcji f_1, f_2 względem drugiej zmiennej wnioskujemy, że:

$$f_1(t, w_n(t, 0)) \rightarrow f_1(t, w(t, 0)) \quad \text{p.w. w } (0, T),$$

$$f_2(t, w_n(t, 1)) \rightarrow f_2(t, w(t, 1)) \quad \text{p.w. w } (0, T).$$

Przejście graniczne

$$\begin{aligned} & \int_0^T (f_2(t, w_n(t, 1))\eta(t, 1) - f_1(t, w_n(t, 0))\eta(t, 0))dt \\ & \rightarrow \int_0^T (f_2(t, w(t, 1))\eta(t, 1) - f_1(t, w(t, 0))\eta(t, 0))dt \end{aligned}$$

jest bezpośrednią konsekwencją twierdzenia Lebesque'a o zmajorzowanym przejściu granicznym (twierdzenie 1.42). W ten sposób dowód lematu został zakończony. $\square$

Twierdzenie 3.6. *Niech założenia (H_0) , (H_1) , (H_2) będą spełnione. Wtedy istnieje $T > 0$ takie, że Problem **PE** ma rozwiązanie.*

Dowód. Dowód wynika wprost z twierdzenia Schaudera-Tychonoffa 1.27 oraz lematów 3.1, 3.2, 3.3 i 3.5. $\square$

Rozdział 4

Jednoznaczność słabych rozwiązań

W tym rozdziale pokażemy, że Problem **PE** ma co najwyżej jedno rozwiązanie. Ponieważ niektóre nierówności uzasadnia się analogicznie jak w pierwszej części dowodu lematu 3.3, pewne szczegóły techniczne pomijamy.

Twierdzenie 4.1. *Niech Założenie **H** będzie spełnione. Wtedy Problem **PE** ma co najwyżej jedno rozwiązanie na przedziale $[0, T]$ dla dowolnie ustalonego $T > 0$.*

Dowód. Ustalmy dowolne $T > 0$. Przypuśćmy, że Problem **PE** ma dwa rozwiązania (u_1, v_1, ϕ_1) , (u_2, v_2, ϕ_2) na $[0, T]$. Pokażemy, że są one równe. Oczywiście na podstawie (2.9), (2.10), (2.11) mamy

$$\begin{aligned} \langle (u_1)_t, \eta \rangle_{V^* \times V} + \int_{\Omega} (\alpha_1(u_1)_x - \alpha_2 u_1(\phi_1)_x) \eta_x dx \\ = f_2(t, u_1(t, 1))\eta(1) - f_1(t, u_1(t, 0))\eta(0) \quad \text{dla każdego } \eta \in V, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \langle (v_1)_t, \zeta \rangle_{V^* \times V} + \int_{\Omega} (\beta_1((v_1)_x) + \beta_2 v_1(\phi_1)_x) \zeta_x dx \\ = g_2(t, v_1(t, 1))\zeta(1) - g_1(t, v_1(t, 0))\zeta(0) \quad \text{dla każdego } \zeta \in V, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\int_{\Omega} (\phi_1)_x \xi_x dx + \lambda \int_{\Omega} (u_1 - v_1) \xi dx = 0 \quad \text{dla każdego } \xi \in H_0^1(\Omega), \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \langle (u_2)_t, \eta \rangle_{V^* \times V} + \int_{\Omega} (\alpha_1(u_2)_x - \alpha_2 u_2(\phi_2)_x) \eta_x dx \\ = f_2(t, u_2(t, 1))\eta(1) - f_1(t, u_2(t, 0))\eta(0) \quad \text{dla każdego } \eta \in V, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \langle (v_2)_t, \zeta \rangle_{V^* \times V} + \int_{\Omega} (\beta_1((v_2)_x) + \beta_2 v_2(\phi_2)_x) \zeta_x dx \\ = g_2(t, v_2(t, 1))\zeta(1) - g_1(t, v_2(t, 0))\zeta(0) \quad \text{dla każdego } \zeta \in V, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\int_{\Omega} (\phi_2)_x \xi_x dx + \lambda \int_{\Omega} (u_2 - v_2) \xi dx = 0 \quad \text{dla każdego } \xi \in H_0^1(\Omega). \quad (4.6)$$

Wprowadzamy sztuczne zero:

$$-u_1(\phi_1)_x + u_2(\phi_2)_x = -u_1(\phi_1)_x + u_1(\phi_2)_x - u_1(\phi_2)_x + u_2(\phi_2)_x,$$

$$v_1(\phi_1)_x - v_2(\phi_2)_x = v_1(\phi_1)_x - v_1(\phi_2)_x + v_1(\phi_2)_x - v_2(\phi_2)_x.$$

W ten sposób po odjęciu stronami (4.1) i (4.4) oraz (4.2) i (4.5) dostajemy tożsamości

$$\begin{aligned} & \langle (u_1 - u_2)_t, \eta \rangle_{V^* \times V} + \int_{\Omega} \alpha_1 (u_1 - u_2)_x \eta_x - \alpha_2 \int_{\Omega} u_1 (\phi_1 - \phi_2)_x \eta_x dx \\ & - \alpha_2 \int_{\Omega} (\phi_2)_x (u_1 - u_2) \eta_x dx = (f_2(t, u_1(t, 1)) - f_2(t, u_2(t, 1))) \eta \\ & - (f_1(t, u_1(t, 0)) - f_1(t, u_2(t, 0))) \eta(0) \quad \text{dla każdego } \eta \in V, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} & \langle (v_1 - v_2)_t, \zeta \rangle_{V^* \times V} + \int_{\Omega} \beta_1 (v_1 - v_2)_x \zeta_x + \beta_2 \int_{\Omega} v_1 (\phi_1 - \phi_2)_x \zeta_x dx \\ & + \beta_2 \int_{\Omega} (\phi_2)_x (v_1 - v_2) \zeta_x dx = (g_2(t, v_1(t, 1)) - g_2(t, v_2(t, 1))) \zeta \\ & - (g_1(t, v_1(t, 0)) - g_1(t, v_2(t, 0))) \zeta(0) \quad \text{dla każdego } \zeta \in V. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Kładziemy $\eta := u_1(t) - u_2(t)$, $\zeta := v_1(t) - v_2(t)$ w (4.7), (4.8), odpowiednio i otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| (u_1 - u_2)(t) \|_H^2 + \alpha_1 \| (u_1 - u_2)_x(t) \|_H^2 \\ & - \alpha_2 \int_{\Omega} u_1(t) (\phi_1 - \phi_2)_x(t) (u_1 - u_2)_x(t) dx \\ & - \alpha_2 \int_{\Omega} (\phi_2)_x(t) (u_1 - u_2)(t) (u_1 - u_2)_x(t) dx \\ & = (f_2(t, u_1(t, 1)) - f_2(t, u_2(t, 1))) (u_1(t, 1) - u_2(t, 1)) \\ & - (f_1(t, u_1(t, 0)) - f_1(t, u_2(t, 0))) (u_1(t, 0) - u_2(t, 0)), \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| (v_1 - v_2)(t) \|_H^2 + \beta_1 \| (v_1 - v_2)_x(t) \|_H^2 \\ & + \beta_2 \int_{\Omega} v_1(t) (\phi_1 - \phi_2)_x(t) (v_1 - v_2)_x(t) dx \\ & + \beta_2 \int_{\Omega} (\phi_2)_x(t) (v_1 - v_2)(t) (v_1 - v_2)_x(t) dx \\ & = (g_2(t, v_1(t, 1)) - g_2(t, v_2(t, 1))) (v_1(t, 1) - v_2(t, 1)) \\ & - (g_1(t, v_1(t, 0)) - g_1(t, v_2(t, 0))) (v_1(t, 0) - v_2(t, 0)), \end{aligned} \quad (4.10)$$

dla p.w. $t \in (0, T)$. Równanie

$$\int_{\Omega} \phi_x \xi_x dx + \lambda \int_{\Omega} ((u_1 - u_2) - (v_1 - v_2)) \xi dx = 0 \quad \text{dla każdego } \xi \in H_0^1(\Omega) \quad (4.11)$$

ma jedyne rozwiązanie $\phi = \phi_1 - \phi_2 \in L^2(0, T; H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ (zobacz (4.3) i (4.6)), a ponadto

$$\|(\phi_1 - \phi_2)(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq C\lambda\|(u_1 - u_2)(t) - (v_1 - v_2)(t)\|_H \quad \text{dla p.w. } t \in (0, T), \quad (4.12)$$

co uzasadnia się tak samo jak lemat 3.1. Analogicznie

$$\|\phi_2(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq C\lambda\|(u_2 - v_2)(t)\|_H \quad \text{dla p.w. } t \in (0, T). \quad (4.13)$$

Postępując podobnie jak w dowodzie lematu 3.3, po skorzystaniu z (4.12) i (4.13), otrzymujemy następujące oszacowania całek oraz warunków brzegowych w (4.9):

$$\begin{aligned} & \alpha_2 \int_{\Omega} |u_1(t)(\phi_1 - \phi_2)_x(t)(u_1 - u_2)_x(t)| dx \\ & \leq \frac{\alpha_1}{4} \|(u_1 - u_2)_x(t)\|_H^2 + C\|u_1(t)\|_H^2 \|(\phi_1 - \phi_2)(t)\|_{H^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \frac{\alpha_1}{4} \|(u_1 - u_2)_x(t)\|_H^2 + C\|u_1(t)\|_H^2 (\|(u_1 - u_2)(t)\|_H^2 + \|(v_1 - v_2)(t)\|_H^2), \\ & \alpha_2 \int_{\Omega} |(\phi_2)_x(t)(u_1 - u_2)(t)(u_1 - u_2)_x(t)| dx \\ & \leq \frac{\alpha_1}{4} \|(u_1 - u_2)_x(t)\|_H^2 + C\|(\phi_2)(t)\|_{H^2(\Omega)}^2 \|(u_1 - u_2)(t)\|_H^2 \\ & \leq \frac{\alpha_1}{4} \|(u_1 - u_2)_x(t)\|_H^2 + C(\|u_2(t)\|_H^2 + \|v_2(t)\|_H^2) \|(u_1 - u_2)(t)\|_H^2, \\ & \quad (f_2(t, u_1(t, 1)) - f_2(t, u_2(t, 1)))(u_1(t, 1) - u_2(t, 1)) \\ & \quad \leq L_{f_2}(u_1(t, 1) - u_2(t, 1))^2 \\ & \quad \leq \frac{\alpha_1}{4} \|(u_1 - u_2)_x(t)\|_H^2 + C\|(u_1 - u_2)(t)\|_H^2, \\ & \quad (f_1(t, u_1(t, 0)) - f_1(t, u_2(t, 0)))(u_1(t, 0) - u_2(t, 0)) \\ & \quad \leq L_{f_1}(u_1(t, 0) - u_2(t, 0))^2 \\ & \quad \leq \frac{\alpha_1}{4} \|(u_1 - u_2)_x(t)\|_H^2 + C\|(u_1 - u_2)(t)\|_H^2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

W konsekwencji otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|(u_1 - u_2)(t)\|_H^2 \leq C(\|u_1(t)\|_H^2 + \|u_2(t)\|_H^2 + \|v_2(t)\|_H^2 + 1) \\ & \quad \times (\|(u_1 - u_2)(t)\|_H^2 + \|(v_1 - v_2)(t)\|_H^2). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Podobnie szacując wyrażenia w (4.10), mamy

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|(v_1 - v_2)(t)\|_H^2 \leq C(\|u_2(t)\|_H^2 + \|v_1(t)\|_H^2 + \|v_2(t)\|_H^2 + 1) \\ & \quad \times (\|(u_1 - u_2)(t)\|_H^2 + \|(v_1 - v_2)(t)\|_H^2). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Dodając stronami (4.15) i (4.16), otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\|(u_1 - u_2)(t)\|_H^2 + \|(v_1 - v_2)(t)\|_H^2) \\ & \leq C(\|u_1(t)\|_H^2 + \|u_2(t)\|_H^2 + \|v_1(t)\|_H^2 + \|v_2(t)\|_H^2 + 1) \\ & \quad \times (\|(u_1 - u_2)(t)\|_H^2 + \|(v_1 - v_2)(t)\|_H^2) \quad \text{dla p.w. } t \in (0, T). \end{aligned}$$

A stąd lemat Gronwalla implikuje, że dla wszystkich $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} & \| (u_1 - u_2)(t) \|_H^2 + \| (v_1 - v_2)(t) \|_H^2 \\ & \leq e^{\int_0^T C(\|u_1(t)\|_H^2 + \|u_2(t)\|_H^2 + \|v_1(t)\|_H^2 + \|v_2(t)\|_H^2 + 1) dt} \\ & \quad \times (\| (u_1 - u_2)(0) \|_H^2 + \| (v_1 - v_2)(0) \|_H^2). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Prawa strona w oszacowaniu (4.17) jest równa zero, gdyż $u_1(0) = u_2(0)$, $v_1(0) = v_2(0)$. Wobec tego $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$. Z jedności rozwiązania równania (4.11) wynika, że $\phi_1 = \phi_2$. $\square$

Rozdział 5

Nieujemność słabych rozwiązań

W niniejszym rozdziale udowodnimy nieujemność stężeń $u(t)$, $v(t)$ dla $t \in [0, T]$ i p.w. $x \in \Omega$, o ile warunki początkowe u_0, v_0 są nieujemne dla p.w. $x \in \Omega$.

Twierdzenie 5.1. *Niech Założenia $\mathbf{H}$, $\mathbf{H}^+$ będą spełnione. Wtedy dla wszystkich $t \in [0, T]$, dla których istnieje rozwiązanie Problemu $\mathbf{PE}$ na przedziale $[0, T]$, mamy, że $u(t) \in H_+$ i $v(t) \in H_+$.*

Dowód. Rozważmy problem pomocniczy, który od Problemu $\mathbf{PE}$ różni się tym, że zamieniamy u, v na u^+, v^+ w członach nieliniowych reprezentujących siły elektrochemiczne w (2.9), (2.10), gdzie $u^+ = \max\{u, 0\}$, $v^+ = \max\{v, 0\}$.

Problem $\mathbf{PE}^+$. Znaleźć $u, v \in L^2(0, T; V)$ i $\phi \in L^2(0, T; H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ takie, że $u_t, v_t \in L^2(0, T; V^*)$ oraz dla p.w $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} \langle u_t, \eta \rangle_{V^* \times V} + \int_{\Omega} (\alpha_1 u_x - \alpha_2 u^+ \phi_x) \eta_x dx \\ = f_2(t, u(t, 1)) \eta(1) - f_1(t, u(t, 0)) \eta(0) \quad \text{dla każdego } \eta \in V, \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \langle v_t, \zeta \rangle_{V^* \times V} + \int_{\Omega} (\beta_1 v_x + \beta_2 v^+ \phi_x) \zeta_x dx \\ = g_2(t, v(t, 1)) \zeta(1) - g_1(t, v(t, 0)) \zeta(0) \quad \text{dla każdego } \zeta \in V, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\int_{\Omega} \phi_x \xi_x dx + \lambda \int_{\Omega} (u - v) \xi dx = 0 \quad \text{dla każdego } \xi \in H_0^1(\Omega), \quad (5.3)$$

z warunkami początkowymi (2.2).

Problem $\mathbf{PE}^+$ ma lokalne w czasie słabe rozwiązanie $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{\phi})$ na pewnym przedziale $[0, T_0]$. Uzasadnienie tego faktu jest analogiczne jak dowód twierdzenia 3.6.

Wykażemy, że Problemy $\mathbf{PE}^+$ i $\mathbf{PE}$ są równoważne, tzn. że dowolne (u, v, ϕ) jest rozwiązaniem Problemu $\mathbf{PE}^+$ na zadanym przedziale $[0, T]$ wtedy i tylko wtedy, gdy

jest rozwiązaniem Problemu **PE** na tym przedziale. Ponadto zauważymy, że każde rozwiązanie (u, v, ϕ) Problemu **PE**⁺ ma tę własność, że $u(t), v(t) \in H_+$ dla $t \in [0, T]$.

Założmy, że (u, v, ϕ) jest rozwiązaniem Problemu **PE**⁺ na $[0, T]$. Pokażemy, że $u(t) \in H_+$ i $v(t) \in H_+$ dla wszystkich $t \in [0, T]$, a w konsekwencji (u, v, ϕ) jest rozwiązaniem Problemu **PE** na $[0, T]$. Rozumowanie przeprowadzimy tylko dla u , gdyż dla v jest ono analogiczne. Zauważmy, że $u = u^+ - u^-$, gdzie $u^- = -\min\{u, 0\}$. Biorąc $\eta := u^-(t)$ w (5.1), otrzymujemy

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^-(t)\|_H^2 - \alpha_1 \|u_x^-(t)\|_H^2 = f_2(t, u(t, 1))u^-(t, 1) - f_1(t, u(t, 0))u^-(t, 0)$$

dla p.w. $t \in (0, T)$. Z założenia (H_1^+) prawa strona w powyższej tożsamości jest nieujemna, co implikuje nierówność

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^-(t)\|_H^2 + \alpha_1 \|u_x^-(t)\|_H^2 \leq 0$$

dla p.w. $t \in (0, T)$. Po scałkowaniu na przedziale $(0, t)$ otrzymujemy

$$\frac{1}{2} \|u^-(t)\|_H^2 + \alpha_1 \int_0^t \|u_x^-(s)\|_H^2 \leq \frac{1}{2} \|u^-(0)\|_H^2$$

dla p.w. $t \in (0, T)$, co oznacza, że $u^-(t) = 0$ dla wszystkich $t \in [0, T]$, gdyż $u^-(0) = 0$ z założenia (H_0^+) . A stąd $u(t) = u^+(t)$, $t \in [0, T]$ i wobec tego u spełnia równanie (2.1) w Problemie **PE**. Zauważmy, że pokazaliśmy również, że każde rozwiązanie Problemu **PE**⁺ jest takie, że $u(t) \in H_+$ i $v(t) \in H_+$ dla wszystkich t należących do przedziału, na którym to rozwiązanie istnieje.

Założmy teraz, że (u, v, ϕ) spełnia Problem **PE** na przedziale $[0, T]$. Jak już wcześniej zauważyliśmy, istnieje rozwiązanie $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{\phi})$ Problemu **PE**⁺ na pewnym przedziale czasowym $[0, T_0]$. Z rozumowania powyżej wynika, że $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{\phi})$ musi również spełniać Problem **PE** na tym przedziale. Jeżeli $T \leq T_0$, to z twierdzenia 4.1 o jednoznaczności rozwiązania Problemu **PE** stwierdzamy, że $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{\phi}) = (u, v, \phi)$ na $[0, T]$, a tym samym (u, v, ϕ) jest rozwiązaniem Problemu **PE**⁺ na $[0, T]$.

Jeżeli jednak $T_0 < T$, to do uzasadnienia, że (u, v, ϕ) jest rozwiązaniem Problemu **PE**⁺ na $[0, T]$ użyjemy metody bariery. Oznaczmy zatem przez $\bar{T}_0$ supremum wszystkich T_0 takich, że $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{\phi})$ jest rozwiązaniem Problemu **PE**⁺ na $[0, T_0]$ (może się zdarzyć, że $T_0 = +\infty$). Jeżeli $\bar{T}_0 > T$, to rozumowanie sprowadza się do poprzedniego przypadku $T \leq T_0$. Pokażemy teraz, że przypadek $\bar{T}_0 \leq T$ prowadzi do sprzeczności. Zauważmy, że $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{\phi})$ musi również spełniać Problem **PE** na każdym przedziale $[0, \bar{T}_0 - \varepsilon]$, co z jednoznaczności rozwiązania Problemu **PE** implikuje, że $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{\phi}) = (u, v, \phi)$ na przedziale $[0, \bar{T}_0]$. Ponieważ $u, v \in C([0, T]; H)$, mamy $\lim_{t \rightarrow \bar{T}_0} \|\bar{u}(t)\|_H = \lim_{t \rightarrow \bar{T}_0} \|u(t)\|_H = \|u(\bar{T}_0)\|_H < \infty$, $\lim_{t \rightarrow \bar{T}_0} \|\bar{v}(t)\|_H = \lim_{t \rightarrow \bar{T}_0} \|v(t)\|_H = \|v(\bar{T}_0)\|_H < \infty$ i możemy przedłużyć rozwiązanie $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{\phi})$ Problemu **PE**⁺ zaczynając od $\bar{T}_0$, co prowadzi do sprzeczności z tym, że $\bar{T}_0$ jest supremum.

Pokazaliśmy, że Problemy **PE**⁺ i **PE** są równoważne i ich rozwiązanie jest takie, że $u(t) \in H_+$ i $v(t) \in H_+$ dla wszystkich $t \in [0, T]$, co kończy dowód. $\square$

Bibliografia

- [1] P. Biler, W. Hebisch, T. Nadzieja, *The Debye system: existence and large time behavior of solutions*, Nonlinear Anal.-Theor. **23** (1994), 1189–1209.
- [2] P. Biler, *Existence and asymptotics of solutions for parabolic-elliptic system with nonlinear no-flux boundary conditions*, Nonlinear Anal. Theor. **19** (1992), 1121–1136.
- [3] M. Borodzik, T. Cieślak, P. Mucha, P. Rybka, W. Sadowski, P. Strzelecki, A. Tarasińska, A. Zatorska-Goldstein, *Równania różniczkowe cząstkowe w zadaniach*, skrypt UW WMiIM, Warszawa 2010.
- [4] B. Bożek, A. Lewenstam, K. Tkacz-Śmiech, M. Danielewski, *Electrochemistry of symmetrical ion channel: a three-dimensional Nernst–Planck–Poisson model*, ECS Trans. **61** (2014), 11–20.
- [5] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York 2011.
- [6] H.C. Chang, G. Jaffé, *Polarization in electrolytic solutions*. Part I. Theory, J. Chem. Phys. **20** (1952), 1071–1077.
- [7] M. Chipot, *Elements of Nonlinear Analysis*, Birkhauser, Basel 2000.
- [8] L.C. Evans, *Równania różniczkowe cząstkowe*, PWN, Warszawa 2002.
- [9] R. Filipek, P. Kalita, L. Sapa, K. Szyszkiewicz, *On local weak solutions to Nernst–Poisson–Planck system*, Appl. Anal. **96** (2017), 2316–2332.
- [10] H. Gajewski, *On existence, uniqueness and asymptotic behavior of solutions of basic equations for carrier transport in semiconductors*, Z. Angew. Math. Mech. **65** (1985), 101–108.
- [11] D. Kopszak, *Słabe rozwiązania parabolicznych równań różniczkowych*, Praca magisterska, WMS AGH, Kraków 2018.
- [12] W. Kryszewski, *Wstęp do analizy nieliniowej, Wykład monograficzny*, skrypt UMK, Toruń 2012.
- [13] J.L. Lions, E. Magenes, *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, Springer, Berlin 1972.
- [14] T. Roubíček, *Nonlinear Partial Differential Equations with Applications*, Birkhauser, Basel 2005.
- [15] L. Sapa, *Parabolic elliptic system modeling biological ion channels*, J. Differential Equations **291** (2021), 1–26.
- [16] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, II/A: Linear Monotone Operators*, Springer, New York 1990.