



AGH

Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica
w Krakowie

Praca magisterska

Słabe rozwiązania parabolicznych równań różniczkowych

Dawid Kopszak

Kierunek: Matematyka
Specjalność: Matematyka finansowa

Nr albumu: 248512

Promotor
dr Lucjan Sapa



Wydział Matematyki Stosowanej

Kraków 2018

Oświadczenie autora

Ja, niżej podpisany Dawid Kopszak oświadczam, że praca ta została napisana samodzielnie i wykorzystywała (poza zdobytą na studiach wiedzę) jedynie wyniki prac zamieszczonych w spisie literatury.

.....
(Podpis autora)

Oświadczenie promotora

Oświadczam, że praca spełnia wymagania stawiane pracom magisterskim.

.....
(Podpis promotora)

Spis treści

Streszczenie	2
Abstract	3
Wstęp	4
1. Oznaczenia, podstawowe definicje i twierdzenia pomocnicze	6
1.1. Podstawowe definicje	6
1.2. Twierdzenia pomocnicze	10
2. Paraboliczne równania różniczkowe drugiego rzędu	13
3. Wariacyjne równania różniczkowe pierwszego rzędu. Metoda Galerkina	16
4. Istnienie, jednoznaczność i własności rozwiązań równania ciepła z warunkiem Dirichleta	33
4.1. Istnienie, jednoznaczność i własności rozwiązań	33
4.2. Eksperymenty numeryczne	35
Spis symboli i oznaczeń	39
Bibliografia	40

Streszczenie

Praca dotyczy badania istnienia, jednoznaczności, regularności oraz ciągłej zależności od warunku początkowego i prawej strony słabych rozwiązań, w przestrzeniach Sobolewa, liniowych parabolicznych równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu z warunkiem początkowym i warunkiem brzegowym Dirichleta. Zagadnienie rozważone jest w przypadku wielowymiarowym. W dowodzie odpowiedniego twierdzenia wykorzystuje się teorię równań wariacyjnych i metodę Galerkina. W szczególności udowodniono twierdzenie pomocnicze o istnieniu, jednoznaczności i własnościach rozwiązań wariacyjnych równań różniczkowych pierwszego rzędu z warunkiem początkowym.

Słowa kluczowe

Paraboliczne równanie różniczkowe, równanie ciepła, warunek Dirichleta, równanie wariacyjne, metoda Galerkina.

Abstract

The paper concerns the study of existence, uniqueness, regularity and continuous dependence on the initial condition and the right-hand side of weak solutions in the Sobolev spaces to linear parabolic second-order partial differential equations with the initial condition and the boundary Dirichlet condition. The problem is considered in the multidimensional case. In the proof of the suitable theorem the theory of variational equations and the Galerkin method are used. In particular, the auxiliary theorem on existence, uniqueness and properties of solutions to first-order variational differential equations with initial condition is proved.

Keywords

Parabolic differential equation, heat equation, Dirichlet condition, variational equation, Galerkin method.

Wstęp

Teoria równań różniczkowych, zwyczajnych i cząstkowych, różnych typów bazuje często na metodach ośrodkowych przestrzeni Hilberta. Równania z dodatkowymi warunkami, początkowym, brzegowym lub początkowo-brzegowym, przekształcane są na równania operatorowe w przestrzeniach Hilberta. Rozwiązania takich zagadnień operatorowych nazywane są uogólnionymi lub słabymi rozwiązaniami oryginalnych problemów różniczkowych. Nasze badania będziemy prowadzić w przestrzeniach Sobolewa będących przestrzeniami Hilberta.

Bardzo ważnym zagadnieniem w teorii równań różniczkowych jest kwestia istnienia, jednoznaczności i regularności rozwiązań. Przedmiotem tej pracy jest dowód twierdzenia o istnieniu, jednoznaczności, regularności i ciągłej zależności od prawej strony słabych rozwiązań, w przestrzeniach Sobolewa, liniowych parabolicznych równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu z warunkiem początkowym i warunkiem brzegowym Dirichleta. Dokładniej, rozważamy równanie ciepła. Problem bada się w przypadku wielowymiarowym. Dowód wspomnianego twierdzenia oparty jest na teorii równań wariacyjnych i metodzie Galerkina. W szczególności udowodniono twierdzenie pomocnicze o istnieniu, jednoznaczności i własnościach wariacyjnych równań różniczkowych pierwszego rzędu z warunkiem początkowym. Istotną rolę w przeprowadzonych badaniach odgrywa pojęcie tzw. trójki ewolucyjnej. Wynika to z faktu, że problemy różniczkowe rozważane są w dwóch przestrzeniach Hilberta V i H .

Rozważane zagadnienia paraboliczne opisują zwykle fizyczne zjawiska ewolucyjne, takie jak przepływ ciepła lub dyfuzję masy.

Praca napisana jest na podstawie rozdziału 23 w monografii [7]. Wykorzystano również wiele twierdzeń z teorii równań różniczkowych, równań wariacyjnych i analizy funkcjonalnej podanych w [1], [2], [3], [6], [8], [10]. Badanym zagadnieniom poświęcone są również monografie [4], [5], [9].

Praca podzielona jest na cztery rozdziały. W rozdziale pierwszym sformułowano podstawowe definicje i twierdzenia pomocnicze. W rozdziale drugim zdefiniowano problem różniczkowy. Rozdział trzeci poświęcony jest istnieniu, jednoznaczności, regularności oraz ciągłej zależności od warunku początkowego i prawej strony rozwiązań wariacyjnych równań różniczkowych pierwszego rzędu z warunkiem początkowym. Dowód odpowiedniego twierdzenia oparty jest na metodzie Galerkina. W rozdziale czwartym udowodniono twierdzenie o istnieniu, jednoznaczności, regularności oraz ciąg-

głej zależności od warunku początkowego i prawej strony słabych rozwiązań równania ciepła z warunkiem początkowym i warunkiem brzegowym typu Dirichleta. Wykorzystano w tym celu wspomniane twierdzenie o równaniach wariacyjnych pierwszego rzędu. W tym rozdziale przedstawiono też wyniki eksperymentów numerycznych.

Oznaczenia, podstawowe definicje i twierdzenia pomocnicze

W tym rozdziale sformułujemy podstawowe definicje i twierdzenia pomocnicze, które będą wykorzystywane w dalszej części pracy.

1.1. Podstawowe definicje

Przestrzeń wektorową $(X, +, \mathbb{R}, \cdot)$ nad $\mathbb{R}$ będziemy oznaczać krótko przez X . Symbolem $\mathbb{R}_+$ oznaczamy przedział $[0, \infty)$.

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$.

Definicja 1.1. Przekształcenie $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy formą liniową, gdy dla dowolnych $x, y \in X$ oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\phi(\alpha x + \beta y) = \alpha \phi(x) + \beta \phi(y).$$

Definicja 1.2. Przekształcenie $\phi : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy formą dwuliniową, gdy jest liniowe ze względu na pierwszą zmienną, tzn. że

$$\phi(\alpha x + \beta y, z) = \alpha \phi(x, z) + \beta \phi(y, z)$$

oraz liniowe ze względu na drugą zmienną, tzn. że

$$\phi(z, \alpha x + \beta y) = \alpha \phi(z, x) + \beta \phi(z, y)$$

dla dowolnych $x, y, z \in X$ oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Definicja 1.3. Formę dwulinową $\phi : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy symetryczną, gdy dla wszystkich $x, y \in X$ zachodzi warunek

$$\phi(x, y) = \phi(y, x).$$

Definicja 1.4. Przekształcenie $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ nazywamy normą, gdy dla wszystkich $x, y \in X$ oraz dla dowolnej stałej $\alpha \in \mathbb{R}$ zachodzi:

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,

$$3. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Definicja 1.5. Parę $(X, \|\cdot\|)$ nazywamy przestrzenią unormowaną.

Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią unormowaną.

Definicja 1.6. Formę liniową $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy ograniczoną, gdy istnieje stała $d \geq 0$ taka, że dla każdego $x \in X$ zachodzi nierówność

$$|\phi(x)| \leq d\|x\|.$$

Definicja 1.7. Normę liniowej ograniczonej formy $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ definiujemy wzorem

$$\|\phi\|_* = \inf\{M \geq 0 : |\phi(x)| \leq M\|x\|, \quad x \in X\}.$$

Definicja 1.8. Formę dwuliniową $\phi : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy ograniczoną, gdy istnieje stała $d \geq 0$ taka, że dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi nierówność

$$|\phi(x, y)| \leq d\|x\|\|y\|.$$

Definicja 1.9. Formę dwuliniową $\phi : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy silnie dodatnio określoną, gdy istnieje stała $c > 0$ taka, że dla każdego $x \in X$ zachodzi nierówność

$$\phi(x, x) \geq c\|x\|^2.$$

Definicja 1.10. Ciąg (u_n) elementów z przestrzeni X nazywamy zbieżnym do elementu $u \in X$, gdy dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego $n_0 \leq n \in \mathbb{N}$

$$\|u_n - u\| < \epsilon.$$

Definicja 1.11. Ciąg (u_n) elementów z przestrzeni X nazywamy ciągiem Cauchy'ego, gdy dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego $n_0 \leq n, m \in \mathbb{N}$

$$\|u_n - u_m\| < \epsilon.$$

Definicja 1.12. Przestrzeń unormowaną $(X, \|\cdot\|)$ nazywamy przestrzenią zupełną, gdy każdy ciąg Cauchy'ego elementów z przestrzeni X jest zbieżny do elementu należącego do X .

Definicja 1.13. Przestrzeń unormowaną $(X, \|\cdot\|)$ nazywamy przestrzenią Banacha, gdy jest zupełna.

Definicja 1.14. Przestrzeń unormowaną $(X, \|\cdot\|)$ nazywamy przestrzenią ośrodkową, gdy istnieje podzbiór $A \subset X$ przeliczalny i gęsty w tej przestrzeni.

Definicja 1.15. Przekształcenie $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy iloczynem skalarnym, gdy dla wszystkich $x, y, z \in X$ oraz stałych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zachodzi:

1. $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z),$
2. $(x, x) \geq 0, \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$
3. $(x, y) = (y, x).$

Definicja 1.16. Parę $(X, (\cdot, \cdot))$ nazywamy przestrzenią unitarną.

Definicja 1.17. Mówimy, że $(X, (\cdot, \cdot))$ jest przestrzenią Hilberta, gdy jest przestrzenią unitarną, która jest zupełna z normą indukowaną przez iloczyn skalarny, tj. $\|x\| := (x, x)^{\frac{1}{2}}$, $x \in X$.

Definicja 1.18. Przestrzeń Banacha X nazywamy refleksywną, gdy jej obraz w załadowaniu kanonicznym pokrywa się z całą przestrzenią bidualną X^{**} .

Niech $G \subset \mathbb{R}^N$ będzie zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a, o mierze $m(G) > 0$. Każde dwie funkcje określone i całkowne w sensie Lebesgue'a na G uważamy za identyczne, gdy są one równe prawie wszędzie na G . Relacja równości prawie wszędzie jest relacją równoważności.

Definicja 1.19. Symbolem $L^p(G)$, $1 \leq p < \infty$ oznaczamy przestrzeń klas równoważności relacji równości prawie wszędzie funkcji $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ z normą

$$\|u\|_{L^p(G)} := \left(\int_G |u(x)|^p dm \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Definicja 1.20. Przez $L^p_{loc}(G)$, $1 \leq p < \infty$ rozumiemy przestrzeń funkcji $u \in L^p(K)$ dla każdego mierzalnego w sensie Lebesgue'a podzbioru zwartego $K \subset G$.

Definicja 1.21. Niech $G \subset \mathbb{R}^N$ będzie zbiorem otwartym. Symbolem $C_0^\infty(G)$ oznaczamy przestrzeń funkcji $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ nieskończenie wiele razy różniczkowalnych o nośniku zwartym w G .

Definicja 1.22. Niech $G \subset \mathbb{R}^N$ będzie zbiorem otwartym. Przypuśćmy, że $u, D^\alpha u \in L^1_{loc}(G)$ i $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, N$, jest wielowskazanikiem, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$. Mówimy, że $D^\alpha u$ jest α -słabą pochodną w sensie Sobolewa funkcji u , gdy

$$\int_G u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_G D^\alpha u \phi dx$$

dla wszystkich funkcji próbnych $\phi \in C_0^\infty(G)$.

Definicja 1.23. Rozważmy liczbę rzeczywistą p taką, że $1 \leq p < \infty$ oraz liczbę całkowitą $m = 0, 1, \dots$. Wówczas przestrzeń wszystkich funkcji $u \in L^p(G)$ takich, że dla każdego wielowskazanika α , $|\alpha| \leq m$, słaba pochodna $D^\alpha u \in L^p(G)$ nazywamy przestrzenią Sobolewa i oznaczamy symbolem $W^{m,p}(G)$. W szczególności dla $m = 0$ otrzymujemy $W^{0,p}(G) = L^p(G)$. Ponadto dla $p = 2$ przyjmuje się oznaczenie $H^m(G) = W^{m,2}(G)$.

Definicja 1.24. Normę w przestrzeni Sobolewa $W^{m,p}(G)$, $1 \leq p < \infty$ określamy wzorem

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_G |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definicja 1.25. Mówimy, że funkcja $s : [0, T] \rightarrow X$ jest prosta, gdy

$$s(t) = \sum_{i=1}^m \chi_{E_i}(t) u_i, \quad t \in [0, T],$$

gdzie każdy ze zbiorów $E_i \subset [0, T]$ jest mierzalnym podzbiorem, a $u_i \in X$, $i = 1, \dots, m$.

Definicja 1.26. Mówimy, że $u : [0, T] \rightarrow X$ jest silnie mierzalna, gdy istnieje ciąg funkcji prostych $s_n : [0, T] \rightarrow X$ taki, że

$$s_n(t) \rightarrow u(t) \quad \text{dla} \quad \text{p.w.} \quad t \in (0, T).$$

Definicja 1.27. Symbolem $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$ oznaczamy przestrzeń funkcji silnie mierzalnych $u : [0, T] \rightarrow X$ takich, że

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Definicja 1.28. Niech $u \in L^1(0, T; Y)$. Funkcja $u^{(n)} \in L^1(0, T; Z)$ jest uogólnioną pochodną n -tego rzędu funkcji u , gdy

$$\int_0^T u(t) \phi^{(n)}(t) dt = (-1)^n \int_0^T u^{(n)}(t) \phi(t) dt$$

dla wszystkich funkcji próbnych $\phi \in C_0^\infty(0, T)$.

Definicja 1.29. Trójką ewolucyjną nazywamy układ trzech przestrzeni

$$V \subset H \subset V^*,$$

które spełniają warunki:

- (i) V jest rzeczywistą, ośrodkową i refleksywną przestrzenią Banacha,
- (ii) H jest rzeczywistą, ośrodkową przestrzenią Hilberta,
- (iii) zanurzenie $V \subset H$ jest ciągłe, tzn. że istnieje stała $C > 0$ taka, że

$$\|v\|_H \leq C \|v\|_V, \quad v \in V,$$

i V jest gęsta w H .

Definicja 1.30. Niech $V \subset H \subset V^*$ będzie trójką ewolucyjną. Symbolem $W^{1,p}(0, T; V, H)$ oznaczmy przestrzeń funkcji $u : [0, T] \rightarrow V$ takich, że $u \in L^p(0, T; V)$ i $u' \in L^q(0, T; V^*)$, gdzie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p, q < \infty$.

Definicja 1.31. Normę w przestrzeni $W^{1,p}(0, T; V, H)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p, q < \infty$, definiujemy wzorem

$$\|u\|_{W^{1,p}(0, T; V, H)} = \|u\|_{L^p(0, T; V)} + \|u'\|_{L^q(0, T; V^*)},$$

gdzie $u \in W^{1,p}(0, T; V, H)$.

Definicja 1.32. Zbiór $B = \{e_1, e_2, \dots\}$ elementów rzeczywistej przestrzeni unormowanej X nazywamy bazą Schaudera tej przestrzeni, gdy dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jeden ciąg liczb rzeczywistych $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n.$$

Definicja 1.33. Operator $A : V \rightarrow V^*$ jest silnie dodatnio określony, gdy

$$\langle Au, u \rangle_V \geq C \|u\|_V, \quad u \in V$$

dla pewnej stałej $C > 0$.

Definicja 1.34. Mówimy, że ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ elementów przestrzeni Banacha X jest słabo zbieżny do $x \in X$, co symbolicznie zapisujemy

$$x_n \rightharpoonup x,$$

gdy

$$x^*(x_n) \rightarrow x^*(x)$$

dla każdego ograniczonego funkcjonału linowego $x^* \in X^*$.

1.2. Twierdzenia pomocnicze

Twierdzenie 1.35. Ciąg (u_n) elementów z przestrzeni X jest zbieżny do elementu $u \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0.$$

Twierdzenie 1.36. Jeśli $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest formą liniową ograniczoną, to

$$|\phi x| \leq \|\phi\|_* \|x\|, \quad x \in X.$$

Twierdzenie 1.37. Forma liniowa $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczona.

Twierdzenie 1.38. Każda przestrzeń Hilberta jest refleksywna.

Twierdzenie 1.39. Przestrzeń Hilberta jest ośrodkowa wtedy i tylko wtedy, gdy ma bazę Schaudera.

Twierdzenie 1.40 (Banacha-Alaoglu). W refleksywnej przestrzeni Banacha X z każdego ciągu ograniczonego $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ elementów przestrzeni X da się wybrać podciąg słabo zbieżny do pewnego elementu $x \in X$.

Twierdzenie 1.41. Niech $V \subset H \subset V^*$ będzie trójką ewolucyjną i niech $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Funkcja $u^{(n)} \in L^q(0, T; V^*)$ jest n -tą uogólnioną pochodną funkcji $u \in L^p(0, T; V)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\int_0^T (u(t), v)_H \phi^{(n)}(t) dt = (-1)^n \int_0^T \langle u^{(n)}(t), v \rangle_V \phi(t) dt, \quad v \in V, \quad \phi \in C_0^\infty(0, T).$$

Uwaga 1.42. Z twierdzenia 1.41 i definicji 1.28 wynika, że dla dowolnie ustalonego $v \in V$

$$\frac{d^n}{dt^n} (u(t), v)_H = \langle u^{(n)}(t), v \rangle_V.$$

Uwaga 1.43. Jeśli V ma skończony wymiar, to

$$(u^{(n)}(t), v)_H = \langle u^{(n)}(t), v \rangle_V, \quad v \in V.$$

Twierdzenie 1.44. Niech $G \subset \mathbb{R}^N$ ma miarę Lebesgue'a skończoną. Jeśli $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$, to:

$$i) \quad L^{p_2}(G) \subset L^{p_1}(G),$$

$$ii) \quad \|f\|_{L^{p_1}(G)} \leq (m(G))^{\frac{p_2-p_1}{p_1 p_2}} \|f\|_{L^{p_2}(G)}.$$

Twierdzenie 1.45. Przestrzeń $W^{1,p}(0, T; V, H)$, $1 < p < \infty$, zanurza się w sposób ciągły w przestrzeni $C([0, T], H)$, tzn. że

$$\|u\|_{C([0, T], H)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(0, T; V, H)}, \quad u \in W^{1,p}(0, T; V, H)$$

dla pewnej stałej $C > 0$.

Uwaga 1.46. Nierówność w twierdzeniu 1.45 rozumiana jest w następującym sensie. Jeśli $u \in W^{1,p}(0, T; V, H)$, to istnieje dokładnie jedna ciągła funkcja $u_1 : [0, T] \rightarrow H$ równa prawie wszędzie na $[0, T]$ funkcji u , a ponadto

$$\|u_1\|_{C([0, T], H)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(0, T; V, H)}.$$

Twierdzenie 1.47 (O całkowaniu przez części). Niech $u, v \in W^{1,p}(0, T; V, H)$, $1 < p < \infty$. Wówczas

$$(u(t), v(t))_H - (u(s), v(s))_H = \int_s^t \left(\langle u'(\tau), v(\tau) \rangle_V + \langle v'(\tau), u(\tau) \rangle_V \right) d\tau$$

dla $0 \leq s \leq t \leq T$. Przez $u(t), u(s), v(t), v(s)$ rozumiemy wartości ciągłych funkcji $u, v : [0, T] \rightarrow H$ w sensie twierdzenia 1.45.

Twierdzenie 1.48. Jeśli ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ elementów przestrzeni Banacha X jest zbieżny do $x \in X$, to jest słabo zbieżny do x . Każdy ciąg słabo zbieżny jest ograniczony. Ponadto jeśli $x_n \rightharpoonup x$, to

$$\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|.$$

Twierdzenie 1.49. Jeśli ciąg $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ elementów przestrzeni Banacha X ma podciąg $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ słabo zbieżny do $u \in X$ i każdy jego podciąg, który jest słabo zbieżny też jest słabo zbieżny do u , to ciąg $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest słabo zbieżny do u .

Lemat 1.50 (Nierówność Cauchy'ego z epsilon). Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ i dla dowolnego $\epsilon > 0$ zachodzi

$$|ab| \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon}.$$

Lemat 1.51 (Nierówność Cauchy'ego-Schwarza). W Przestrzeni unitarnej $(X, (\cdot, \cdot))$

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|, \quad x, y \in X.$$

Lemat 1.52 (Nierówność Höldera). Załóżmy, że $1 < p, q < \infty$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Jeśli $f \in L^p(G)$ i $g \in L^q(G)$, to

$$\int_G |fg| dx \leq \|f\|_{L^p(G)} \|g\|_{L^q(G)}.$$

Niech X będzie przestrzenią Banacha i niech funkcja $F : [0, T] \times X \rightarrow X$ oraz punkt $x_0 \in X$ będą zadane. Rozważmy zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)) & \text{dla p.w. } t \in (0, T), \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Lemat 1.53. *Przypuśćmy, że:*

- i) F jest silnie mierzalna względem t dla każdego $y \in Y$,
- ii) F spełnia lokalny warunek Lipschitza względem y dla p.w. $t \in (0, T)$,
- iii) F spełnia warunek wzrostu typu liniowego, tzn. że istnieje $\alpha \in L^1_{loc}(0, T)$ taka, że dla p.w. $t \in (0, T)$ i dla każdego $y \in Y$

$$\|F(t, y)\| \leq \alpha(t)(1 + \|y\|).$$

Wówczas problem (1.1) ma jedyne absolutnie ciągle rozwiązanie na $[0, T]$.

Twierdzenie 1.54 (o śladzie). *Niech $1 \leq p < \infty$. Istnieje dokładnie jeden ograniczony operator liniowy*

$$T : W^{1,p}(G) \rightarrow L^p(\partial G)$$

taki, że:

- i) $Tu = u|_{\partial G}$, gdy $u \in W^{1,p}(G) \cap C(\overline{G})$,
- ii) $\|Tu\|_{L^p(\partial G)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(G)}$

dla każdej $u \in W^{1,p}(G)$, przy czym stała C zależy od p , N i G .

Twierdzenie 1.55. *Przestrzenie $H = L^2(G)$, $V = H_0^1(G)$, V^* stanowią trójkę ewolucyjną, gdzie $H_0^1(G)$ jest podprzestrzenią przestrzeni $H^1(G)$ funkcji zerujących się na ∂G w sensie śladu.*

Twierdzenie 1.56. *W przestrzeni Sobolewa $H_0^1(G)$*

$$\|v\|_V = \left(\int_G \sum_{i=1}^N |D_i u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad v \in V$$

jest normą równoważną normie $\|v\|_{1,2}$.

Paraboliczne równania różniczkowe drugiego rzędu

Niech $G \subset \mathbb{R}^N$ będzie zbiorem otwartym i niech $0 < T < \infty$ będzie ustalone. Definiujemy zbiór $Q = G \times [0, T]$. Oznaczmy dla uproszczenia: $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $D_{ij}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}$, $i, j = 1, \dots, N$.

Definicja 2.1. Kwadratowa symetryczna macierz liczbowa A jest półokreślona dodatnio, gdy wszystkie jej wartości własne są nieujemne.

Definicja 2.2. Niech funkcje $a_{ij}, b_i, c, f : Q \rightarrow \mathbb{R}$, $i, j = 1, \dots, N$ będą zadane. Równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu

$$u_t(x, t) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x, t) D_{ij}^2 u(x, t) + \sum_{i=1}^N b_i(x, t) D_i u(x, t) + c(x, t) u(x, t) + f(x, t) \quad (2.1)$$

jest paraboliczne (w sensie Waltera), gdy macierz $A(x, t) = [a_{ij}(x, t)]_{i,j=1}^N$ jest półokreślona dodatnio w zbiorze Q .

Naszym głównym celem jest dowód twierdzenia o istnieniu, jednoznaczności i własnościach słabych rozwiązań, w odpowiednich przestrzeniach Sobolewa, liniowego równania parabolicznego drugiego rzędu szczególnej postaci, a mianowicie

$$u_t(x, t) = \Delta u(x, t) + f(x, t), \quad (x, t) \in Q \quad (2.2)$$

z warunkiem początkowym i warunkiem brzegowym typu Dirichleta. Ponadto wykazemy pomocnicze ogólne twierdzenie o istnieniu i własnościach jedynego rozwiązania, w odpowiednich przestrzeniach Sobolewa, wariacyjnego liniowego równania różniczkowego pierwszego rzędu postaci

$$\frac{d}{dt}(u(t), v)_H + a(u(t), v) = \langle b(t), v \rangle_V, \quad v \in V \quad (2.3)$$

dla p.w. $t \in (0, T)$, z warunkiem początkowym

$$u(0) = u_0 \in H, \quad (2.4)$$

gdzie

$$V \subset H \subset V^*$$

jest trójką ewolucyjną, zaś

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

jest formą dwuliniową oraz

$$b : [0, T] \rightarrow V^*.$$

Symbol $(\cdot, \cdot)_H$ oznacza iloczyn skalarny w H , a symbol $\langle b(t), v \rangle_V$ oznacza wartość formy $b(t) \in V^*$ na elemencie $v \in V$. Wykorzystamy w tym celu aproksymacyjną metodę Galerkiną dla zagadnień wariacyjnych.

Dla zobrazowania metody wariacyjnej rozważmy jednowymiarowe równanie (2.2) z warunkiem początkowym i warunkiem brzegowym Dirichleta

$$\begin{cases} u_t(x, t) = D_{11}u(x, t) + f(x, t), & (x, t) \in (0, 1) \times [0, T], \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in \{0, 1\} \times [0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (2.5)$$

gdzie $f \in L^2((0, 1) \times (0, T))$ i $u_0 \in H$ są zadane; $V = H_0^1(0, 1)$, $H = L^2(0, 1)$. Szukamy rozwiązania $u \in W^{1,2}(0, T; V, H)$ problemu (2.5), gdzie $W^{1,2}(0, T; V, H)$ oznacza przestrzeń Sobolewa funkcji $u \in L^2(0, T; V)$ takich, że $u_t \in L^2(0, T; V^*)$ i zerujących się na końcach przedziału $G = (0, 1)$ w sensie śladu. Przyjmijmy na chwilę, że dla p.w. $t \in (0, T)$ funkcja $u \in L^2(0, T; C_0^\infty(0, 1))$ taka, że $u_t \in L^2(0, T; C_0^\infty(0, 1))$ spełnia problem różniczkowy (2.5) i pomnożmy równanie różniczkowe w (2.5) przez gładką funkcję próbną $v \in C_0^\infty(0, 1)$, a następnie scałkujemy to równanie po G . Wykonując jedno całkowanie przez części względem x członów $D_{11}u(x, t)v(x)$ i uwzględniając warunek brzegowy, otrzymujemy tzw. *równanie wariacyjne*

$$\int_0^1 u_t(x, t)v(x)dx + \int_0^1 D_1u(x, t)D_1v(x)dx = \int_0^1 f(x, t)v(x)dx, \quad v \in C_0^\infty(0, 1)$$

i równoważnie

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 u(x, t)v(x)dx + \int_0^1 D_1u(x, t)D_1v(x)dx = \int_0^1 f(x, t)v(x)dx, \quad v \in C_0^\infty(0, 1),$$

dla p.w. $t \in (0, T)$. Aproksymując funkcjami gładkimi, przekonujemy się, że powyższa tożsamość zachodzi nie tylko dla funkcji $v \in C_0^\infty(0, 1)$, ale w istocie dla wszystkich $v \in V$; co więcej, otrzymana równość ma sens nawet wówczas, gdy wiadomo jedynie, że $u \in W^{1,2}(0, T; V; H)$. Można bowiem udowodnić wprost z definicji, że

$$\langle u_t(t), v \rangle_V = \frac{d}{dt} \int_0^1 u(x, t)v(x)dx, \quad v \in V,$$

gdzie $u_t \in L^2(0, T; V^*)$. Oczywiście pozostałe dwie całki również mają sens dla takich przestrzeni, gdyż iloczyn dwóch funkcji należących do $L^2(0, 1)$ jest funkcją całkowalną. Przez *rozwiązanie słabe* albo inaczej *w uogólnionym sensie* oryginalnego problemu różniczkowego (2.5) będziemy teraz rozumieć funkcję $u \in W^{1,2}(0, T; V, H)$ spełniającą dla p.w. $t \in (0, T)$ równanie wariacyjne

$$\frac{d}{dt} (u(t), v)_H + \int_0^1 D_1u(x, t)D_1v(x)dx = \int_0^1 f(x, t)v(x)dx, \quad v \in V \quad (2.6)$$

i warunek początkowy

$$u(0) = u_0(x), \quad x \in (0, 1). \quad (2.7)$$

Wybieramy przestrzeń $V = H_0^1(0, 1)$, aby uwzględnić warunek brzegowy.

Zdefiniujmy formę dwuliniową

$$a(u, v) = \int_0^1 D_1 u(x) D_1 v(x) dx, \quad u, v \in V$$

oraz formę liniową

$$\langle b(t), v \rangle_V = \int_0^1 f(x, t) v(x) dx, \quad v \in V.$$

Równanie wariacyjne (2.6) możemy teraz zapisać w postaci

$$\frac{d}{dt}(u(t), v)_H + a(u(t), v) = \langle b(t), v \rangle_V, \quad v \in V.$$

W dalszej części pracy będziemy zakładać, że $G \subset \mathbb{R}^N$ jest obszarem ograniczonym.

Wariacyjne równania różniczkowe pierwszego rzędu. Metoda Galerkin

Niech $0 < T < \infty$ będzie ustalone. Niech ponadto $V \subset H \subset V^*$ będzie trójką ewolucyjną. Rozważmy dowolne odwzorowania:

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R},$$

$$b : [0, T] \rightarrow V^*.$$

Problem P. Znaleźć $u \in W^{1,2}(0, T; V, H)$ takie, że dla p.w. $t \in (0, T)$

$$\frac{d}{dt}(u(t), v)_H + a(u(t), v) = \langle b(t), v \rangle_{V^*, V}, \quad v \in V \quad (3.1)$$

i spełniony jest warunek początkowy

$$u(0) = u_0 \in H. \quad (3.2)$$

Przyjmujemy następujące założenia.

Założenie Z

(Z₁) $V \subset H \subset V^*$ jest trójką ewolucyjną, $\dim V = \infty$. Przestrzenie V i H są ośrodkowymi przestrzeniami Hilberta.

(Z₂) Forma $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwuliniowa, ograniczona, symetryczna i silnie dodatnio określona:

$$a(u, u) \geq c \|u\|_V^2, \quad u \in V, \quad (3.3)$$

gdzie $c > 0$. Ponadto, $u_0 \in H$ i $b \in L^2(0, T; V^*)$.

Niech $\{w_1, w_2, \dots\}$ będzie bazą Schaudera przestrzeni V , zaś (u_{n0}) ciągiem elementów przestrzeni $V_n := \text{span}(w_1, \dots, w_n)$ takim, że

$$u_{n0} \rightarrow u_0 \quad \text{w} \quad H \quad (n \rightarrow \infty).$$

Uwaga 3.1. Jeśli Założenie Z jest spełnione, to istnienie bazy Schaudera $\{w_1, w_2, \dots\}$ wynika wprost z twierdzenia 1.39. Z kolei istnienie ciągu u_{n0} jest konsekwencją faktu, że $V = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n}$ i gęstości V w H .

Problem G. Znaleźć $u_n \in W^{1,2}(0, T; V_n, H)$ absolutnie ciągle na $[0, T)$ postaci $u_n(t) = \sum_{k=1}^n c_{kn}(t)w_k$, $t \in [0, T]$ takie, że dla p.w. $t \in (0, T)$

$$\frac{d}{dt}(u_n(t), w_j)_H + a(u_n(t), w_j) = \langle b(t), w_j \rangle_V, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.4)$$

i spełniony jest warunek początkowy

$$u_n(0) = u_{n0} \in V_n. \quad (3.5)$$

Problem **G** nazywany jest problemem Galerkina. Korzystając z liniowości pochodnej oraz dwuliniowości iloczynu skalarnego i formy a , układ (3.4) można sprowadzić równoważnie do układu liniowych równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu na współczynniki c_{kn} , $k = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^n c_{kn}(t)w_k, w_j \right)_H + a \left(\sum_{k=1}^n c_{kn}(t)w_k, w_j \right) &= \langle b(t), w_j \rangle_V, \quad j = 1, \dots, n, \\ \sum_{k=1}^n \left[\frac{d}{dt} (c_{kn}(t)w_k, w_j)_H + a(c_{kn}(t)w_k, w_j) \right] &= \langle b(t), w_j \rangle_V, \quad j = 1, \dots, n, \\ \sum_{k=1}^n \left[\frac{d}{dt} (c_{kn}(t)(w_k, w_j)_H) + c_{kn}(t)a(w_k, w_j) \right] &= \langle b(t), w_j \rangle_V, \quad j = 1, \dots, n, \\ \sum_{k=1}^n \left[c'_{kn}(t)(w_k, w_j)_H + c_{kn}(t)a(w_k, w_j) \right] &= \langle b(t), w_j \rangle_V, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Przyjmijmy oznaczenie $d_{jn}(t) := \langle b(t), w_j \rangle_V$, $j = 1, \dots, n$. Układ (3.6) możemy zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} (w_1, w_1)_H & \dots & (w_n, w_1)_H \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_1, w_n)_H & \dots & (w_n, w_n)_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1n}(t) \\ \vdots \\ c_{nn}(t) \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} a(w_1, w_1) & \dots & a(w_n, w_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a(w_1, w_n) & \dots & a(w_n, w_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1n}(t) \\ \vdots \\ c_{nn}(t) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} d_{1n}(t) \\ \vdots \\ d_{nn}(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Zauważmy jeszcze, że

$$u_n(0) = \sum_{k=1}^n c_{kn}(0)w_k$$

oraz istnieje dokładnie jeden wektor $(\alpha_{1n}, \dots, \alpha_{nn}) \in \mathbb{R}^n$ taki, że

$$u_{n0} = \sum_{k=1}^n \alpha_{kn}w_k.$$

A stąd

$$c_{kn}(0) = \alpha_{kn}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.8)$$

Macierz

$$W_n = \begin{bmatrix} (w_1, w_1)_H & \dots & (w_n, w_1)_H \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_1, w_n)_H & \dots & (w_n, w_n)_H \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

nazywana jest macierzą Grama lub macierzą sztywności. Zauważmy, że jest ona nieosobliwa. Wprowadzamy jeszcze oznaczenia:

$$A_n = \begin{bmatrix} a(w_1, w_1) & \dots & a(w_n, w_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a(w_1, w_n) & \dots & a(w_n, w_n) \end{bmatrix},$$

$$d_n(t) = (c_{1n}(t), \dots, c_{nn}(t))^T.$$

Definiujemy operator $A : V \rightarrow V^*$ wzorem

$$\langle Au, v \rangle_V = a(u, v), \quad u, v \in V. \quad (3.10)$$

Uwaga 3.2. Jeśli spełnione jest założenie **Z**, to operator A jest dobrze określony, liniowy, ciągły i silnie dodatnio określony. Dobra określoność i liniowość są oczywiste. Ciągłość wynika z nierówności:

$$\begin{aligned} |\langle Au, v \rangle_V| &= |a(u, v)| \leq C \|u\|_V \|v\|_V, \quad u, v \in V, \\ \|Au\|_{V^*} &\leq C \|u\|_V, \quad u \in V, \end{aligned}$$

zaś silnie dodatnia określoność z nierówności

$$\langle Au, u \rangle_V = a(u, u) \geq c \|u\|^2, \quad u \in V.$$

Lemat 3.3. Jeśli spełnione jest Założenie **Z**, to Problem **P** jest równoważny w klasie funkcji $u \in W^{1,2}(0, T; V, H)$ operatorowemu zagadnieniu początkowemu

$$u'(t) + Au(t) = b(t) \quad \text{dla p.w. } t \in (0, T), \quad (3.11)$$

$$u(0) = u_0. \quad (3.12)$$

Dowód. Niech $u \in W^{1,2}(0, T; V, H)$. Przyjmijmy, że u spełnia Problem **P**. Z uwagi 1.42 wynika, że dla p.w. $t \in (0, T)$:

$$\langle u'(t), v \rangle_V + \langle Au(t), v \rangle_V = \langle b(t), v \rangle_V, \quad v \in V,$$

$$\langle u'(t) + Au(t) - b(t), v \rangle_V = 0, \quad v \in V.$$

A stąd

$$u'(t) + Au(t) - b(t) = 0 \quad \text{dla p.w. } t \in (0, T),$$

czyli u spełnia problem (3.11), (3.12).

Założmy teraz, że u jest rozwiązaniem zagadnienia (3.11), (3.12). Korzystając z faktu, że $u'(t), Au(t), b(t) \in V^*$ dla p.w. $t \in (0, T)$, możemy napisać:

$$\langle u'(t) + Au(t), v \rangle_V = \langle b(t), v \rangle_V, \quad v \in V,$$

$$\langle u'(t), v \rangle_V + \langle Au(t), v \rangle_V = \langle b(t), v \rangle_V, \quad v \in V,$$

dla p.w. $t \in (0, T)$. W konsekwencji uwaga 1.42 implikuje, że u jest rozwiązaniem Problemu **P**. $\square$

Twierdzenie 3.4. *Jeśli Założenie **Z** jest spełnione, to:*

- (i) dla każdego $n \in \mathbb{N}$ Problem **G** ma dokładnie jedno rozwiązanie u_n ,
- (ii) Problem **P** ma dokładnie jedno rozwiązanie u ,
- (iii) istnieje stała $D > 0$ taka, że dla dowolnego $u_0 \in H$ i $b \in L^2(0, T, V^*)$ zachodzi nierówność

$$\|u\|_{W^{1,2}(0,T;V,H)} \leq D(\|u_0\|_H + \|b\|_{L^2(0,T;V^*)}), \quad (3.13)$$

gdzie u jest rozwiązaniem Problemu **P**, tzn. że odwzorowanie

$$H \times L^2(0, T; V^*) \ni (u_0, b) \rightarrow u \in W^{1,2}(0, T; V, H) \quad (3.14)$$

jest ciągle,

- (iv) a) $u_n \rightarrow u$ w $C([0, T], H)$ ($n \rightarrow \infty$),
- b) $u_n \rightarrow u$ w $L^2(0, T; V)$ ($n \rightarrow \infty$).

Dowód. Najpierw udowodnimy punkt (i).

Ustalmy dowolne $n \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że Problem **G** ma jedyne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy układ równań różniczkowych zwyczajnych (3.7) z warunkiem początkowym (3.8) ma jedyne rozwiązanie absolutnie ciągłe $c_n = (c_{n1}, \dots, c_{nn})^T : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Do udowodnienia tego faktu skorzystamy z lematu 1.53. Układ (3.7) można zapisać w postaci równoważnej

$$c'_n(t) = -W_n^{-1} A_n c_n(t) + W_n^{-1} d_n(t) \quad \text{dla p.w. } t \in (0, T), \quad (3.15)$$

gdyż macierz W_n jest nieosobliwa. Niech normy w $\mathbb{R}^n$ i w przestrzeni macierzy kwadratowych $M^{n \times n}$ będą zdefiniowane następująco:

$$\|x\| = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\|A\| = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n \in M^{n \times n}.$$

Definiujemy funkcję $F : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ wzorem

$$F(t, y) = -W_n^{-1} A_n y + W_n^{-1} d_n(t).$$

Funkcja F jest oczywiście silnie mierzalna względem t dla każdego y , ponieważ $b \in L^2(0, T; V^*)$. Ponadto funkcja ta spełnia warunek Lipschitza względem y dla p.w. $t \in (0, T)$:

$$\|F(t, y) - F(t, \bar{y})\| = \|W_n^{-1} A_n (y - \bar{y})\| \leq \|W_n^{-1} A_n\| \|y - \bar{y}\|, \quad y, \bar{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Z twierdzenia 1.36 wynika następująca nierówność dla p.w. $t \in (0, T)$

$$|d_{jn}(t)| = | \langle b(t), w_j \rangle_V | \leq \|b(t)\|_{V^*} \|w_j\|_V, \quad j = 1, \dots, n.$$

A więc $d_{jn} \in L^2(0, T)$ i stąd $\|d_n\| \in L^2(0, T) \subset L^1_{loc}(0, T)$, gdyż norma jest ciągła. Wobec tego funkcja F spełnia również warunek wzrostu typu liniowego względem y dla p.w. $t \in (0, t)$:

$$\begin{aligned} \|F(t, y)\| &\leq \|W_n^{-1} A_n\| \|y\| + \|W_n^{-1}\| \|d_n(t)\| \\ &\leq \max\{\|W_n^{-1} A_n\|, \|W_n^{-1}\| \|d_n(t)\|\} (1 + \|y\|), \quad y \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Lemat 1.53 implikuje istnienie jedynego absolutnie ciągłego rozwiązania c_n problemu (3.7) z warunkiem początkowym (3.8).

Wykażemy punkt (ii).

Najpierw sprawdzimy jednoznaczność. Przypuśćmy, że istnieją dwa rozwiązania $u_1, u_2 \in W^{1,2}(0, T; V, H)$ Problemu **P**. Zatem na podstawie lematu 3.3 mamy:

$$u_1'(t) + Au_1(t) = b(t) \quad \text{dla p.w. } t \in (0, T),$$

$$u_1 = u_0$$

oraz

$$u_2'(t) + Au_2(t) = b(t) \quad \text{dla p.w. } t \in (0, T),$$

$$u_2 = u_0.$$

Położmy $u := u_1 - u_2$. Odejmując stronami powyższe równania, otrzymujemy

$$u'(t) + Au(t) = 0 \quad \text{dla p.w. } t \in (0, T), \quad (3.16)$$

$$u(0) = 0. \quad (3.17)$$

Pokażemy, że

$$u(t) = 0 \quad \text{dla p.w. } t \in (0, T).$$

Z postaci równania (3.16) wynika w szczególności, że

$$\langle u'(t) + Au(t), u(t) \rangle_V = 0 \quad \text{dla p.w. } t \in (0, T).$$

Całkujemy obustronnie i otrzymujemy

$$\int_0^T \langle u'(t), u(t) \rangle_V dt = - \int_0^T \langle Au(t), u(t) \rangle_V dt.$$

Z twierdzenia 1.47 o całkowaniu przez części możemy napisać

$$\int_0^T \langle u'(t), u(t) \rangle_V dt = \frac{1}{2} \|u(T)\|_H^2 - \frac{1}{2} \|u(0)\|_H^2.$$

A stąd

$$\frac{1}{2} \|u(T)\|_H^2 = - \int_0^T \langle Au(t), u(t) \rangle_V dt,$$

gdyż $\|u(0)\|_H = 0$ na podstawie (3.17). Ponadto założenie (Z_2) i uwaga 3.2 implikują nierówność

$$- \int_0^T \langle Au(t), u(t) \rangle_V dt \leq -c \int_0^T \|u(t)\|_V^2 dt.$$

Wobec tego

$$\frac{1}{2} \|u(T)\|_H^2 + c \int_0^T \|u(t)\|_V^2 dt \leq 0,$$

czyli

$$\int_0^T \|u(t)\|_V^2 dt = 0.$$

Z tego wynika, że

$$u(t) = 0 \quad \text{dla p.w. } t \in (0, T).$$

Teraz udowodnimy istnienie rozwiązania.

W pierwszym kroku znajdziemy oszacowanie a priori rozwiązań problemu Galerina $\mathbf{G}$ postaci

$$\|u_n\|_{L^2(0,T;V)}^2 \leq c^{-1} \left(K + c^{-1} \|b\|_{L^2(0,T;V^*)}^2 \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.18)$$

gdzie K jest stałą niezależną od n . Mnożąc (3.4) przez $c_{jn}(t)$ oraz sumując po j , otrzymujemy

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (u_n(t), u_n(t)) + a(u_n(t), u_n(t)) = \langle b(t), u_n(t) \rangle_V,$$

$$\frac{d}{dt} \|u_n\|_H^2 + 2a(u_n(t), u_n(t)) = 2 \langle b(t), u_n(t) \rangle_V.$$

Całkując od 0 do T oraz korzystając z nierówności Cauchy'ego z epsilon dla $\epsilon := \frac{c}{2}$ (zobacz lemat 1.50), twierdzenia 1.37 i ograniczoności formy liniowej $b(t)$, mamy

$$\|u_n(T)\|_H^2 - \|u_n(0)\|_H^2 + 2 \int_0^T a(u_n(t), u_n(t)) dt = 2 \int_0^T \langle b(t), u_n(t) \rangle_V dt,$$

$$\|u_n(T)\|_H^2 + 2c \int_0^T \|u_n(t)\|_V^2 dt \leq \|u_n(0)\|_H^2 + 2 \int_0^T \|b(t)\|_{V^*} \|u_n(t)\|_V dt$$

$$\leq \|u_n(0)\|_H^2 + c \int_0^T \|u_n(t)\|_V^2 dt + c^{-1} \int_0^T \|b(t)\|_{V^*}^2 dt,$$

$$c \int_0^T \|u_n(t)\|_V^2 dt \leq \|u_{n0}\|_H^2 + c^{-1} \int_0^T \|b(t)\|_{V^*}^2 dt$$

i ostatecznie

$$\int_0^T \|u_n(t)\|_V^2 dt \leq c^{-1} \left(\|u_{n0}\|_H^2 + c^{-1} \int_0^T \|b(t)\|_{V^*}^2 dt \right). \quad (3.19)$$

Ostatnia nierówność i silna zbieżność ciągu u_{n0} w przestrzeni H , a zatem jego ograniczoność, implikują oszacowanie (3.18).

W drugim kroku wykazemy, że ciąg u_n jest słabo zbieżny w przestrzeni $L^2(0, T; V)$, a jego granica u jest rozwiązaniem Problemu **P**.

Z (3.18) wynika, że ciąg rozwiązań Galerкина u_n jest ograniczony w $L^2(0, T; V)$. Twierdzenie Banacha-Alaoglu 1.40 implikuje istnienie podciągu słabo zbieżnego

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{w} \quad L^2(0, T; V). \quad (3.20)$$

Dla uproszczenia zapisu będziemy dalej używać oznaczenia u_n zamiast u_{n_k} . Pokażemy, robiąc przejście graniczne, że u jest rozwiązaniem Problemu **P**. Na podstawie lematu 3.3 wystarczy wykazać, że u jest rozwiązaniem zagadnienia (3.11), (3.12).

Ustalmy dowolną funkcję $\phi \in C^1([0, T], \mathbb{R})$ taką, że $\phi(T) = 0$. Mnożymy obustronnie równania Galerкина (3.4) przez ϕ , całkujemy po czasie na przedziale $[0, T]$ i otrzymujemy tożsamość

$$\int_0^T \langle u'_n(t), w_j \rangle_V \phi(t) dt + \int_0^T a(u_n(t), w_j) \phi(t) dt = \int_0^T \langle b(t), w_j \rangle_V \phi(t) dt, \quad (3.21)$$

$j = 1, \dots, n$. Korzystając z twierdzenia 1.47 o całkowaniu przez części, uwagi 1.43 i symetrii iloczynu skalarnego, mamy

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle u'_n(t), w_j \phi(t) \rangle_V dt + \int_0^T \langle w_j \phi'(t), u_n(t) \rangle_V dt \\ &= (u_n(T), w_j \phi(T))_H - (u_n(0), w_j \phi(0))_H, \\ & \int_0^T (u'_n(t), w_j)_H \phi(t) dt = - \int_0^T (u_n(t), w_j)_H \phi'(t) dt - (u_n(0), w_j)_H \phi(0), \end{aligned}$$

$j = 1, \dots, n$. A stąd tożsamość (3.21) możemy zapisać w postaci równoważnej

$$\begin{aligned} & -(u_n(0), w_j)_H \phi(0) - \int_0^T (u_n(t), w_j)_H \phi'(t) dt + \int_0^T a(u_n(t), w_j) \phi(t) dt \\ &= \int_0^T \langle b(t), w_j \rangle_V \phi(t) dt, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Zrobimy teraz przejście graniczne w (3.22) z $n \rightarrow \infty$. Na podstawie zbieżności ciągu u_{n0} do u_0 w H i ciągłości iloczynu skalarnego stwierdzamy, że

$$(u_n(0), w_j)_H \phi(0) \rightarrow (u_0, w_j)_H \phi(0), \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.23)$$

Chcemy jeszcze zrobić przejście graniczne w drugim i trzecim członie równania (3.22) z $n \rightarrow \infty$. Zdefiniujmy funkcjonal

$$F_1[p] := \int_0^T (p(t), w_j)_H \phi'(t) dt, \quad p \in L^2(0, T; V).$$

Funkcjonał F_1 jest oczywiście liniowy. Ponadto jest on również ograniczony, gdyż na podstawie lematu 1.52 i twierdzenia 1.44 mamy

$$|F_1(p)| \leq \int_0^T |(p(t), w_j)_H \phi'(t)| dt \leq \int_0^T \|p(t)\|_H \|w_j\|_H |\phi'(t)| dt$$

$$\leq \int_0^T \|p(t)\|_V \|w_j\|_H |\phi'(t)| dt$$

$$\leq C_1 \|w_j\|_H \|\phi'\|_{L^\infty(0,T)} \left(\int_0^T \|p(t)\|_V^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(C_1 \|w_j\|_H \|\phi'\|_{L^\infty(0,T)} \right) \|p\|_{L^2(0,T;V)}$$

dla każdego $p \in L^2(0, T; V)$. A stąd $F_1 \in L^2(0, T; V^*)$, czyli

$$\int_0^T (u_n(t), w_j)_H \phi'(t) dt \rightarrow \int_0^T (u(t), w_j)_H \phi'(t) dt, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.24)$$

na podstawie (3.20). Zdefiniujmy teraz funkcjonal

$$F_2[p] := \int_0^T a(p(t), w_j) \phi(t) dt, \quad p \in L^2(0, T; V).$$

Funkcjonał ten jest liniowy. Jest on również ograniczony, gdyż

$$|F_2(p)| \leq \int_0^T |a(p(t), w_j) \phi(t)| dt \leq C_2 \int_0^T \|p(t)\|_V \|w_j\|_V |\phi(t)| dt$$

$$\leq C_2 C_3 \|w_j\|_V \|\phi\|_{L^\infty(0,T)} \left(\int_0^T \|p(t)\|_V^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(C_2 C_3 \|w_j\|_V \|\phi\|_{L^\infty(0,T)} \right) \|p\|_{L^2(0,T;V)}$$

dla każdego $p \in L^2(0, T; V)$. Zatem $F_2 \in L^2(0, T; V^*)$. Wobec tego

$$\int_0^T a(u_n(t), w_j) \phi(t) dt \rightarrow \int_0^T a(u(t), w_j) \phi(t) dt, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.25)$$

na podstawie (3.20). Korzystając z (3.22) i przejść granicznych (3.23), (3.24), (3.25), otrzymujemy, że

$$-(u(0), w_j)_H \phi(0) - \int_0^T (u(t), w_j)_H \phi'(t) dt + \int_0^T a(u(t), w_j) \phi(t) dt \quad (3.26)$$

$$= \int_0^T \langle b(t), w_j \rangle_V \phi(t) dt, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Ustalmy dowolne $v \in V$. Dzięki założeniu (Z_1) istnieje ciąg v_m taki, że

$$v_m \rightarrow v \quad w \quad V,$$

gdzie $v_m \in V_m$, tzn. że $v_m = \sum_{j=1}^m \alpha_j w_j$ dla pewnych $\alpha_j \in \mathbb{R}$. Mnożąc (3.26) przez α_j oraz sumując po j od 1 do m , otrzymujemy

$$-\sum_{j=1}^m \alpha_j (u_0, w_j)_H \phi(0) - \sum_{j=1}^m \alpha_j \int_0^T (u(t), w_j)_H \phi'(t) dt + \sum_{j=1}^m \alpha_j \int_0^T a(u(t), w_j) \phi(t) dt$$

$$= \sum_{j=1}^m \alpha_j \int_0^T \langle b(t), w_j \rangle_V \phi(t) dt,$$

$$-(u_0, v_m)_H \phi(0) - \int_0^T (u(t), v_m)_H \phi'(t) dt + \int_0^T a(u(t), v_m) \phi(t) dt \quad (3.27)$$

$$= \int_0^T \langle b(t), v_m \rangle_V \phi(t) dt,$$

$j \in \mathbb{N}$. Zrobimy teraz przejście graniczne w (3.27) z $m \rightarrow \infty$. Na podstawie zbieżności ciągu v_m do v w V , a więc i w H oraz ciągłości iloczynu skalarnego stwierdzamy, że

$$(u_0, v_m)_H \phi(0) \rightarrow (u_0, v)_H \phi(0), \quad m \rightarrow \infty. \quad (3.28)$$

Chcemy jeszcze zrobić przejście graniczne w trzech pozostałych członach równania (3.27) z $m \rightarrow \infty$. Zdefiniujmy funkcjonal

$$G_1[p] := \int_0^T (u(t), p)_H \phi'(t) dt, \quad p \in V.$$

Funkcjonał G_1 jest oczywiście liniowy. Ponadto jest on również ograniczony, gdyż

$$\begin{aligned} |G_1(p)| &\leq \int_0^T |(u(t), p)_H \phi'(t)| dt \leq \int_0^T \|u(t)\|_H \|p\|_H |\phi'(t)| dt \\ &\leq \int_0^T \|u(t)\|_V \|p\|_V |\phi'(t)| dt \\ &\leq C_4 \|\phi'\|_{L^\infty(0,T)} \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \|p\|_V = \left(C_4 \|\phi'\|_{L^\infty(0,T)} \|u\|_{L^2(0,T;V)} \right) \|p\|_V \end{aligned}$$

dla każdego $p \in V$. A stąd $G_1 \in V^*$, czyli

$$\int_0^T (u(t), v_m)_H \phi'(t) dt \rightarrow \int_0^T (u(t), v)_H \phi'(t) dt, \quad m \rightarrow \infty, \quad (3.29)$$

gdyż $v_m \rightarrow v$ w V zgodnie z twierdzeniem 1.48. Zdefiniujmy teraz funkcjonal

$$G_2[p] := \int_0^T a(u(t), p) \phi(t) dt, \quad p \in V.$$

Funkcjonał ten jest liniowy. Jest on również ograniczony, gdyż

$$\begin{aligned} |G_2(p)| &\leq \int_0^T |a(u(t), p) \phi(t)| dt \leq C_5 \int_0^T \|u(t)\|_V \|p\|_V |\phi(t)| dt \\ &\leq C_5 C_6 \|\phi\|_{L^\infty(0,T)} \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \|p\|_V = \left(C_5 C_6 \|\phi\|_{L^\infty(0,T)} \|u\|_{L^2(0,T;V)} \right) \|p\|_V \end{aligned}$$

dla każdego $p \in V$. Zatem $G_2 \in V^*$. Wobec tego

$$\int_0^T a(u(t), v_m) \phi(t) dt \rightarrow \int_0^T a(u(t), v) \phi(t) dt, \quad m \rightarrow \infty. \quad (3.30)$$

Zdefiniujmy jeszcze funkcjonal

$$G_3[p] := \int_0^T \langle b(t), p \rangle_V \phi(t) dt, \quad p \in V.$$

Funkcjonał ten jest liniowy. Jest on również ograniczony, gdyż

$$\begin{aligned} |G_3[p]| &\leq \|\phi\|_{L^\infty(0,T)} \int_0^T \|b(t)\|_{V^*} \|p\|_V dt \leq C_7 \|\phi\|_{L^\infty(0,T)} \left(\int_0^T \|b(t)\|_{V^*}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \|p\|_V \\ &= \left(C_7 \|\phi\|_{L^\infty(0,T)} \|b\|_{L^2(0,T;V^*)} \right) \|p\|_V \end{aligned}$$

dla każdego $p \in V$. Stąd $G_3 \in V^*$, a więc

$$\int_0^T \langle b(t), v_m \rangle_V \phi(t) dt \rightarrow \int_0^T \langle b(t), v \rangle_V \phi(t) dt, \quad m \rightarrow \infty. \quad (3.31)$$

Wzór (3.27) oraz przejścia graniczne (3.28), (3.29), (3.30) i (3.31) implikują tożsamość całkową

$$-(u_0, v)_H \phi(0) - \int_0^T (u(t), v)_H \phi'(t) dt + \int_0^T a(u(t), v) \phi(t) dt = \int_0^T \langle b(t), v \rangle_V \phi(t) dt. \quad (3.32)$$

Rozważmy funkcje $\phi \in C^\infty([0, T], \mathbb{R})$ takie, że $\phi(0) = 0$ i $\phi(T) = 0$. Dla takich funkcji wzór (3.32) jest oczywiście prawdziwy i przyjmuje postać

$$-\int_0^T (u(t), v)_H \phi'(t) dt + \int_0^T \langle Au(t), v \rangle_V \phi(t) dt = \int_0^T \langle b(t), v \rangle_V \phi(t) dt$$

i dalej

$$-\int_0^T (u(t) \phi'(t), v)_H dt + \int_0^T \langle \phi(t) Au(t), v \rangle_V dt - \int_0^T \langle \phi(t) b(t), v \rangle_V dt = 0.$$

Definiujemy operator

$$\langle u(t) \phi'(t), v \rangle_V := (u(t) \phi'(t), v)_H, \quad v \in V \quad (3.33)$$

dla dowolnie ustalonej funkcji ϕ i dla dowolnego $t \in (0, T)$. Zauważmy, że jest on liniowy i ograniczony, gdyż

$$|\langle u(t) \phi'(t), v \rangle_V| \leq \|u(t) \phi'(t)\|_H \|v\|_H \leq \|u(t) \phi'(t)\|_H \|v\|_V$$

dla każdego $v \in V$. Wykorzystując operator (3.33), możemy napisać

$$\begin{aligned} -\int_0^T \langle u(t) \phi'(t), v \rangle_V dt + \int_0^T \langle \phi(t) Au(t), v \rangle_V dt - \int_0^T \langle \phi(t) b(t), v \rangle_V dt &= 0, \\ -\int_0^T \langle u(t) \phi'(t), v \rangle_V dt + \int_0^T \langle (Au(t) - b(t)) \phi(t), v \rangle_V dt &= 0 \end{aligned}$$

i ostatecznie

$$\left\langle -\int_0^T u(t) \phi'(t) dt + \int_0^T (Au(t) - b(t)) \phi(t) dt, v \right\rangle_V = 0$$

dla każdego $v \in V$. Wobec tego

$$\begin{aligned} -\int_0^T u(t) \phi'(t) dt + \int_0^T (Au(t) - b(t)) \phi(t) dt &= 0, \\ \int_0^T u(t) \phi'(t) dt &= -\int_0^T (Au(t) - b(t)) \phi(t) dt \end{aligned}$$

dla każdej $\phi \in C_0^\infty(0, T)$. Na podstawie definicji słabej pochodnej stwierdzamy, że dla p.w. $t \in (0, T)$

$$u'(t) = -(Au(t) - b(t)),$$

$$u'(t) + Au(t) = b(t), \quad (3.34)$$

dla p.w. $t \in (0, T)$. Oczywiście $u \in L^2(0, T; V)$ jako słaba granica ciągu w tej przestrzeni.

Z uwagi 3.2 wynika, że

$$\|Au(t)\|_{V^*} \leq C\|u(t)\|_V.$$

Po podniesieniu do kwadratu i scałkowaniu dostajemy nierówność

$$\|A \circ u\|_{L^2(0, T; V^*)}^2 = \int_0^T \|Au(t)\|_{V^*}^2 dt \leq C^2 \int_0^T \|u(t)\|_V^2 dt = C^2 \|u\|_{L^2(0, T; V)}^2. \quad (3.35)$$

Stąd $A \circ u \in L^2(0, T; V^*)$. Ponieważ $b \in L^2(0, T; V^*)$, więc $u' \in L^2(0, T; V^*)$. Lemat 3.3 implikuje, że u jest rozwiązaniem (3.1) w problemie **P**.

Ponieważ $u \in W^{1,2}(0, T; V, H) \subset C([0, T], H)$ na podstawie twierdzenia 1.45, więc możemy zastosować twierdzenie 1.47 o całkowaniu przez części

$$(u(T), \phi(T)v)_H - (u(0), \phi(0)v)_H = \int_0^T \langle u'(t), \phi(t)v \rangle_V + \langle \phi'(t)v, u(t) \rangle_V dt \quad (3.36)$$

dla każdej $\phi \in C^1([0, T], \mathbb{R})$ i dla każdego $v \in V$. Załóżmy dodatkowo, że $\phi(0) = 1$ i $\phi(T) = 0$. Dla takich funkcji ϕ tożsamość (3.32) oczywiście zachodzi. Korzystając z (3.32), (3.33), (3.34) i (3.36), mamy ciąg równości

$$\begin{aligned} -(u(0), v)_H &= \int_0^T (\langle u'(t), \phi(t)v \rangle_V + \langle \phi'(t)v, u(t) \rangle_V) dt \\ &= \int_0^T (\langle b(t) - Au(t), \phi(t)v \rangle_V + \langle \phi'(t)v, u(t) \rangle_V) dt \\ &= \int_0^T (\langle b(t), v \rangle_V \phi(t) - \langle Au(t), v \rangle_V \phi(t) + (u(t), v)_H \phi'(t)) dt \\ &= \int_0^T (\langle b(t), v \rangle_V \phi(t) - a(u(t), v) \phi(t) + (u(t), v)_H \phi'(t)) dt \\ &= -(u_0, v)_H \end{aligned}$$

dla każdego $v \in V$. A stąd

$$(u(0) - u_0, v)_H = 0, \quad v \in V,$$

i dalej z gęstości V w H i liniowości iloczynu skalarnego mamy

$$(u(0) - u_0, v)_H = 0, \quad v \in H.$$

Z tego wynika, że

$$u(0) - u_0 \in H^\perp = \{0\}$$

i ostatecznie otrzymujemy, że spełniony jest warunek początkowy (3.2) w Problemie **P**

$$u(0) = u_0.$$

Udowodnimy teraz punkt (iii).

Wystarczy wyprowadzić nierówność (3.13), gdyż ciągłość odwzorowania (3.14) wynika z tej nierówności. Słaba zbieżność

$$u_n \rightharpoonup u \quad w \quad L^2(0, T; V)$$

i twierdzenie 1.48 implikują oszacowanie

$$\|u\|_{L^2(0, T; V)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L^2(0, T; V)}.$$

Pierwiastkując oraz przechodząc z $n \rightarrow \infty$ w oszacowaniu (3.19), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L^2(0, T; V)} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} c^{-\frac{1}{2}} \left(\|u_n(0)\|_H^2 + c^{-1} \|b\|_{L^2(0, T; V^*)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= c^{-\frac{1}{2}} \left(\|u_0\|_H^2 + c^{-1} \|b\|_{L^2(0, T; V^*)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Zatem

$$\|u\|_{L^2(0, T; V)} \leq c^{-\frac{1}{2}} \left(\|u_0\|_H^2 + c^{-1} \|b\|_{L^2(0, T; V^*)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.37)$$

Z (3.34), (3.35) i uwagi 3.2 wynika, że

$$\begin{aligned} \|u'\|_{L^2(0, T; V^*)} &\leq \|b\|_{L^2(0, T; V^*)} + \|Au\|_{L^2(0, T; V^*)} \\ &\leq \|b\|_{L^2(0, T; V^*)} + C\|u\|_{L^2(0, T; V)} \\ &\leq \|b\|_{L^2(0, T; V^*)} + Cc^{-\frac{1}{2}} \left(\|u_0\|_H^2 + c^{-1} \|b\|_{L^2(0, T; V^*)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Na podstawie (3.37) i (3.38) otrzymujemy ciąg nierówności

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{1,2}(0, T; V, H)}^2 &= \left(\|u\|_{L^2(0, T; V)} + \|u'\|_{L^2(0, T; V^*)} \right)^2 \\ &\leq 2 \left(\|u\|_{L^2(0, T; V)}^2 + \|u'\|_{L^2(0, T; V^*)}^2 \right) \\ &\leq 2 \left[c^{-1} \left(\|u_0\|_H^2 + c^{-1} \|b\|_{L^2(0, T; V^*)}^2 \right) + \left(\|b\|_{L^2(0, T; V^*)} + Cc^{-\frac{1}{2}} \left(\|u_0\|_H^2 + c^{-1} \|b\|_{L^2(0, T; V^*)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right] \\ &\leq 2 \left[c^{-1} \left(\|u_0\|_H^2 + c^{-1} \|b\|_{L^2(0, T; V^*)}^2 \right) + 2 \left(\|b\|_{L^2(0, T; V^*)}^2 + C^2 c^{-1} \left(\|u_0\|_H^2 + \|b\|_{L^2(0, T; V^*)}^2 \right) \right) \right] \\ &\leq (2c^{-1} + 4C^2 c^{-1}) \|u_0\|_H^2 + (2c^{-2} + 4 + 4C^2 c^{-2}) \|b\|_{L^2(0, T; V^*)}^2. \end{aligned}$$

Położmy

$$D^2 := \max\{2c^{-1} + 4C^2 c^{-1}, 2c^{-2} + 4 + 4C^2 c^{-2}\}.$$

A stąd

$$\|u\|_{W^{1,2}(0, T; V, H)}^2 \leq D^2 \left(\|u_0\|_H^2 + \|b\|_{L^2(0, T; V^*)}^2 \right)$$

i ostatecznie

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{1,2}(0, T; V, H)} &\leq D \left(\|u_0\|_H^2 + \|b\|_{L^2(0, T; V^*)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq D \left(\|u_0\|_H + \|b\|_{L^2(0, T; V^*)} \right). \end{aligned} \quad (3.39)$$

W dalszej części udowodnimy podpunkt a) punktu (iv), tzn. że

$$\|u_n - u\|_{C([0,T],H)} \rightarrow 0. \quad (3.40)$$

Z dowodu punktu (ii) wynika, że $u_n, u \in W^{1,2}(0, T; V, H)$. Wiadomo, że zbiór wielomianów

$$p(t) := \sum_{i=0}^m t^i a_i, \quad t \in [0, T], \quad m \in \mathbb{N} \quad (3.41)$$

o współczynnikach $a_i \in V$ jest gęsty w $W^{1,2}(0, T; V, H)$. Z uwagi 3.1 wiemy, że $V = \overline{\bigcup_n V_n}$. Wobec tego w $W^{1,2}(0, T; V, H)$ gęsty jest również zbiór wielomianów postaci (3.41) o współczynnikach $a_i \in V_n, n \in \mathbb{N}$. Zatem istnieje ciąg wielomianów $p_n : [0, T] \rightarrow V_n, n \in \mathbb{N}$ taki, że

$$p_n \rightarrow u \quad \text{w} \quad W^{1,2}(0, T; V, H).$$

Przypomnijmy, że

$$W^{1,2}(0, T; V, H) \subset C([0, T], H)$$

w sposób ciągły (zobacz twierdzenie 1.45). Konkludując,

$$\|p_n - u\|_{C([0,T],H)} \leq C \|p_n - u\|_{W^{1,2}(0,T;V,H)} \rightarrow 0. \quad (3.42)$$

Teraz udowodnimy, że

$$\|u_n - p_n\|_{C([0,T],H)} \rightarrow 0. \quad (3.43)$$

Odejmujemy stronami tożsamości:

$$u'(t) + Au(t) = b(t),$$

$$u'_n(t) + Au_n(t) = b(t)$$

i obliczamy

$$u'_n(t) = u'(t) + A(u(t) - u_n(t)).$$

Prawdziwy jest ciąg równości

$$\begin{aligned} & \|u_n(t) - p_n(t)\|_H^2 - \|u_{n0} - p_n(0)\|_H^2 \\ &= 2 \int_0^t \langle u'_n(s) - p'_n(s), u_n(s) - p_n(s) \rangle_V ds \\ &= 2 \int_0^t \langle u'(s) + A(u(s) - u_n(s)) - p'_n(s), (u_n(s) - u(s)) + (u(s) - p_n(s)) \rangle_V ds \\ &= 2 \int_0^t \left[\langle u'(s) + A(u(s) - u_n(s)), u_n(s) - u(s) \rangle_V \right. \\ &\quad \left. + \langle u'(s) + A(u(s) - u_n(s)), u(s) - p_n(s) \rangle_V \right. \\ &\quad \left. - \langle p'_n(s), u_n(s) - u(s) \rangle - \langle p_n(s)', u(s) - p_n(s) \rangle \right] ds \\ &= 2 \int_0^t \left[\langle u'(s) + A(u(s) - u_n(s)), u_n(s) \rangle_V - \langle u'(s) + A(u(s) - u_n(s)), u \rangle_V \right. \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned}
& + \langle u'(s), u(s) - p_n(s) \rangle_V + \langle A(u(s) - u_n(s)), u(s) - p_n(s) \rangle_V \\
& \quad - \langle p'_n(s), u_n(s) - p_n(s) \rangle_V \Big] ds \\
& = 2 \int_0^t \Big[\langle u'(s), u_n(s) \rangle_V + \langle A(u(s) - u_n(s)), u_n(s) \rangle_V - \langle u'(s), u(s) \rangle_V \\
& \quad - \langle A(u(s) - u_n(s)), u(s) \rangle_V + \langle u'(s), u(s) - p_n(s) \rangle_V \\
& \quad + \langle A(u(s) - u_n(s)), u(s) - p_n(s) \rangle_V - \langle p'_n(s), u_n(s) - p_n(s) \rangle_V \Big] ds \\
& = 2 \int_0^t \Big[\langle u'(s), u_n(s) - u(s) \rangle_V - \langle A(u(s) - u_n(s)), u(s) - u_n(s) \rangle_V \\
& \quad + \langle u'(s), u(s) - p_n(s) \rangle_V + \langle A(u(s) - u_n(s)), u(s) - p_n(s) \rangle_V \\
& \quad - \langle p'_n(s), u_n(s) - p_n(s) \rangle_V \Big] ds \\
& = 2 \int_0^t \Big[\langle u'(s), u_n(s) - p_n(s) \rangle_V - \langle A(u(s) - u_n(s)), u(s) - u_n(s) \rangle_V \\
& \quad + \langle A(u(s) - u_n(s)), u(s) - p_n(s) \rangle_V - \langle p'_n(s), u_n(s) - p_n(s) \rangle_V \Big] ds \\
& = 2 \int_0^t \Big[\langle u'(s) - p'_n(s), u_n(s) - p_n(s) \rangle_V - \langle A(u(s) - u_n(s)), u(s) - u_n(s) \rangle_V \\
& \quad + \langle A(u(s) - u_n(s)), u(s) - p_n(s) \rangle_V \Big] ds.
\end{aligned}$$

Uwaga 3.2 implikuje nierówność

$$\langle A(u(s) - u_n(s)), u(s) - u_n(s) \rangle_V \geq 0. \quad (3.45)$$

Korzystając z (3.44) i (3.45) i nierówności Schwarza, mamy ciąg nierówności

$$\begin{aligned}
& \|u_n(t) - p_n(t)\|_H^2 \leq \|u_{n0} - p_n(0)\|_H^2 \quad (3.46) \\
& + 2 \int_0^t \Big[\langle u'(s) - p'_n(s), u_n(s) - p_n(s) \rangle_V + \langle A(u(s) - u_n(s)), u(s) - p_n(s) \rangle_V \Big] ds \\
& \leq \|u_{n0} - p_n(0)\|_H^2 \\
& + 2 \int_0^t \|u'(s) - p'_n(s)\|_{V^*} \|u_n(s) - p_n(s)\|_V ds \\
& + 2 \int_0^t \|A(u(s) - u_n(s))\|_{V^*} \|u(s) - p_n(s)\|_V ds \\
& \leq \|u_{n0} - p_n(0)\|_H^2 \\
& + 2 \|u' - p'_n\|_{L^2(0,T;V^*)} \|u_n - p_n\|_{L^2(0,T;V)} + 2 \|Au - Au_n\|_{L^2(0,T;V^*)} \|u - p_n\|_{L^2(0,T;V)} \\
& \leq \|u_{n0} - p_n(0)\|_H^2 \\
& + 2 \|u' - p'_n\|_{L^2(0,T;V^*)} \left(\|u_n\|_{L^2(0,T;V)} + \|p_n\|_{L^2(0,T;V)} \right) \\
& + 2 \|u - p_n\|_{L^2(0,T;V)} \left(\|Au\|_{L^2(0,T;V^*)} + \|Au_n\|_{L^2(0,T;V^*)} \right).
\end{aligned}$$

Ze słabej zbieżności $u_n \rightharpoonup u$ w $L^2(0, T; V)$ i twierdzenia 1.48 wynika, że ciąg u_n jest ograniczony w $L^2(0, T; V)$, zaś na podstawie silnej zbieżności $p_n \rightarrow u$

w $W^{1,2}(0, T; V, H)$ stwierdzamy, że ciąg p_n jest ograniczony w $L^2(0, T; V)$. Ponadto ciąg $A \circ u_n$ jest ograniczony w przestrzeni $L^2(0, T; V^*)$, gdyż

$$\begin{aligned} \|Au_n(t)\|_{V^*} &\leq \|A\|_{L(V, V^*)} \|u_n(t)\|_V, \\ \int_0^t \|Au_n(s)\|_{V^*}^2 ds &\leq \|A\|_{L(V, V^*)}^2 \int_0^t \|u_n(s)\|_V^2 ds, \\ \|A \circ u_n\|_{L^2(0, T; V^*)} &\leq \|A\|_{L(V, V^*)} \|u_n\|_{L^2(0, T; V)} \end{aligned}$$

na podstawie uwagi 3.2 i (3.18). Zatem korzystając z (3.46), nierówności trójkąta oraz ograniczoności ciągów $u_n, p_n, A \circ u_n$, możemy napisać

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - p_n(t)\|_H^2 &\leq \|u_{n0} - p_n(0)\|_H^2 + C\|u - p_n\|_{W^{1,2}(0, T; V, H)} \\ &\leq 2\left(\|u_{n0} - u_0\|_H^2 + \|u_0 - p_n(0)\|_H^2\right) + C\|u - p_n\|_{W^{1,2}(0, T; V, H)} \end{aligned}$$

i w efekcie

$$\|u_n - p_n\|_{C([0, T], H)}^2 \leq 2\left(\|u_{n0} - u_0\|_H^2 + \|u_0 - p_n(0)\|_H^2\right) + C\|u - p_n\|_{W^{1,2}(0, T; V, H)} \rightarrow 0,$$

gdyż $u_{n0} \rightarrow u_0$ w H z założenia oraz

$$\|u_0 - p_n(0)\|_H \leq \|u - p_n\|_{C([0, T], H)} \rightarrow 0,$$

$$\|u - p_n\|_{W^{1,2}(0, T; V, H)} \rightarrow 0$$

na podstawie (3.42). W ten sposób udowodniliśmy wzór (3.43).

Nierówność trójkąta oraz wzory (3.42), (3.43) implikują

$$\|u_n - u\|_{C([0, T], H)} \leq \|u_n - p_n\|_{C([0, T], H)} + \|p_n - u\|_{C([0, T], H)} \rightarrow 0,$$

co kończy dowód związku (3.40).

Pozostało udowodnić podpunkt b) punktu (iv), a więc silną zbieżność metody Galerkiną w $L^2(0, T; V)$, tzn. że $u_n \rightarrow u$ w $L^2(0, T; V)$.

Słaba zbieżność $u_n \rightharpoonup u$ w $L^2(0, T; V)$, gdy $n \rightarrow \infty$ implikuje

$$A \circ u_n \rightharpoonup A \circ u \quad \text{w} \quad L^2(0, T; V). \quad (3.47)$$

Ponieważ $A : L^2(0, T; V) \rightarrow L^2(0, T; V^*)$ jest liniowe i ciągłe, więc:

$$\int_0^T \langle Au_n(t), u(t) \rangle_V dt \rightarrow \int_0^T \langle Au(t), u(t) \rangle_V dt, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.48)$$

$$\int_0^T \langle b(t), u_n(t) \rangle_V dt \rightarrow \int_0^T \langle b(t), u(t) \rangle_V dt, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.49)$$

Korzystając z (3.47), (3.48) i (3.49), możemy napisać, że

$$\begin{aligned} &\int_0^T \langle b(t) - Au_n(t), u(t) \rangle_V + \langle b(t) - Au(t), u_n(t) \rangle_V dt \\ &= \int_0^T (\langle b(t), u(t) \rangle_V - \langle Au_n(t), u(t) \rangle_V + \langle b(t), u_n(t) \rangle_V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \langle Au(t), u_n(t) \rangle_V dt \\
& \rightarrow 2 \int_0^T \langle b(t), u(t) \rangle_V - \langle Au(t), u(t) \rangle_V dt \\
& = 2 \int_0^T \langle b(t) - Au(t), u(t) \rangle_V dt.
\end{aligned}$$

Wiemy z już udowodnionego punktu (iv) a), że $u \in C([0, T], H)$. A stąd

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \langle b(t) - Au_n(t), u(t) \rangle_V + \langle b(t) - Au(t), u_n(t) \rangle_V dt - (u_n(T), u(T))_H + (u_{n0}, u_0)_H \\
& \rightarrow 2 \int_0^T \langle b(t) - Au(t), u(t) \rangle_V dt - \|u(T)\|_H^2 + \|u_0\|_H^2.
\end{aligned}$$

Z faktu, że $u'(t) = b(t) - Au(t)$ i z twierdzenia 1.47 o całkowaniu przez części wynika, że

$$2 \int_0^T \langle b(t) - Au(t), u(t) \rangle_V dt - \|u(T)\|_H^2 + \|u_0\|_H^2 = 0. \quad (3.50)$$

Stosując twierdzenie 1.47 o całkowaniu przez części do funkcji $u - u_n$ i $u - u_n$ oraz u_n i u , odpowiednio, otrzymujemy następujące zależności

$$\begin{aligned}
& \|u(T) - u_n(T)\|_H^2 - \|u_0 - u_{n0}\|_H^2 \\
& = 2 \int_0^T \langle u'(t) - u'_n(t), u(t) - u_n(t) \rangle_V dt \\
& = 2 \int_0^T \langle b(t) - Au(t) - u'_n(t), u(t) - u_n(t) \rangle_V dt
\end{aligned} \quad (3.51)$$

oraz

$$\begin{aligned}
& (u_n(T), u(T))_H - (u_{n0}, u_0)_H = \int_0^T \langle u'_n(t), u(t) \rangle_V + \langle u'(t), u_n(t) \rangle_V dt \\
& = \int_0^T \langle u'_n(t), u \rangle_V + \langle b(t) - Au(t), u_n(t) \rangle_V dt.
\end{aligned} \quad (3.52)$$

Ponadto z silnie dodatniej określoności formy a mamy

$$\langle A(u(t) - u_n(t)), u(t) - u_n(t) \rangle_V = a(u(t) - u_n(t), u(t) - u_n(t)) \geq c \|u - u_n\|_V^2. \quad (3.53)$$

Tożsamość (3.53) implikuje

$$\begin{aligned}
& c \|u - u_n\|_{L^2(0, T; V)}^2 = c \int_0^T \|u(t) - u_n(t)\|_V^2 dt \\
& \leq \int_0^T \langle A(u(t) - u_n(t)), u(t) - u_n(t) \rangle_V dt \\
& \leq \int_0^T \langle A(u(t) - u_n(t)), u(t) - u_n(t) \rangle_V dt + 2^{-1} \|u(T) - u_n(T)\|_H^2.
\end{aligned}$$

Obliczamy $\|u(T) - u_n(T)\|_H^2$ ze wzoru (3.51), wstawiamy do powyższej nierówności i otrzymujemy

$$c \|u - u_n\|_{L^2(0, T; V)}^2 \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^T \langle A(u(t) - u_n(t)), u(t) - u_n(t) \rangle_V dt + 2^{-1} \|u_0 - u_{n0}\|_H^2 \\
&\quad + \int_0^T \langle b(t) - Au(t) - u'_n(t), u(t) - u_n(t) \rangle_V dt \\
&= 2^{-1} \|u_0 - u_{n0}\|_H^2 + \int_0^T \langle b(t) - Au_n(t) - u'_n(t), u(t) - u_n(t) \rangle_V dt \\
&= 2^{-1} \|u_0 - u_{n0}\|_H^2 + \int_0^T \langle b(t) - Au_n(t) - u'_n(t), u(t) \rangle_V dt \\
&\quad - \int_0^T \langle b(t) - Au_n(t) - u'_n(t), u_n(t) \rangle_V dt \\
&= 2^{-1} \|u_0 - u_{n0}\|_H^2 + \int_0^T \langle b(t) - Au_n(t) - u'_n(t), u(t) \rangle_V dt \\
&\quad - \int_0^T \langle 0, u_n(t) \rangle_V dt \\
&= 2^{-1} \|u_0 - u_{n0}\|_H^2 + \int_0^T \langle b(t) - Au_n(t) - u'_n(t), u(t) \rangle_V dt.
\end{aligned}$$

Dalej korzystając z (3.54), (3.52) i (3.50), wnioskujemy, że

$$\begin{aligned}
c \|u - u_n\|_{L^2(0,T;V)}^2 &\leq 2^{-1} \|u_0 - u_{n0}\|_H^2 + \int_0^T \langle b(t) - Au_n(t), u(t) \rangle_V dt \\
&\quad - \int_0^T \langle u'_n(t), u(t) \rangle_V dt \\
&= 2^{-1} \|u_0 - u_{n0}\|_H^2 + \int_0^T \langle b(t) - Au_n(t), u(t) \rangle_V dt \\
&\quad + \int_0^T \langle b(t) - Au(t), u_n(t) \rangle_V dt - (u_n(T), u(T))_H + (u_{n0}, u_0)_H \\
&= 2^{-1} \|u_0 - u_{n0}\|_H^2 + \int_0^T (\langle b(t) - Au_n(t), u(t) \rangle_V \\
&\quad + \langle b(t) - Au(t), u_n(t) \rangle_V) dt - (u_n(T), u(T))_H + (u_{n0}, u_0)_H \\
&\rightarrow 2 \int_0^T \langle b(t) - Au(t), u(t) \rangle_V dt - \|u(T)\|_H^2 + \|u_0\|_H^2 = 0.
\end{aligned}$$

A stąd

$$\|u - u_n\|_{L^2(0,T;V)}^2 \rightarrow 0,$$

gdyż $c > 0$. W ten sposób dowód twierdzenia został zakończony. $\square$

Uwaga 3.5. W dowodzie twierdzenia 3.4 rozwiązanie u Problemu **P** jest słabą granicą pewnego podciągu u_{n_k} ciągu u_n (zobacz 3.20). Rozważmy teraz dowolny podciąg u_{n_l} ciągu u_n słabo zbieżny do $\bar{u}$ w przestrzeni $L^2(0, T; V)$. Powtarzając rozumowanie z dowodu tegoż twierdzenia, wnioskujemy, że $\bar{u}$ również jest rozwiązaniem Problemu **P**. Z jednoznaczności rozwiązania Problemu **P** wynika, że $u = \bar{u}$. Twierdzenie 1.49 implikuje, że

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{w} \quad L^2(0, T; V). \quad (3.55)$$

Fakt ten jest ważny ze względu na obliczenia numeryczne.

Istnienie, jednoznaczność i własności rozwiązań równania ciepła z warunkiem Dirichleta

W tym rozdziale udowodnimy istnienie, jednoznaczność i własności słabych rozwiązań w przestrzeniach Sobolewa równania przewodnictwa cieplnego z warunkiem początkowym i warunkiem brzegowym typu Dirichleta. Dowody przeprowadzimy w oparciu o twierdzenie 3.4. Problem rozważamy w przypadku wielowymiarowym, tj. w obszarze $Q = G \times [0, T]$, gdzie $G \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$ jest obszarem z brzegiem ∂G lipschitzowskim. Zaprezentujemy też wyniki eksperymentów numerycznych.

4.1. Istnienie, jednoznaczność i własności rozwiązań

Przyjmijmy, że $V = H_0^1(G)$, $H = L^2(G)$. W przestrzeni V wprowadzamy normę

$$\|v\|_V = \left(\int_G \sum_{i=1}^N |D_i u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad v \in V$$

(zobacz twierdzenie 1.56). Niech $f \in L^2(Q)$ i $u_0 \in H$ będą zadane. Rozważmy równanie ciepła z warunkiem początkowym i warunkiem brzegowym Dirichleta

$$\begin{cases} u_t(x, t) = \Delta u(x, t) + f(x, t), & (x, t) \in Q, \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial G \times [0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in G. \end{cases} \quad (4.1)$$

Rozumując analogicznie jak w przypadku jednowymiarowym w rozdziale 2, otrzymujemy równanie wariacyjne

$$\frac{d}{dt}(u(t), v)_H + \int_G \sum_{i=1}^N D_i u(x, t) D_i v(x) dx = \int_G f(x, t) v(x) dx, \quad v \in V \quad (4.2)$$

dla p.w. $t \in (0, T)$ z warunkiem początkowym

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in G. \quad (4.3)$$

Szukamy rozwiązania $u \in W^{1,2}(0, T; V, H)$ problemu (4.2), (4.3).

Twierdzenie 4.1. *Problem wariacyjny (4.2), (4.3) ma dokładnie jedno rozwiązanie $u \in W^{1,2}(0, T; V, H)$. Ponadto*

(i) istnieje stała $D > 0$ taka, że

$$\|u\|_{W^{1,2}(0,T;V,H)} \leq D(\|u_0\|_H + \|b\|_{L^2(0,T;V^*)}), \quad (4.4)$$

gdzie

$$\langle b(t), v \rangle_V = \int_G f(x, t) v(x) dx, \quad v \in V \quad (4.5)$$

dla p.w. $t \in (0, T)$,

(ii) $u \in C([0, T], H)$.

Dowód. Tezę twierdzenia udowodnimy, korzystając z twierdzenia 3.4. Z twierdzenia 1.55 wnioskujemy, że założenie (Z_1) twierdzenia 3.4 jest spełnione.

Definiujemy formę $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$a(u, v) = \int_G \sum_{i=1}^N D_i u(x) D_i v(x) dx, \quad u, v \in V. \quad (4.6)$$

Sprawdźmy teraz, że forma a jest dwuliniowa, ograniczona, symetryczna i silnie dodatnia. Symetria wynika wprost z definicji (4.6):

$$a(u, v) = \int_G \sum_{i=1}^N D_i u(x) D_i v(x) dx = \int_G \sum_{i=1}^N D_i v(x) D_i u(x) dx = a(v, u), \quad u, v \in V.$$

Ponieważ a jest symetryczna, więc wystarczy pokazać liniowość względem na przykład pierwszej zmiennej. Ustalmy dowolne $u, v, w \in V$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. Obliczamy:

$$\begin{aligned} a(u + w, v) &= \int_G \sum_{i=1}^N D_i(u + w)(x) D_i v(x) dx = \int_G \sum_{i=1}^N (D_i u(x) + D_i w(x)) D_i v(x) dx \\ &= \int_G \sum_{i=1}^N D_i u(x) D_i v(x) dx + \int_G \sum_{i=1}^N D_i w(x) D_i v(x) dx = a(u, v) + a(w, v), \\ a(\alpha u, v) &= \int_G \sum_{i=1}^N D_i(\alpha u)(x) D_i v(x) dx = \int_G \sum_{i=1}^N \alpha D_i u(x) D_i v(x) dx \\ &= \int_G \alpha \sum_{i=1}^N D_i u(x) D_i v(x) dx = \alpha \int_G \sum_{i=1}^N D_i u(x) D_i v(x) dx = \alpha a(u, v). \end{aligned}$$

Zatem a jest dwuliniowa. Następnie sprawdzamy, że a jest ograniczona. Z własności całek wynikają nierówności

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_G \sum_{i=1}^N D_i u(x) D_i v(x) dx \right| \leq \int_G \left| \sum_{i=1}^N D_i u(x) D_i v(x) \right| dx \\ &\leq \sum_{i=1}^N \int_G |D_i u(x) D_i v(x)| dx, \quad u, v \in V. \end{aligned}$$

Następnie korzystając z nierówności Höldera dla całek i nierówności Schwarz'a (zobacz lematy 1.52, 1.51) zastosowanej do przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^N$, mamy

$$\sum_{i=1}^N \int_G |D_i u(x) D_i v(x)| dx \leq \sum_{i=1}^N \left(\int_G |D_i u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_G |D_i v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^N \int_G |D_i u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^N \int_G |D_i v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|u\|_V \|v\|_V, \quad u, v \in V.$$

Zatem

$$|a(u, v)| \leq \|u\|_V \|v\|_V, \quad u, v \in V.$$

Pozostało wykazać silną dodatniość formy a . Własność ta wynika wprost z definicji (4.6):

$$a(u, u) = \int_G \sum_{i=1}^N |D_i u(x)|^2 dx = \|u\|_V^2, \quad u \in V.$$

Kładziemy więc $c = 1$ w definicji (3.3).

Pokażemy teraz, że $b \in L^2(0, T; V^*)$. Przekształcenie $b(t)$ dla p.w. $t \in (0, T)$ jest liniowe oraz ograniczone. Liniowość wynika z liniowości całki. Ograniczoność zaś wykazujemy, korzystając z nierówności Schwarz'a,

$$| \langle b(t), v \rangle_V | = \left| \int_G f(x, t) v(x) dx \right|$$

$$\leq \|f(t)\|_H \|v\|_H \leq C \|f(t)\|_H \|v\|_V, \quad v \in V$$

dla p.w. $t \in (0, T)$, gdzie $C \geq 0$ jest pewną stałą. A stąd dla p.w. $t \in (0, T)$

$$\|b(t)\|_{V^*} \leq C \|f(t)\|_H,$$

co implikuje oszacowanie

$$\int_0^T \|b(t)\|_{V^*}^2 dt \leq \int_0^T C \|f(t)\|_H^2 dt \leq C \|f\|_{L^2(Q)}^2 < \infty,$$

gdyż $f \in L^2(Q)$. A zatem $b \in L^2(0, T; V^*)$. Czyli założenie (Z_2) również zachodzi. Teza twierdzenia 4.1 wynika wprost z twierdzenia 3.4. $\square$

4.2. Eksperymenty numeryczne

W tym rozdziale przedstawimy obliczenia numeryczne dla problemu początkowo-brzegowego (4.1). Niech $G = (0, 1)$ i $T = 1$. Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami $Q = (0, 1) \times [0, 1]$. Połóżmy

$$f(x, t) = 2tx^2 - 2tx - 2t^2,$$

$$u_0(x) = 0.$$

Nietrudno sprawdzić, że funkcja $u(t, x) = t^2 x(x - 1)$ jest analitycznym rozwiązaniem (4.1).

Do przybliżonego rozwiązania problemu (4.1) wykorzystamy metodę Galerki opisaną w rozdziale 3. Niech $n \in \mathbb{N}$ będzie dowolnie ustalone i zdefiniujmy węzły

$$x_j = jh, \quad j = 0, \dots, n+1,$$

gdzie $h = \frac{1}{n+1}$ jest krokiem przestrzennym. Definiujemy funkcje

$$w_j(x) = \begin{cases} (n+1)\left(x - \frac{j-1}{n+1}\right), & x \in [x_{j-1}, x_j], \\ -(n+1)\left(x - \frac{j+1}{n+1}\right), & x \in [x_j, x_{j+1}], \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus [x_{j-1}, x_{j+1}], \end{cases} \quad (4.7)$$

$j = 1, \dots, n$. Funkcje w_j są sklejeniem funkcji afinicznych, które wyznacza się metodą interpolacji Lagrange'a. Układ $\{w_1, w_2, \dots\}$ jest bazą Schaudera przestrzeni V .

W celu przeprowadzenia obliczeń numerycznych wyznaczmy teraz macierze W_n i A_n oraz funkcje d_{jn} i stałe α_{jn} w problemie różniczkowym (3.7), (3.8) generowanym przez problem (4.1). Dla uproszczenia przyjmijmy, że

$$x_{j+\frac{1}{2}} = \frac{j + \frac{1}{2}}{n+1}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Obliczamy:

$$\begin{aligned} (w_j, w_j)_H &= \int_0^1 w_j^2(x) dx \\ &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} (n+1)^2 \left(x - \frac{j-1}{n+1}\right)^2 dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} [-(n+1)]^2 \left(x - \frac{j+1}{n+1}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{3}(n+1)^2 \left(x - \frac{j-1}{n+1}\right)^3 \Big|_{x_{j-1}}^{x_j} + \frac{1}{3}(n+1)^2 \left(x - \frac{j+1}{n+1}\right)^3 \Big|_{x_j}^{x_{j+1}} \\ &= \frac{1}{3}(n+1)^2 \cdot \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{3}(n+1)^2 \cdot \frac{1}{(n+1)^3} \\ &= \frac{2}{3(n+1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (w_{j+1}, w_j)_H &= \int_0^1 w_{j+1}(x) w_j(x) dx \\ &= - \int_{x_j}^{x_{j+\frac{1}{2}}} (n+1)^2 \left(x - \frac{j}{n+1}\right) \left(x - \frac{j+1}{n+1}\right) dx \\ &\quad - \int_{x_{j+\frac{1}{2}}}^{x_{j+1}} (n+1)^2 \left(x - \frac{j}{n+1}\right) \left(x - \frac{j+1}{n+1}\right) dx \\ &= -(n+1)^2 \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2j+1}{n+1}x^2 + \frac{j(j+1)}{(n+1)^2}x \right] \Big|_{x_j}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \\ &\quad - (n+1)^2 \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2j+1}{n+1}x^2 + \frac{j(j+1)}{(n+1)^2}x \right] \Big|_{x_{j+\frac{1}{2}}}^{x_{j+1}} \\ &= -(n+1)^2 \left[\frac{1}{3} \left(\frac{j+\frac{1}{2}}{n+1}\right)^3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2j+1}{n+1} \left(\frac{j+\frac{1}{2}}{n+1}\right)^2 + \frac{j(j+1)}{(n+1)^2} \cdot \frac{j+\frac{1}{2}}{n+1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \left(\frac{j}{n+1}\right)^3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2j+1}{n+1} \left(\frac{j}{n+1}\right)^2 - \frac{j(j+1)}{(n+1)^2} \cdot \frac{j}{n+1} \right] \\ &\quad - (n+1)^2 \left[\frac{1}{3} \left(\frac{j+1}{n+1}\right)^3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2j+1}{n+1} \left(\frac{j+1}{n+1}\right)^2 + \frac{j(j+1)}{(n+1)^2} \cdot \frac{j+1}{n+1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \left(\frac{j+\frac{1}{2}}{n+1}\right)^3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2j+1}{n+1} \left(\frac{j+\frac{1}{2}}{n+1}\right)^2 - \frac{j(j+1)}{(n+1)^2} \cdot \frac{j+\frac{1}{2}}{n+1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{3}\left(\frac{j+\frac{1}{2}}{n+1}\right)^3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2j+1}{n+1} \left(\frac{j+\frac{1}{2}}{n+1}\right)^2 - \frac{j(j+1)}{(n+1)^2} \cdot \frac{j+\frac{1}{2}}{n+1} \Big] \\
= & -(n+1)^2 \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{3j^2+3j+1}{(n+1)^3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(2j+1)^2}{(n+1)^3} + \frac{j(j+1)}{(n+1)^3} \right] \\
= & -\frac{1}{6(n+1)} [2(3j^2+3j+1) - 3(2j+1)^2 + 6j(j+1)] \\
= & \frac{1}{6(n+1)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a(w_j, w_j) &= \int_0^1 (D_1 w_j(x))^2 dx \\
&= \int_{x_{j-1}}^{x_j} (n+1)^2 dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} [-(n+1)]^2 dx \\
&= 2(n+1)^2 \cdot \frac{1}{n+1} \\
&= 2(n+1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a(w_{j+1}, w_j) &= \int_0^1 D_1 w_{j+1}(x) D_1 w_j(x) dx \\
&= -\int_{x_j}^{x_{j+\frac{1}{2}}} (n+1)^2 dx - \int_{x_{j+\frac{1}{2}}}^{x_{j+1}} (n+1)^2 dx \\
&= -2(n+1)^2 \cdot \frac{1}{2(n+1)} \\
&= -(n+1),
\end{aligned}$$

$j = 1, \dots, n$. A stąd:

$$W_n = \begin{bmatrix} \frac{2}{3(n+1)} & \frac{1}{6(n+1)} & & & \\ \frac{1}{6(n+1)} & \frac{2}{3(n+1)} & \frac{1}{6(n+1)} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{6(n+1)} & \frac{2}{3(n+1)} & \frac{1}{6(n+1)} \\ & & & \frac{1}{6(n+1)} & \frac{2}{3(n+1)} \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

$$A_n = \begin{bmatrix} 2(n+1) & -(n+1) & & & \\ -(n+1) & 2(n+1) & -(n+1) & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -(n+1) & 2(n+1) & -(n+1) \\ & & & & -(n+1) & 2(n+1) \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Ponadto:

$$\begin{aligned}
d_{jn}(t) &= \int_0^1 (2tx^2 - 2tx - 2t^2)w_j(x)dx \\
&= \int_{x_{j-1}}^{x_j} (2tx^2 - 2tx - 2t^2)(n+1)\left(x - \frac{j-1}{n+1}\right)dx \\
&\quad - \int_{x_j}^{x_{j+1}} (2tx^2 - 2tx - 2t^2)(n+1)\left(x - \frac{j+1}{n+1}\right)dx \\
&= (n+1)\left[2\left(\frac{2}{4}tx_j^4 - \frac{2}{3}tx_j^3 - \frac{2}{2}t^2x_j^2\right) \right. \\
&\quad - \left(\frac{2}{4}tx_{j-1}^4 - \frac{2}{3}tx_{j-1}^3 - \frac{2}{2}t^2x_{j-1}^2\right) - \left(\frac{2}{4}tx_{j+1}^4 - \frac{2}{3}tx_{j+1}^3 - \frac{2}{2}t^2x_{j+1}^2\right) \\
&\quad - x_{j-1}\left(\frac{2}{3}tx_j^3 - \frac{2}{2}tx_j^2 - 2t^2x_j\right) + x_{j-1}\left(\frac{2}{3}tx_{j-1}^3 - \frac{2}{2}tx_{j-1}^2 - 2t^2x_{j-1}\right) \\
&\quad \left. + x_{j+1}\left(\frac{2}{3}tx_{j+1}^3 - \frac{2}{2}tx_{j+1}^2 - 2t^2x_{j+1}\right) - x_{j+1}\left(\frac{2}{3}tx_j^3 - \frac{2}{2}tx_j^2 - 2t^2x_j\right)\right], \\
\alpha_{jn} &= 0,
\end{aligned} \tag{4.10}$$

$j = 1, \dots, n$.

Problem początkowy (3.7), (3.8) z wyznaczonymi powyżej W_n , A_n , d_{jn} , α_{jn} rozwiązujemy przy pomocy jawnej metody różnicowej Eulera. Niech $m \in \mathbb{N}$ będzie dowolnie ustalone i zdefiniujmy węzły

$$t_l = lk, \quad l = 0, \dots, m+1,$$

gdzie $k = \frac{1}{m+1}$ jest krokiem czasowym. Oznaczmy jeszcze przez ε_{max} , ε_{arytm} maksimum i średnią arytmetyczną modułów błędów w chwili t_l , w węzłach x_j odpowiednio. W tablicy 1 podajemy wartości ε_{max} , ε_{arytm} dla $h = 10^{-1}$ i $k = 10^{-3}$.

t_l	ε_{max}	ε_{arytm}
0.1	4.86×10^{-5}	3.01×10^{-5}
0.2	1.24×10^{-4}	7.59×10^{-5}
0.3	2.10×10^{-4}	1.27×10^{-4}
0.4	2.99×10^{-4}	1.81×10^{-4}
0.5	3.90×10^{-4}	2.35×10^{-4}
0.6	4.81×10^{-4}	2.90×10^{-4}
0.7	5.73×10^{-4}	3.45×10^{-4}
0.8	6.65×10^{-4}	4.00×10^{-4}
0.9	7.56×10^{-4}	4.55×10^{-4}
1.0	8.48×10^{-4}	5.10×10^{-4}

Tablica 1. Błędy metody numerycznej.

Spis symboli i oznaczeń

$\mathbb{R}, \mathbb{N}$	- zbiory liczb rzeczywistych i naturalnych
$\mathbb{R}^N$	- iloczyn kartezjański N zbiorów $\mathbb{R}$
$C^1(G)$	- przestrzeń funkcji różniczkowalnych z pierwszymi pochodnymi cząstkowymi ciągłymi
$C^\infty(G)$	- przestrzeń funkcji różniczkowalnych nieskończenie wiele razy w sposób ciągły
$C_0^\infty(G)$	- przestrzeń funkcji $C^\infty(G)$ o nośniku zwartym w G
$L^p(G)$	- przestrzeń funkcji całkowalnych z p -tą potęgą
V	- refleksywna ośrodkowa przestrzeń Banacha
V^*	- przestrzeń dualna do przestrzeni V
H	- ośrodkowa przestrzeń Hilberta
F_1, F_2, G_1, G_2, G_3	- funkcjonały
a, b	- forma dwuliniowa, forma liniowa
W_n, A_n	- macierze kwadratowe $n \times n$
D_i, D_{ij}^2	- pochodne cząstkowe
$D^\alpha u$	- α -ta słaba pochodna Sobolewa
$(\cdot, \cdot)_H$	- iloczyn skalarny
$\langle \cdot, \cdot \rangle_V$	- wartość formy liniowej
$\int_0^T, \int_0^t$	- całki
G, Q	- obszary ograniczone
∂G	- brzeg zbioru G
$W^{1,2}(0, T; V, H), W^{1,2}(G)$	- przestrzenie Sobolewa
$\ \cdot\ _H, \ \cdot\ _V, \ \cdot\ _{L^p(G)}$	- normy
$\ \cdot\ _{W^{1,p}([0,T];V,H)}, \ \cdot\ _{W^{1,p}(G)}$	- normy w przestrzeniach Sobolewa
$\ \cdot\ $	- norma w $\mathbb{R}^n$
$\ \cdot\ $	- norma w przestrzeni macierzy kwadratowych
$\ \cdot\ _*$	- norma liniowej ograniczonej formy
Tu	- ślad
$H^\perp$	- dopełnienie ortogonalne przestrzeni H
$\triangle$	- operator Laplace'a

Bibliografia

- [1] Adams A.A., Fournier J.J.F., *Sobolev Spaces*, Elsevier, Amsterdam 2008.
- [2] Chmielinski J., *Analiza funkcjonalna*, Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej, Kraków 1999.
- [3] Evans L.C., *Równania różniczkowe cząstkowe*, PWN, Warszawa 2002.
- [4] Krzyżański M., *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego*, część I, PWN, Warszawa 1957.
- [5] Marcinkowska H., *Dystrybucje, przestrzenie Sobolewa, równania różniczkowe*, PWN, Warszawa 1993.
- [6] Musielak J., *Wstęp do analizy funkcjonalnej*, PWN, Warszawa 1976.
- [7] Zeidler E., *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, II A: *Linear monotone operators*, Springer, New York 1990.
- [8] Zeidler E., *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, II B: *Nolinear monotone operators*, Springer, New York 1990.
- [9] Ziemer W.P., *Weakly Differentiable Functions*, Springer, New York 1989.
- [10] Sapa L., Bożek B., Danielewski M., *Existence, uniqueness and properties of global weak solutions to interdiffusion with Vegard rule*, ukaże się w Topological Methods in Nonlinear Analysis.