

Wydział Energetyki i Paliw AGH, Technologia Chemiczna

Zadania z MATEMATYKI

ZESTAW 1

Logika, indukcja matematyczna

1. Wykazać, że następujące formuły są tautologiami:

- a) $(p \vee q) \iff (q \vee p)$ - prawo przemienności alternatywy,
- b) $(p \wedge q) \iff (q \wedge p)$ - prawo przemienności koniunkcji,
- c) $[(p \vee q) \vee r] \iff [p \vee (q \vee r)]$ - prawo łączności alternatywy,
- d) $[(p \wedge q) \wedge r] \iff [p \wedge (q \wedge r)]$ - prawo łączności koniunkcji,
- e) $[(p \wedge q) \vee r] \iff [(p \vee r) \wedge (q \vee r)]$ - prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji,
- f) $[(p \vee q) \wedge r] \iff [(p \wedge r) \vee (q \wedge r)]$ - prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy,
- g) $(p \iff \sim q) \implies (\sim p \implies q)$.

2. Sprawdzić, czy poniższa formuła jest tautologią

$$[(p \vee q) \wedge (p \implies q)] \implies (q \implies p).$$

3. Zaprzeczyć zdaniom logicznym:

- a) Anka jest ładna lub Baśka nie jest biedna,
- b) $4 > 2 \wedge 7 \leq 5$,
- c) Jeśli będę miał pieniądze to pójdę do kina,
- d) $\forall x \in \mathbf{R} \exists y \in \mathbf{R} \exists z \in \mathbf{Z} x = y \implies x + y + z > 1$,
- e) $\forall x \in \mathbf{R} \forall y \in \mathbf{N} (x > 0 \vee y \leq 0) \implies x + y = 3$.

4. Czy poniższe zdania są zdaniami logicznymi? Jeśli tak to zapisać je przy pomocy kwantyfikatorów:

- a) Każda liczba naturalna jest większa od zera,
- b) Żadna liczba naturalna nie jest mniejsza od zera,
- c) Istnieje taka liczba naturalna, od której żadna inna liczba naturalna nie jest mniejsza,
- d) Czy Ala ma kota?

5. Stosując zasadę indukcji matematycznej, udowodnić:

- a) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \in \mathbf{N}$,
- b) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in \mathbf{N}$,
- c) $n! > 2^{n-1}$, $n > 2$,
- d) $2^n n! < n^n$, $n > 5$,
- e) Dla dowolnego $n \in \mathbf{N}$ liczba $13^n - 7$ jest podzielna przez 6,

- f) $(1+a)^n \geq 1+na$ - nierówność Bernoulliego, a jest dowolnie ustaloną liczbą rzeczywistą, $a > -1$, $n \in \mathbf{N}$ (udowodnić tę nierówność również dla $a \in [-2, -1]$).

Rachunek zbiorów, dziedzina funkcji

1. Udowodnić następujące równości zbiorów:

- a) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ - prawo rozdzielności iloczynu względem sumy,
- b) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ - prawo rozdzielności różnicy względem sumy,
- c) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ - prawo rozdzielności różnicy względem iloczynu,
- d) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

2. Sprawdzić, czy prawdziwe są równości:

- a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$,
- b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
- c) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$.

3. Dane są zbiory $A = \{-1, 5, 7, 10, 15\}$ i $B = \{2, 5, 8, 11, 15\}$. Wyznaczyć: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \times B$, $B \times A$.

4. Podać interpretację geometryczną zbiorów $A \times B$, $B \times A$, gdzie $A = \{a \in \mathbf{R} : -1 \leq a \leq 3\}$, $B = \{b \in \mathbf{R} : 0 \leq b < 2\}$.

5. Uzasadnić, że podane liczby są niewymierne: $\sqrt{5}$, $\sqrt{2} - \sqrt{3}$, $\log_2 3$.

6. Wyznaczyć dziedziny naturalne funkcji:

- a) $f(x) = \frac{5x+3}{1-|x|} + \sqrt{-2x^2 + x + 1}$,
- b) $f(x) = \frac{x^2-x-1}{\sqrt{2|x|-6}} - \sqrt{x^2 + 3x - 4}$,
- c) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{\left|\frac{x-3}{x+4}\right|-2}} + \frac{x^2+2x+1}{\left|\frac{x}{x+5}\right|-1}$,
- d) $f(x) = \sqrt{3 - \left|\frac{x+2}{x-1}\right|} - \frac{x-2}{\sqrt{|x-1|-4}}$,
- e) $f(x) = \frac{2x-5}{4x-2^{x+1}-3}$,
- f) $f(x) = \log \log_{\frac{1}{3}}(\sin 2x) + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{\cos x}}$,
- g) $f(x) = \sqrt{x^4 - 5x^2 + 6}$.