

**Wydział Energetyki i Paliw AGH, Technologia Chemiczna**  
**Zadania z MATEMATYKI**  
**ZESTAW 2**

Dziedzina funkcji, cd.

1. Wyznaczyć dziedziny naturalne funkcji:

a)  $f(x) = \frac{1}{x^2-4} + \frac{2}{x^2+3} - \sqrt{2 - \frac{1}{|x|}},$

b)  $f(x) = \sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\cos x},$

c)  $f(x) = \sqrt[4]{\sin^2 x + \cos x + 1},$

d)  $f(x) = \frac{1}{\sin \sqrt{\pi^2 - x^2}},$

e)  $f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{2-x}} + \log[1 - \log(x^2 - 5x + 16)],$

f)  $f(x) = \log \frac{2+x}{2-x} + \sqrt{2 - \left| \frac{5x-3}{2x+7} \right|},$

g)  $f(x) = \log \frac{\sqrt{x^2-1}-2}{x} + \frac{2x-5}{\sqrt{4x-2x+1-8}},$

h)  $f(x) = \sqrt{\log_3(4^x - 2)} + \sqrt{8^x - 2^x},$

i)  $f(x) = \log_{x-3} \left( -\log \frac{2^x-4}{2^x-1} \right),$

j)  $f(x) = \frac{x+1}{\log_3 x + \log_2 x^2},$

k)  $f(x) = \sin \arccos x^2 + \sqrt{\operatorname{arctg}(2x - 5)},$

l)  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2},$

m)  $f(x) = \sqrt{\arcsin(3x - 1) - \frac{\pi}{6}},$

n)  $f(x) = \sqrt{1 - \log_{\frac{\pi}{6}} \left( \arcsin(2x - 1) - \frac{\pi}{6} \right)},$

o)  $f(x) = \log_2 \left( \arccos(2x + 1) - \frac{\pi}{3} \right).$

Okresowość, parzystość, nieparzystość, ograniczoność,  
monotoniczność, iniekcja, suriekcja, bijekcja,  
odwracalność, złożenie funkcji

1. Wyznaczyć, o ile istnieje, okres podstawowy funkcji:

a)  $f(x) = 4,$

b)  $f(x) = \sin 4x,$

c)  $f(x) = \frac{1}{\cos 5x}.$

2. Zbadać parzystość i nieparzystość funkcji:

a)  $f(x) = \frac{x^3}{x^2+4},$

- b)  $f(x) = \frac{x^4}{x^2-1}$ ,  
 c)  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ,  
 d)  $f(x) = \sin x + \cos x$ ,  
 e)  $f(x) = x^{\frac{3^x+1}{3^x-1}}$ ,  
 f)  $f(x) = \log \frac{x-1}{x+1}$ .
3. Wykazać, że funkcja  $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$  jest rosnąca. Wyznaczyć przeciwdziedzinę funkcji  $f$  oraz funkcję odwrotną  $f^{-1}$ . Czy  $f$  jest ograniczona?
4. Dana jest funkcja  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$ ,  $f(x) = x^4$ . Sprawdzić, czy  $f$  jest iniekcją, suriekcją, bijekcją. Wyznaczyć obraz przedziału  $[-1, 1]$  oraz przeciwobraz przedziału  $[16, 81]$ .
5. Dana jest funkcja  $f: \mathbf{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ . Sprawdzić, czy  $f$  jest iniekcją, suriekcją, bijekcją. Wyznaczyć obraz przedziałów  $(1, 2]$ ,  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  i zbioru  $\{2\}$  oraz przeciwobraz przedziałów  $[1, +\infty)$ ,  $[-1, 0]$  i  $(1, 2)$ .
6. Sprawdzić, czy dane funkcje są odwracalne. Jeśli tak, to wyznaczyć funkcje odwrotne:
- a)  $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ ,  
 b)  $f(x) = x^2 - 5x + 6$ ,  $x \leq \frac{5}{2}$ ,  
 c)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 27$ ,  
 d)  $f(x) = 1 - \sqrt{x-4}$ ,  
 e)  $f(x) = \frac{1}{2^x+4}$ ,  
 f)  $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ ,  
 g)  $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ ,  $x \geq 0$ ,  
 h)  $f(x) = \log_3(x+1)$ ,  
 i)  $f(x) = 2 - \log_5 x$ ,  
 j)  $f(x) = \log_2(-\log_3 \frac{2^x-4}{2^x-1})$ ,  
 k)  $f(x) = \arcsin(2x+5)$ .
7. Dane są funkcje  $f(x) = \sqrt{2x-3}$  i  $g(x) = x^2 + x + 4$ . Wyznaczyć złożenia:  $g \circ f$ ,  $f \circ g$ ,  $f \circ f$ ,  $g \circ g$ . Znaleźć dziedziny tych złożzeń.
8. Rozważmy funkcje:
- $$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < 0 \\ x+3, & x \geq 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} -2x+3, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}.$$
- Wyznaczyć złożenia:  $g \circ f$ ,  $f \circ g$ . Znaleźć dziedziny tych złożzeń.