

Wydział Energetyki i Paliw AGH, Technologia Chemiczna
Zadania z MATEMATYKI
ZESTAW 4

Granica funkcji, ciągłość funkcji

1. Obliczyć:

1.1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+4x-5}{x^2-3x+2},$

1.2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+4x-5}{x^2-3x+2},$

1.3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{8-x^3}{x-2},$

1.4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}},$

1.5. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x},$

1.6. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\arcsin x)^2}{1-x},$

1.7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 10x},$

1.8. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x},$

1.9. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x},$

1.10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sin x}{x},$

1.11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x^2}{x^2},$

1.12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^x,$

1.13. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}},$

1.14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x-1}{x^2}.$

2. Zbadać ciągłość funkcji (ewentualnie tylko lewo lub prawostronną):

2.1. $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \in [0, 1] \\ 3-x^2, & x \in (1, 2] \end{cases},$

2.2. $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$

2.3. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$

2.4. $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & |x| \leq 1 \\ |x-1|, & |x| > 1 \end{cases},$

2.5. $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(\frac{1}{x}+1) - \ln \frac{1}{x}}{x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases},$

2.6. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x-1) + 2x^2, & |x| \geq 1 \\ -\frac{\pi}{4}, & x = 0 \end{cases}.$

3. Dobrać parametry a, b, c, d tak, żeby funkcje były ciągłe w swojej dziedzinie (ewentualnie tylko lewo lub prawostronnie):

$$3.1. f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{a^2 - \frac{7}{2}}, & x \in [-1, \infty) \setminus \{0\} \\ x = 0 \end{cases},$$

$$3.2. f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{a^2 x^2}, & x \neq 0 \\ a^2 - \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases},$$

$$3.3. f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq 0 \\ cx^2 + dx, & x \in (0, 1] \\ 1 - \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases},$$

$$3.4. f(x) = \begin{cases} 2 + e^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ \sin \frac{ax}{x}, & x > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (2 + e^{\frac{1}{x}}), & x = 0 \end{cases}.$$

4. Wykazać, korzystając z definicji, że:

$$4.1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x-2} = 5,$$

$$4.2^*. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-2x} = \frac{5}{2}.$$

- 5*. Udowodnić, że funkcja $f(x) = xD(x)$, gdzie D jest funkcją Dirichleta, jest ciągła tylko w punkcie $x_0 = 0$.