

Wydział Energetyki i Paliw AGH, Technologia Chemiczna
Zadania z MATEMATYKI
ZESTAW 5

Pochodna funkcji, interpretacja fizyczna i geometryczna

1. Obliczyć pierwszą pochodną funkcji:

1.1. $f(x) = 4x^7 - 2x^4 + x^3 - 5x + 1,$

1.2. $f(x) = \sqrt[3]{x} - x^5 + 2\sqrt[4]{x^3} - x^{-2},$

1.3. $f(x) = (x+1)^{2010} (x-1)^{2011},$

1.4. $f(x) = \frac{5x+2}{x-4},$

1.5. $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+x+2},$

1.6. $f(x) = \frac{x^2+1}{(x-1)^5(3x+2)^7},$

1.7. $f(x) = \sqrt{3x^2 + x - 2},$

1.8. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}},$

1.9. $f(x) = \cos^2 \sqrt{\frac{1}{x}} + \sin^2 \sqrt{x},$

1.10. $f(x) = \cos^4(x^2 + x) - \sin 2x,$

1.11. $f(x) = \frac{4^x}{x^4} + \ln \sin^2 5x,$

1.12. $f(x) = 2^{\frac{x^2+1}{x^2-1}} - \arcsin \log(2x-1),$

1.13. $f(x) = \log_2(\arccos(x+2) - 1) + 2^{5x-3},$

1.14. $f(x) = \arcsin \sqrt{1-x^2} + \arccos \ln(1+x^2),$

1.15. $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$

1.16. $f(x) = \operatorname{arccctg} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x},$

1.17. $f(x) = \sqrt{\frac{1-\arcsin x}{1+\arccos x}},$

1.18. $f(x) = x^{\sin x},$

1.19. $f(x) = \operatorname{tg} \operatorname{ctg} x^x,$

1.20. $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,$

1.21. $f(x) = (\sin x)^{\cos x},$

1.22. $f(x) = \log_x \ln x,$

1.23. $f(x) = 2^{2^x} + (2^x)^{2^x}.$

2. Korzystając z definicji, zbadać różniczkowalność funkcji (ewentualnie tylko jednostronną):

2.1. $f(x) = x^3,$

2.2. $f(x) = \cos x,$

2.3. $f(x) = |x-1|,$

2.4. $f(x) = \sqrt{2x-x^2}.$

3. Zbadać różniczkowalność funkcji:

$$3.1. f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x+1, & x \in (0, 2) \\ \sqrt{2x^2+1}, & x \geq 2 \end{cases},$$

$$3.2. f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

4. Wykazać, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$, ale jej pierwsza pochodna nie jest w tym punkcie ciągła.

5. Zależność drogi s od czasu t w pewnym ruchu wyraża się wzorem $s(t) = t^2 - 2t - 8$. Wyznaczyć prędkość średnią od chwili $t_1 = 4$ do chwili $t_2 = 4 + h$, a następnie prędkość w chwili $t_1 = 4$. Porównać otrzymane wyniki.

6. Napisać równanie stycznej do krzywej $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ w punkcie $x_0 = 3$.

7. Obliczyć, w jakim punkcie styczna do krzywej $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ jest równoległa do osi $0x$. Czy istnieje punkt, w którym styczna do tej krzywej jest równoległa do osi $0y$?

8. Znaleźć kąt, jaki tworzy styczna do paraboli $y = x^2 - 3x + 8$ w punkcie $x_0 = 0$ z dodatnim kierunkiem osi $0x$.

9*. Pod jakim kątem przecinają się krzywe: $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$?

10*. Udowodnić, że jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 , to

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0).$$

Podać przykład wskazujący, że z istnienia powyższej granicy nie wynika różniczkowalność funkcji f w punkcie x_0 .

11*. Udowodnić, że funkcja $f(x) = x^2 D(x)$, gdzie D jest funkcją Dirichleta, jest różniczkowalna tylko w punkcie $x_0 = 0$.

Reguła de l'Hospitala, asymptoty funkcji

1. Obliczyć:

$$1.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x},$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln \sin x},$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x,$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x + \cos x}{\sin 2x - \cos x},$$

$$1.5. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right),$$

- 1.6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right],$
- 1.7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x,$
- 1.8. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x,$
- 1.9. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x,$
- 1.10. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x},$
- 1.11. $\lim_{x \rightarrow 0} [\ln(1+x) + 1]^{\frac{1}{x}},$
- 1.12. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\arcsin x)^x.$

2. Wyznaczyć asymptoty funkcji:

- 2.1. $f(x) = \frac{x}{1-x^2},$
- 2.2. $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2},$
- 2.3. $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2},$
- 2.4. $f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2},$
- 2.5. $f(x) = e^{-\frac{1}{x}},$
- 2.6. $f(x) = \frac{e^x}{x+1},$
- 2.7. $f(x) = x e^x,$
- 2.8. $f(x) = \frac{1}{\ln x} + x,$
- 2.9. $f(x) = x - 2 \operatorname{arctg} x,$
- 2.10. $f(x) = x + \sqrt{1+x^2},$
- 2.11. $f(x) = x \ln \frac{2x}{x-2},$
- 2.12. $f(x) = x \ln \left(\frac{1}{x} + e \right).$