

Wydział Energetyki i Paliw AGH, Technologia Chemiczna

Zadania z MATEMATYKI

ZESTAW 6

Twierdzenia Rolle'a i Lagrange'a

1. Udowodnić nierówności:

1.1. $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|, \quad x, y \in \mathbf{R},$

1.2. $\frac{\alpha - \beta}{\cos^2 \beta} \leq \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta \leq \frac{\alpha - \beta}{\cos^2 \alpha}, \quad 0 < \beta \leq \alpha < \frac{\pi}{2}.$

2*. Wykazać, że $x_0 = 0$ jest jedynym pierwiastkiem równania $x = \ln(x + 1)$.

3*. Funkcja $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ jest różniczkowalna i równanie $f(x) = 0$ ma dwa pierwiastki. Udowodnić, że równanie $f'(x) = 0$ ma pierwiastek.

Ekstrema lokalne, przedziały monotoniczności, wartość najmniejsza i największa funkcji

1. Wyznaczyć ekstrema lokalne i przedziały monotoniczności funkcji:

1.1. $f(x) = \frac{x}{1-x^2},$

1.2. $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2},$

1.3. $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2},$

1.4. $f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2},$

1.5. $f(x) = \frac{1}{1+x^2},$

1.6. $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4},$

1.7. $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2},$

1.8. $f(x) = \frac{x}{(x-2)^2},$

1.9. $f(x) = \frac{x^4}{x^3-x},$

1.10. $f(x) = \frac{x-1}{x\sqrt{x}},$

1.11. $f(x) = x + \sqrt{1+x^2},$

1.12. $f(x) = xe^x,$

1.13. $f(x) = \frac{x}{e^x},$

1.14. $f(x) = \frac{e^x}{x+1},$

1.15. $f(x) = e^{-\frac{1}{x}},$

1.16. $f(x) = e^x + e^{-x},$

1.17. $f(x) = x^2e^x - 4xe^x + 5e^x + x^2 - \frac{1}{3}x^3 - x,$

1.18. $f(x) = x \ln x,$

- 1.19. $f(x) = (x^2 - 2x) \ln x - \frac{3}{2}x^2 + 4x$,
- 1.20. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$,
- 1.21. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$,
- 1.22. $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{x-1}$,
- 1.23. $f(x) = \frac{x-1}{\ln(x-1)}$,
- 1.24. $f(x) = x^2 \ln x$,
- 1.25. $f(x) = x - 2 \operatorname{arctg} x$,
- 1.26. $f(x) = 2 \sin x + \cos^2 x$.
2. Znaleźć wartość parametru p tak, aby funkcja $f(x) = x^3 - px^2 + 5x - 2$ osiągała minimum w punkcie $x_0 = 5$.
3. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji:
- 3.1. $f(x) = x\sqrt{4-x}$, $x \in [0, 4]$,
- 3.2. $f(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}$, $x \in [0, 2]$.