

Wydział Energetyki i Paliw AGH, Technologia Chemiczna
Zadania z MATEMATYKI
ZESTAW 10

Równania różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu

1. Rozwiązać równania o rozdzielonych zmiennych (lub dające się sprowadzić do takich):

1.1. $y' = x^2 + x + 1$,

1.2. $y' = \operatorname{tg} x + x^2 - 1$,

1.3. $y' = 3y + 5$,

1.4. $y' = 4y^2 - 9$,

1.5. $y' = 3y^2 + 6$,

1.6. $y' = (2x + 3)y$,

1.7. $y' = \frac{x}{(1-x)y}$,

1.8. $y' = \frac{x^3 y}{1-x^2}$,

1.9. $y' = 2xy - xy^2$,

1.10. $y' = y^4 e^{2x}$,

1.11. $y' = 1 - y^2$, $y(0) = 0$,

1.12. $y' = x^2(2y - 3)$, $y(1) = \frac{3}{2}$,

1.13. $(x^3 y - 8y - x^3 + 8)y' = -y - y^2 + x^2 y + x^2 y^2$,

1.14. $y' = y \sin \ln x + y \cos \ln x + y$,

1.15. $(1 + y^2)(e^{2x} - e^y y') - (1 + y)y' = 0$.

2. Rozwiązać równania jednorodne (lub dające się sprowadzić do takich):

2.1. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$,

2.2. $y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2$,

2.3. $y' = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$, $y(1) = 1$,

2.4. $y' = \frac{1}{\sin 2\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$,

2.5. $y' = \frac{y^3 + x^2 y}{x^3}$, $y(1) = -1$,

2.6. $y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{y^2 + 2xy - x^2}$,

2.7. $xy' = \sqrt{x^2 - 4y^2} + y$,

2.8. $xy' - y = (x + y) \ln \frac{x+y}{x}$,

2.9. $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$,

2.10. $y' = e^{2\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$,

2.11. $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$,

2.12. $x(y + xy') \cos \frac{y}{x} = y(xy' - y) \sin \frac{y}{x}$.

3. Rozwiązać równania wymierne (lub dające się sprowadzić do takich):

3.1. $y' = (8x + 2y + 1)^2,$

3.2. $y' = \frac{1}{x+y},$

3.3. $y' = 10^{x+y},$

3.4. $y' = \sin(x - y),$

3.5. $y' = \frac{2x+3y}{x},$

3.6. $y' = \frac{y+x}{y-x}, \quad y(-1) = 1,$

3.7. $y' = \frac{-3x-3y+1}{x+y+1},$

3.8. $y' = -\frac{x-2y+5}{2x-5y+4}, \quad y(-2) = 1,$

3.9. $y' = -\frac{y+x-2}{x-y-4}, \quad y(0) = 0,$

3.10. $y' = \left(1 + \frac{y-1}{2x}\right)^2,$

3.11. $y' = (x + y + 1)^3 + 5(x + y + 1)^2 - x - y - 7.$

4. Rozwiązać równania liniowe (lub dające się sprowadzić do takich):

4.1. $y' = \frac{1}{x}y + x^2 \sin 5x,$

4.2. $y' = xy + x^3,$

4.3. $y' = \frac{3}{x}y + x, \quad y(1) = 2,$

4.4. $y' = 2y + (e^x - x), \quad y(0) = \frac{1}{4},$

4.5. $y' = -(\sin x)y + \sin x,$

4.6. $y' = (x + 2)y + x + 2,$

4.7. $y' = -2y + e^{3x},$

4.8. $y' = -\frac{1}{x}y + \sqrt{x}, \quad y(1) = 2,$

4.9. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2,$

4.10. $y' + y \cos x = \sin x \cos x,$

4.11. $y' + y \operatorname{tg} x = \sin 2x,$

4.12. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2},$

4.13. $y' - \frac{2x+1}{x^2+x+1}y = \cos x - \frac{2x+1}{x^2+x+1} \sin x,$

4.14. $y' - \frac{2}{\sin 2x}y = \frac{\sin^2 x}{\cos x},$

4.15. $y' + 2y = x^2 e^{3x} + \sin 2x,$

4.16. $xy' + y = \ln x + 1, \quad y(e) = 1,$

4.17. $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x} \quad y(0) = 0.$

5. Rozwiązać równania Bernoulliego (lub dające się sprowadzić do takich):

5.1. $y' + xy = xy^3,$

5.2. $y' = -\frac{1}{x}y + \frac{1}{2}y^3,$

5.3. $2y' \cos x = y \sin x - y^3,$

5.4. $y' - \frac{1}{2}y = -\frac{2x}{y},$

$$5.5. \quad y' + 2y \operatorname{tg} x = y^2 \operatorname{ctg} x,$$

$$5.6. \quad (1 + x^2) y' - 2xy = 4\sqrt{y(1 + x^2)} \operatorname{arctg} x,$$

$$5.7. \quad (1 - x^2) y' - xy - xy^2 = 0,$$

$$5.8. \quad y - y' \cos x = y^2 \cos x (1 - \sin x),$$

$$5.9. \quad y' = y - \sqrt{y}, \quad y(0) = 4,$$

$$5.10. \quad xy' + y = y^2 \ln x, \quad y(1) = 1.$$

6. Rozwiązać równania zupełne:

$$6.1. \quad ydx + (x - 1) dy = 0,$$

$$6.2. \quad (3x^2 + 6xy^2) dx + (6x^2y + 4y^3) dy = 0,$$

$$6.3. \quad \frac{(x+2y)dx+ydy}{(x+y)^2} = 0,$$

$$6.4. \quad \left(\frac{y}{\cos^2 xy} + \sin x \right) dx + \left(\frac{x}{\cos^2 xy} + \sin y \right) dy = 0,$$

$$6.5. \quad \left(\frac{\sin 2x}{y} + x \right) dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2} \right) dy = 0,$$

$$6.6. \quad \left(1 + e^{\frac{x}{y}} \right) dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y} \right) dy = 0.$$

7. Rozwiązać równania z czynnikiem całkującym:

$$7.1. \quad (2xy^2 - y) dx + (y^2 + x + y) dy = 0,$$

$$7.2. \quad \left(\frac{x}{y} + 1 \right) dx + \left(\frac{x}{y} - 1 \right) dy = 0,$$

$$7.3. \quad (e^x - \sin y) dx + \cos y dy = 0,$$

$$7.4. \quad e^x (x + 1) dx + (ye^y - xe^x) dy = 0,$$

$$7.5. \quad (x \sin y + y) dx + (x^2 \cos y + x \ln x) dy = 0,$$

$$7.6. \quad (x - xy) dx + (y + x^2) dy = 0,$$

$$7.7. \quad x \left(4 + \frac{1}{x^2 - y^2} \right) dx - y \left(4 - \frac{1}{x^2 - y^2} \right) dy = 0,$$

$$7.8. \quad \left(2y + \frac{1}{(x+y)^2} \right) dx + \left(3y + x + \frac{1}{(x+y)^2} \right) dy = 0.$$

Wskazówka: W zadaniach 7.1-7.5 czynnik całkujący zależy tylko od jednej zmiennej, a w zadaniach 7.6-7.8 jest on jednej z postaci: $\mu = \mu(xy)$, $\mu = \mu(x + y)$, $\mu = \mu(x^2 - y^2)$, $\mu = \mu(x^2 + y^2)$.