

**Wydział Energetyki i Paliw AGH, Technologia Chemiczna**  
**Zadania z MATEMATYKI**  
**ZESTAW 9**

Zastosowania całek oznaczonych

1. Obliczyć pola obszarów ograniczonych krzywymi:

1.1.  $y = x^2, y = x^3,$

1.2.  $y = x^2, y^2 = x,$

1.3.  $y^2 = 8x, 8y = x^2,$

1.4.  $y = x^2, y = 3x^2, y = 5,$

1.5.  $y = x^2 - 4, y = -6x^2 + 3x,$

1.6.  $y = x^2, y = 5x + 6,$

1.7.  $y = x^2 - 4p^2, y = \frac{7}{2}p(x + p)$  i osią  $0x$  ( $x \leq -p, p = \text{const} > 0$ ),

1.8.  $y = x^3 + x^2 - 2x, x = -2, x = 2$  i osią  $0x,$

1.9.  $y = x\sqrt{1 - x^2}$  i osią  $0x,$

1.10.  $y = \sin x, x = -\pi, x = \pi$  i osią  $0x,$

1.11.  $y = e^x, x = 1$  i osiami  $0x, 0y,$

1.12.  $y = \ln x, y = \ln^2 x,$

1.13.  $y = \ln(1 + x^2), x = 0, x = 1$  i osią  $0x.$

2. Obliczyć pola obszarów ograniczonych pętlami krzywych:

2.1.  $y^2 = x(x - 1)^2,$

2.2.  $y^2 = (1 - x^2)^2,$

2.3.  $y^2 = x^2 - x^4,$

2.4.  $(y - \arcsin x)^2 = x - x^2.$

3\*. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą  $y = \frac{x}{x^4+1}$  i osią  $0x.$

4. Obliczyć długości krzywych:

4.1.  $y = 2x\sqrt{x}, x \in [0, 2],$

4.2.  $y = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{8x^2}, x \in [1, 3],$

4.3.  $y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}, x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$

4.4.  $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}, x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],$

4.5.  $y = \ln x, x \in [\sqrt{3}, 2\sqrt{2}],$

4.6.  $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln x, x \in [1, e],$

4.7.  $y = \ln \sin x, x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right],$

4.8.  $y = 1 - \ln \cos x, x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],$

- 4.9.  $y = \ln \frac{e^x+1}{e^x-1}$ ,  $x \in [1, 2]$ ,
- 4.10.  $y = \frac{1}{2}a \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ ,  $x \in [0, 4]$ ,  $a = \text{const} > 0$ .
5. Obliczyć objętości brył powstałych z obrotu dookoła osi  $Ox$  krzywych:
- 5.1.  $y = x^2$ ,  $x \in [0, 1]$ ,
- 5.2.  $y = e^{-x}$ ,  $x \in [0, 1]$ ,
- 5.3.  $y = e^{-x} \sqrt{\sin x}$ ,  $x \in [0, \pi]$ ,
- 5.4.  $y = \sin x$ ,  $x \in [0, \pi]$ ,
- 5.5.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $a, b = \text{const} > 0$ ,
- 5.6.  $4x^2 + 9y^2 = 36$ ,
- 5.7.  $y = \sqrt{\arctg x}$ ,  $x \in [0, 1]$ ,
- 5.8.  $y = \frac{\ln x}{x}$ ,  $x \in [1, e^2]$ ,
- 5.9.  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x \in [1, \infty]$ .
6. Obliczyć objętości brył powstałych z obrotu dookoła osi  $Ox$  figur ograniczonych krzywymi:
- 6.1.  $y = x^2$ ,  $y = x$ ,
- 6.2.  $y = x^2$ ,  $x = y^2$ ,
- 6.3.  $y = e^x$ ,  $y = e^{-x}$ ,  $y = \frac{1}{2}$ .
7. Obliczyć pola powierzchni bocznych brył powstałych z obrotu dookoła osi  $Ox$  krzywych:
- 7.1.  $x = y^2$ ,  $x \in [0, 1]$ ,
- 7.2.  $3y - x^3 = 0$ ,  $x \in [-1, 1]$ ,
- 7.3.  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x \in [1, 2]$ ,
- 7.4.  $y = \cos x$ ,  $x \in [0, \pi]$ .
- 8\*. Wyprowadzić wzory na objętość i pole powierzchni kuli.

## Całki oznaczone niewłaściwe

1. Obliczyć następujące całki niewłaściwe lub wykazać, że są one rozbieżne:

1.1.  $\int_0^5 \frac{dx}{(x+1)(x-3)}$ ,

1.2.  $\int_0^1 \frac{dx}{x(x-1)}$ ,

1.3.  $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ,

1.4.  $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}$ ,

1.5.  $\int_{-\infty}^\infty \frac{x dx}{x^2+1}$ ,

1.6.  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ,

$$1.7. \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}},$$

$$1.8. \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x},$$

$$1.9. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x \ln x},$$

$$1.10. \int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2}.$$

2\*. Udowodnić, że całka niewłaściwa

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1}$$

jest zbieżna.