

ma dwa rozwiązania rzeczywiste λ_1 i λ_2 (bo wyróżnik $\Delta = 4 \frac{AC - B^2}{C^2} > 0$)

i przyjmując $\alpha = \lambda_1$, $\beta = \lambda_2$

równanie (14) jest równoważne równaniu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Uwaga. Jeżeli $C = 0$, to mamy sytuację odpowiadającą przypadkom 1^o i 2^o. Jeżeli $A = C = 0$ mamy przypadek 1^o. Jeżeli $C = 0$, $A \neq 0$, to zamieniając rolę x i y otrzymamy przypadek 1^o lub 2^o. W przypadku 3^o nie może być $C = 0$ (lub $A = 0$).

Przykład 2.4. Znaleźć całkę ogólną równania:

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2x \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Dane równanie jest typu hiperbolicznego na całej płaszczyźnie poza osiami Ox , Oy .

Charakterystyki danego równania są określone równaniem różniczkowym:

$$x^2 \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 + 2xy \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right) - 3y^2 \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right)^2 = 0$$

albo:

$$\left(x \frac{\partial G}{\partial x} + 3y \frac{\partial G}{\partial y} \right) \left(x \frac{\partial G}{\partial x} - y \frac{\partial G}{\partial y} \right) = 0$$

Rozpatrując równania:

$$x \frac{\partial G}{\partial x} + 3y \frac{\partial G}{\partial y} = 0, \quad x \frac{\partial G}{\partial x} - y \frac{\partial G}{\partial y} = 0$$

otrzymujemy całki:

$$G_1(x, y) = \frac{x^3}{y}, \quad G_2(x, y) = xy$$

Stosując do danego równania przekształcenie:

$$\xi = \frac{x^3}{y}, \quad \eta = xy$$

otrzymujemy kolejno:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{3x^2}{y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \left(-\frac{x^3}{y^2}\right) + \frac{\partial u}{\partial \eta} x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{9x^4}{y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} 3x^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} 3x^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} y^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{6x}{y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(-\frac{3x^5}{y^3}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{3x^3}{y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \left(-\frac{x^3}{y}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} xy + \frac{\partial u}{\partial \xi} \left(-\frac{3x^2}{y^2}\right) + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{x^6}{y^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left(-\frac{x^4}{y^2}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \left(-\frac{x^4}{y^2}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} x^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \left(\frac{2x^3}{y^3}\right)$$

Stąd:

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2x \frac{\partial u}{\partial x} = 16x^4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 4xy \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

a zatem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

Przyjmując:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = v(\xi, \eta)$$

wówczas ostatnie równanie przyjmie postać:

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{4} \frac{1}{\xi} v = 0, \quad \text{stąd: } v(\xi, \eta) = \frac{1}{4\sqrt{|\xi|}} f(\eta),$$

zatem:

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{4\sqrt{|\xi|}} F(\eta) + G(\xi)$$

Całka ogólna danego równania wyrazi się wzorem:

$$u(x, y) = \sqrt[4]{\left|\frac{y}{x^3}\right|} F(x, y) + G\left(\frac{x^3}{y}\right)$$

gdzie F i G są dowolnymi funkcjami klasy $C^{(2)}$.

W przypadku $n = 3$, przyjmując oznaczenia (x, y, z) zamiast (x_1, x_2, x_3) , można szukać charakterystyk równania w postaci

$G(x, y, z)$

Równanie różniczkowe rzędu ni

Równanie różniczkowe z więcej zmiennymi z twierdzeniem kształtowania liści następując

Wniosek 2.1
 $P_0(x^0)$ odpowia

(ξ_1, ξ_2)

sprowadza form

(ξ_1, ξ_2)

sprowadza równanie różniczkowe (zwłaszcza stałych, to w

Przykład 2.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2$$

Danemu równaniu

$$x^2 + 2x$$

o macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Wartościami wła

$$\lambda_1 = 4, \lambda_2$$

Unormowane wekt