Lucjan Sapa

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE

wykład

Rozdział 1

Wprowadzenie

1.1 Podstawowe pojęcia

Definicja 1.1. Równaniem różniczkowym zwyczajnym n-tego rzędu nazywamy związek

$$F\left(t, x(t), x^{(1)}(t), ..., x^{(n)}(t)\right) = 0, \tag{1.1}$$

gdzie $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \supset V \to \mathbb{R}$ jest daną funkcją, t zmienną niezależną, a x funkcją szukaną.

Definicja 1.2. Równaniem różniczkowym zwyczajnym n-tego rzędu w postaci normalnej nazywamy związek

$$x^{(n)}(t) = f\left(t, x(t), x^{(1)}(t), ..., x^{(n-1)}(t)\right), \tag{1.2}$$

gdzie $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}$ jest daną funkcją, t zmienną niezależną, a x funkcją szukaną.

Jeśli $n = 1$, to piszemy zwykle $x' = f(t, x)$. Jeśli zaś $n = 2$, to piszemy $x'' = f(t, x, x')$, itd. Czasami mówi się, że równanie różniczkowe zwyczajne to takie równanie, w którym występuje nieznana funkcja lub jej pochodne i ewentualnie zmienna niezależna. Taka definicja nie jest precyzyjna, gdyż np. równania postaci: $x'(t) = x(x(t))$, $x'(t) = x(t-1)$, $x'(t) = \int_0^t x(y)\,dy$ nie są równaniami różniczkowymi w sensie definicji 1.1 i 1.2. Sa to tzw. równania różniczkowo-funkcyjne lub równania różniczkowo-funkcjonalne. Teoria takich równań jest o wiele bardziej skomplikowana niż teoria równań różniczkowych.

Dalsze definicje sformułujemy dla równań w postaci normalnej (1.2). Definicje dla równań w postaci uwikłanej (1.1) są analogiczne.

Definicja 1.3. Rozwiązaniem (całką) równania (1.2) określonym w przedziale $I \subset \mathbb{R}$ nazywamy funkcję $\varphi : I \to \mathbb{R}$ różniczkowalną n-krotnie i taką, że dla każdego $t \in I$:

1) $\left(t, \varphi(t), \varphi^{(1)}(t), ..., \varphi^{(n-1)}(t)\right) \in U$,

2) $\varphi^{(n)}(t) = f\left(t, \varphi(t), \varphi^{(1)}(t), ..., \varphi^{(n-1)}(t)\right)$.

Wykres rozwiązania nazywamy krzywą całkową lub trajektorią.

Definicja 1.4. Rozwiązaniem ogólnym równania (1.2) nazywamy funkcję $x = \Psi(t; C_1, ..., C_n)$ taką, że dla dowolnie ustalonych parametrów $C_1, ..., C_n$ należących do określonych zbiorów jest ona rozwiązaniem równania (1.2). Takie rozwiązanie nazywa się szczególnym. Rozwiązanie ogólne może być też dane w postaci uwikłanej $\Phi(t, x; C_1, ..., C_n) = 0$.

Definicja 1.5. Rozwiązaniem osobliwym równania (1.2) nazywamy takie jego rozwiązanie, którego nie da się otrzymać z rozwiązania ogólnego dla żadnych wartości parametrów $C_1, ..., C_n$.

Przykład 1.1. Rozważmy równanie różniczkowe pierwszego rzędu

$$x' = 1. \tag{1.3}$$

Całkując obustronnie to równanie po t:

$$\int x'(t)\,dt = \int dt,$$

otrzymujemy jednoparametrową rodzinę rozwiązań

$$x(t) = t + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

W uproszczeniu będziemy pisać

$$x = t + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Przykład 1.2. Rozważmy równanie różniczkowe drugiego rzędu

$$x'' = 1. \tag{1.4}$$

Po dwukrotnym scałkowaniu, tzn.:

$$\int x''(t)\,dt = \int dt,$$

$$x' = t + C_1,$$

$$\int x'(t)\,dt = \int (t + C_1)\,dt$$

otrzymujemy dwuparametrową rodzinę rozwiązań

$$x = \frac{1}{2}t^2 + C_1 t + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Przykład 1.3. Rozwiązać równanie różniczkowe pierwszego rzędu

$$x' = x. \tag{1.5}$$

Tutaj obustronne scałkowanie po t jest nieefektywne, gdyż generuje równanie całkowe. Rozważmy dwa przypadki.

1° Widzimy, że funkcja $x(t) \equiv 0$ jest rozwiązaniem.

2° Poszukajmy rozwiązań $x(t) \neq 0$ w każdym punkcie określoności. Korzystamy z definicji różniczki zupełnej pierwszego rzędu, całkujemy i otrzymujemy:

$$\frac{dx}{dt} = x,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int dt,$$

$$\ln|x| = t + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

$$|x| = C_2 e^t, \quad C_2 = e^{C_1} > 0,$$

$$x = C_3 e^t, \quad C_3 = \pm C_2 \neq 0.$$

Finalnie łącząc przypadki 1° i 2°, rozwiązanie można zapisać w postaci

$$x = Ce^t, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Kwestię całkowalności lewej strony po x i prawej strony po t w przypadku 2° wyjaśnimy w dalszej części, jak będziemy analizować równania o rozdzielonych zmiennych.

Przykład 1.4. Rozwiązać równanie różniczkowe pierwszego rzędu

$$xx' + t = 0. \tag{1.6}$$

Widzimy, że $x(t) \equiv 0$ nie może być rozwiązaniem. Przyjmijmy, że $x(t) \neq 0$ w każdym punkcie określoności. Postępując analogicznie jak w przykładzie 1.3, otrzymujmy rozwiązanie w postaci uwikłanej

$$x^2 + t^2 = C, \quad C > 0.$$

Definicja 1.6. Zadanie polegające na znalezieniu rozwiązania równania (1.2) z warunkami

$$x(t_0) = x_{01},\ x^{(1)}(t_0) = x_{02}, ...,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{0n}, \tag{1.7}$$

gdzie punkt $(t_0, x_0) \in U$, $x_0 = (x_{01}, ..., x_{0n})$ jest dany, nazywamy problemem Cauchy'ego, zagadnieniem Cauchy'ego, problemem początkowym lub zagadnieniem początkowym. Warunki (1.7) nazywamy warunkami początkowymi. Zagadnienie to można zapisać następująco

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = f\left(t, x(t), x^{(1)}(t), ..., x^{(n-1)}(t)\right), \\ x(t_0) = x_{01},\ x^{(1)}(t_0) = x_{02}, ...,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{0n}. \end{cases} \tag{1.8}$$

Uwaga 1.1. Znane są definicje rozwiązania ogólnego i osobliwego, które nie są równoważne definicjom 1.4, 1.5. W szczególności żąda się dodatkowo, żeby problem Cauchy'ego w każdym punkcie trajektorii rozwiązania ogólnego miał dokładnie jedno rozwiązanie i żeby nie miał on tej własności w żadnym punkcie trajektorii rozwiązania osobliwego.

Do podstawowych zagadnień w teorii równań różniczkowych zaliczamy:
1. Istnienie rozwiązania problemu Cauchy'ego (co najmniej jedno rozwiązanie).
2. Jednoznaczność rozwiązań problemu Cauchy'ego (co najwyżej jedno rozwiązanie).
3. Jedyność rozwiązania problemu Cauchy'ego (dokładnie jedno rozwiązanie).
4. Dziedzina rozwiązania (lokalność, globalność).
5. Ciągła zależność rozwiązania problemu Cauchy'ego od prawej strony równania i warunku początkowego.
6. Własności asymptotyczne rozwiązania (stabilność).

1.2 Interpretacja fizyczna

Przykład 1.5. Równanie ruchu

$$s'(t) = v(t) \tag{1.9}$$

orzeka, że prędkość chwilowa $v(t)$ (w skrócie nazywana prędkością) jest równa pierwszej pochodnej położenia $s(t)$ po czasie t. Zaznaczmy, że $v(t)$ i $s(t)$ są wielkościami wektorowymi. Równanie różniczkowe (1.9) opisuje tor ruchu punktu materialnego, gdy znana jest jego prędkość. Zatem wektor prędkości jest styczny do toru ruchu.

Załóżmy, że prędkość jest stała: $v(t) = v$. Po scałkowaniu równania ruchu od chwili początkowej t_0 do chwili t:

$$\int_{t_0}^{t} s'(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t} v\, d\tau$$

otrzymujemy, że

$$v = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Prawa strona w tym wzorze definiuje prędkość średnią

$$v_{śr} = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

gdzie $\Delta s = s(t) - s(t_0)$, $\Delta t = t - t_0$. Oczywiście prędkość średnia też jest wektorem, gdyż Δs jest wektorem. Stąd wniosek, że jeśli w przedziale czasowym od t_0 do t prędkość jest stała, to jest ona równa prędkości średniej. W sytuacji ogólnej prędkość w chwili t_0 jest równa prędkości średniej w granicy czasu t zdążającego do t_0. W fizyce zwykle przyjmuje się, że $t_0 = 0$.

Rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$s'(t) = v, \quad s(0) = s_0$$

jest funkcją afiniczną $s(t) = s_0 + vt$, której wykresem jest prosta. Taki ruch ze stałą prędkością nazywany jest ruchem jednostajnym prostoliniowym z położeniem początkowym s_0. Zgodnie z I zasadą dynamki Newtona jeżeli na ciało nie działa żadna siła lub działajace siły się równoważą, to ciało porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym lub pozostaje w spoczynku. Wprawdzie fizyka mówi nam, jaki to będzie ruch, ale to dopiero matematyka pozwala wyznaczyć analitycznie jednoznaczny tor tego ruchu.

Przykład 1.6. Przyśpieszenie chwilowe $a(t)$ (w skrócie przyspieszenie) jest zmianą prędkości $v(t)$ w czasie t, co można wyrazić równaniem różniczkowym

$$v'(t) = a(t). \tag{1.10}$$

Korzystając z równania ruchu (1.9), uzyskujemy równanie

$$s''(t) = a(t). \tag{1.11}$$

Równanie różniczkowe (1.11) opisuje tor ruchu punktu materialnego, gdy znane jest jego przyśpieszenie. Wyprowadzenie zależności między przyśpieszeniem i przyspieszeniem średnim jest analogicznie, jak uzasadnienie związków między prędkością i prędkoscią średnią w przykładzie 1.5, wiec je pomijamy.

Przypuśćmy, że przyśpieszenie jest stałe: $a(t) = a$. Funkcja kwadratowa $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, której wykresem w przypadku jednowymiarowym jest parabola, rozwiązuje problem początkowy

$$s''(t) = a, \quad s(0) = s_0, \quad s'(0) = v_0.$$

Taki ruch ze stałym przyśpieszeniem nazywany jest ruchem jednostajnie przyśpieszonym ($a > 0$) lub ruchem jednostajnie opóźnionym ($a < 0$) z położeniem początkowym s_0 i prędkością początkową v_0. II zasada dynamiki Newtona mówi, że przyśpieszenie jest wprost proporcjonalne do działającej siły $F(t)$ i odwrotnie proporcjonalne do masy ciała m, czyli

$$a(t) = \frac{F(t)}{m}. \tag{1.12}$$

Wobec tego jeśli siła działająca na ciało jest stała (niezerowa), to przyśpieszenie również jest stałe (niezerowe) i ciało porusza się ruchem jednostajnie przyśpieszonym lub jednostajnie opóźnionym.

Przykład 1.7. Opiszemy i przeanalizujemy matematyczny model rozpadu promieniotwórczego. Prędkość rozpadu pierwiastka promieniotwórczego $v(t)$ jest ujemna i proporcjonalna do masy substancji $m(t)$, która w danej chwili jeszcze się nie rozpadła. Współczynnik proporcjonalności $k > 0$, będący wielkością charakterystyczną dla danej substancji, jest stały i nie zależy od czasu. Wyznaczyć zależność masy substancji od czasu t.

Prędkość rozpadu jest zmianą masy w czasie. Ponieważ zmiana danej wielkości w czasie jest zawsze pierwszą pochodną tej wielkości względem czasu, więc

$$m'(t) = v(t).$$

Z przedstawionego modelu fizycznego mamy informację, że

$$\frac{v(t)}{m(t)} = -k.$$

Te dwie relacje implikują równanie różniczkowe

$$m'(t) = -k\, m(t) \tag{1.13}$$

nazywane równaniem rozpadu promieniotwórczego. Przyjmijmy, że masa początkowa substancji jest równa m_0, tzn. że

$$m(0) = m_0. \tag{1.14}$$

Postępując tak samo, jak w przykładzie 1.3, otrzymujemy rozwiązanie

$$m(t) = Ce^{-kt}, \quad C > 0,$$

a po uwzględnieniu warunku początkowego (1.14)

$$m(t) = m_0\, e^{-kt}.$$

Z postaci uzyskanych krzywych całkowych wnioskujemy, że przebywając w pobliżu wybuchu jądrowego najbardziej jesteśmy narażeni na napromieniowanie bezpośrednio po tym wybuchu. Z biegiem czasu tempo napromieniowania eksponencjalnie, a więc szybko, maleje. Ponadto bardzo duży wpływ na napromieniowanie ma masa początkowa.

Przykład 1.8. Jednowymiarowym oscylatorem harmonicznym jest każdy układ fizyczny, którego zachowanie można opisać równaniem zwanym równaniem oscylatora harmonicznego

$$a(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \tag{1.15}$$

gdzie $a(t)$ oznacza przyśpieszenie zależne od czasu t, $x(t)$ - położenie, zaś ω_0 - stałą częstość kołową drgań oscylatora (w tej teorii położenie oznacza się zwykle symbolem x zamiast s). Korzystając z równania (1.11) w przykładzie 1.6, związek ten można zapisać jako liniowe równanie różniczkowe drugiego rzędu

$$x''(t) + \omega_0^2 x(t) = 0. \tag{1.16}$$

Model opisywany równaniem (1.16) nazywa się też czasem prostym oscylatorem harmonicznym. Rozwiązanie równania oscylatora harmonicznego (1.16) jest postaci

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t,$$

gdzie A, B to stałe zależne od warunków początkowych. Okres drgań T (czas jednego pełnego drgania) wynosi

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0},$$

natomiast częstotliwość drgań ν (liczba pełnych drgań w jednostce czasu) jest równa

$$\nu = \frac{\omega_0}{2\pi}.$$

Oscylator harmoniczny charakteryzuje się stałością amplitudy drgań w czasie (maksymalne wychylenie od położenia równowagi) i niezależnością okresu drgań od amplitudy - tę cechę nazywamy izochronizmem.

Przykładem oscylatora harmonicznego jest ciało o masie m przymocowane do sprężyny i poruszające się bez tarcia i oporu powietrza po poziomej powierzchni, o ile amplituda drgań nie przekracza zakresu sprężystości sprężyny. Siła sprężystości $F(t)$ jest skierowana przeciwnie do wychylenia ciała od położenia równowagi $x(t)$ i proporcjonalna do minus tego wychylenia

$$F(t) = -kx(t),$$

gdzie $k > 0$ jest współczynnikiem sprężystości. Stąd, na podstawie II zasady dynamiki Newtona opisanej równaniem (1.12) w przykładzie 1.6, otrzymujemy związki:

$$ma(t) = -kx(t),$$

$$a(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0,$$

a po uwzględnieniu relacji (1.11) mamy równanie różniczkowe

$$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0. \tag{1.17}$$

Tutaj częstość kołowa $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ jest wielkością fizyczną ściśle powiązaną z masą ciała i własnościami sprężyny.

Dla ciężarka o masie m wiszącego na sprężynie w jednorodnym polu grawitacyjnym i wykonującego drgania pionowe, częstość kołowa ma taką samą wartość jak poprzednio rozpatrywanego obciążnika, a charakter ruchu jest dokładnie taki sam. Jedyne co się zmienia to położenie równowagi.

Innym przykładem oscylatora harmonicznego jest wahadło matematyczne dla małych kątów wychyleń θ z położenia równowagi. Jest to punkt materialny (ciężarek) o masie m zawieszony na cienkiej, nieważkiej i nierozciągliwej nici o długości l, poruszający się po okręgu w płaszczyźnie pionowej w jednorodnym polu grawitacyjnym. Siłami działającymi na masę m są siły grawitacji mg i naprężenia nici N, gdzie g oznacza przyśpieszenie ziemskie. Siłę mg rozkładamy na składową normalną (radialną) i styczną. Składowa normalna jest równoważona przez naciąg nici N, zaś składowa styczna

$$F(t) = -mg\sin\theta(t)$$

przywraca równowagę układu i sprowadza masę m do położenia równowagi (stąd znak minus). Moment siły $F(t)$ dany jest wzorem

$$M(t) = lF(t),$$

a moment bezwładności punktu materialnego o masie m względem nici l jest równy

$$I = ml^2.$$

II zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego daje nam zależność

$$\varepsilon(t) = \frac{M(t)}{I},$$

gdzie $\varepsilon(t)$ jest przyśpieszeniem kątowym. W rezultacie otrzymujemy związek

$$ml^2\varepsilon(t) = -lmg\sin\theta(t)$$

a po uproszczeniu

$$\varepsilon(t) + \frac{g}{l}\sin\theta(t) = 0, \tag{1.18}$$

co można napisać w formie dość skomplikowanego nieliniowego równania różniczkowego

$$\theta''(t) + \frac{g}{l}\sin\theta(t) = 0. \tag{1.19}$$

Dla małych kątów θ, $\sin\theta \approx \theta$. Wówczas ogólne równanie ruchu wahadła (1.19) można uprościć do postaci równania oscylatora harmonicznego

$$\theta''(t) + \frac{g}{l}\theta(t) = 0, \tag{1.20}$$

gdzie $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Zauważmy, że częstość nie zależy tutaj od masy. Wahadła matematyczne wykorzystuje się np. w zabytkowych zegarach i do ustalenia doświadczalnie wartości przyśpieszenia ziemskiego.

W rzeczywistości przedstawiony powyżej model oscylatora harmonicznego jest sytuacją wyidealizowaną, gdyż w układzie fizycznym zazwyczaj występują siły tarcia, oporu lub innego rodzaju tłumienie proporcjonalne do minus prędkości oscylatora, które powodują stratę energii. Równanie oscylatora harmonicznego tłumionego ma postać

$$a(t) + 2\beta v(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \tag{1.21}$$

a po uwzględnieniu relacji (1.9) w przykładzie 1.5 i (1.11) w przykładzie 1.6 można go napisać w formie równania różniczkowego

$$x''(t) + 2\beta x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \tag{1.22}$$

gdzie $\beta > 0$ jest współczynnikiem tłumienia. Jeśli $\beta < \omega_0$, co oznacza, że tłumienie jest słabe, to pomimo strat energii zachowany zostaje oscylacyjny charakter ruchu. Wówczas rozwiązanie równania (1.22) jest postaci

$$x(t) = e^{-\beta t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t),$$

gdzie A, B są stałymi zależnymi od warunków początkowych, zaś $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ jest częstością drgań tłumionych. Widzimy, że opór zmniejsza zarówno amplitudę jak i częstość drgań, czyli powoduje spowolnienie ruchu. Jeśli $\beta > \omega_0$, czyli tłumienie jest duże, to ruch przestaje być oscylacyjny, a ciało wychylone z położenia równowagi powraca do niego asymptotycznie tzw. ruchem pełzającym (aperiodycznym). Teraz rozwiązaniem równania (1.22) jest funkcja

$$x(t) = Ae^{(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + Be^{(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}.$$

Szczególny przypadek odpowiada sytuacji, gdy $\beta = \omega_0$. Mówimy wtedy o tłumieniu krytycznym. Ruch również nie jest oscylacyjny, a rozwiązanie równania (1.22) dane jest wzorem

$$x(t) = Ae^{-\beta t} + Bte^{-\beta t}.$$

Przeanalizujmy tłumienie na przykładzie ciała o masie m przymocowanego do sprężyny i poruszającego się po poziomej powierzchni. Siła oporu $F_{oporu}(t)$ ma zwrot przeciwny do prędkości i jest proporcjonalna do minus tej prędkości

$$F_{oporu}(t) = -\gamma v(t),$$

gdzie współczynnik $\gamma > 0$. Uwzględniając siłę sprężystości i siłę oporu oraz zależność (1.9) w przykładzie 1.5 i (1.12) w przykładzie 1.6, otrzymujemy związki:

$$ma(t) = -kx(t) - \gamma x'(t),$$

$$a(t) + \frac{\gamma}{m}x'(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0,$$

i ostatecznie biorąc pod uwagę (1.11), równanie oscylatora harmonicznego tłumionego możemy zapisać w postaci różniczkowej

$$x''(t) + 2\beta x'(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0, \tag{1.23}$$

gdzie $\beta = \frac{\gamma}{2m}$ i $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Oscylator harmoniczny może być pobudzany siłami zewnętrznymi. Stała siła nie zmienia drgań oscylatora, zmienia jedynie jego położenie równowagi. Siła wymuszająca o charakterze oscylacyjnym zmienia częstość drgań oscylatora. Równanie takiego oscylatora ma postać

$$a(t) + 2\beta v(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t), \tag{1.24}$$

a w formie różniczkowej

$$x''(t) + 2\beta x'(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t), \tag{1.25}$$

gdzie $f(t)$ jest wspomnianą siłą. Zmienną okresową siłę wymuszającą można przedstawić jako sumę funkcji $\cos \omega_s t$. Dlatego analizę równania (1.25) można ograniczyć do równania

$$x''(t) + 2\beta x'(t) + \omega_0^2 x(t) = A \cos \omega_s t, \tag{1.26}$$

gdzie ω_s jest częstością siły wymuszajacej, zaś A - amplitudą przyśpieszenia (siły na jednostkę bezwładności) wymuszającego. W przypadku, gdy $A = 0$ uzyskuje się równanie oscylatora harmonicznego z tłumieniem (1.22), a gdy dodatkowo założy się, że $\beta = 0$ - równanie oscylatora prostego (1.16).

Rozdział 2

Podstawowe typy równań różniczkowych całkowalnych

2.1 Równanie o zmiennych rozdzielonych

Równaniem o zmiennych rozdzielonych nazywamy równanie

$$x' = f(t)g(x), \tag{2.1}$$

gdzie funkcje $f : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \supset J \to \mathbb{R}$ są dane; I, J są przedziałami.

Poniżej przedstawimy metodę rozwiązywania równania (2.1), wyjaśniając jednocześnie dlaczego w przykładach 1.3, 1.4 i 1.7 wolno było scałkować lewą stronę po x, a prawą stronę po t. Rozważmy dwa przypadki.

1° Niech $g(x_0) = 0$ dla pewnych $x_0 \in J$. Oczywiście każda funkcja stała $x(t) \equiv x_0$, $t \in I$ jest rozwiązaniem.

2° Przypuśćmy, że $g(x) \neq 0$ dla każdego $x \in J$ i f, g są ciągłe. Oznaczmy przez F dowolnie ustaloną funkcję pierwotną funkcji f, a przez G dowolnie ustaloną funkcję pierwotną funkcji $\frac{1}{g}$, czyli

$$F(t) = \int f(t)\,dt, \quad G(x) = \int \frac{1}{g(x)}\,dx.$$

Równanie (2.1) możemy zapisać w postaci równoważnej

$$\frac{x'(t)}{g(x(t))} = f(t), \quad t \in I. \tag{2.2}$$

Z twierdzenia o różniczkowaniu złożenia wynika, że

$$\frac{d}{dt}(G \circ x)(t) = \frac{x'(t)}{g(x(t))}, \quad t \in I.$$

Wobec tego

$$\frac{d}{dt}(G \circ x)(t) = \frac{d}{dt}F(t), \quad t \in I$$

lub równoważnie

$$\frac{d}{dt}\left[(G \circ x)(t) - F(t)\right] = 0, \quad t \in I.$$

Ponieważ I jest przedziałem, więc po obustronnym scałkowaniu powyższej tożsamości po t mamy

$$(G \circ x)(t) - F(t) = C, \quad t \in I, \tag{2.3}$$

gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą. Na podstawie przeprowadzonego rozumowania stwierdzamy, że równanie różniczkowe (2.2) i równanie funkcyjne (2.3) są równoważne w klasie funkcji różniczkowalnych w I.

Rozważmy równanie algebraiczne

$$G(x) - F(t) = C, \quad t \in I,\ x \in J. \tag{2.4}$$

Jeśli z tego związku potrafimy wyznaczyć x jako funkcję t (być może tylko lokalnie), tzn. że $x = x(t)$ i jest ona różniczkowalna, to jest to rozwiązanie równania (2.3), a więc (2.2) i (2.1). Wzór (2.4) określa zatem rozwiązanie równania (2.1) w postaci uwikłanej.

Jeśli w przypadku 2°, $g(x) \neq 0$ dla $x \in \tilde{J} \subset J$, gdzie $\tilde{J}$ jest przedziałem, to rozumowanie jest analogiczne.

Zauważmy, że równanie (2.4) można zapisać w równoważnej postaci całkowej

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)\, dt, \tag{2.5}$$

gdyż (2.5) to w istocie równanie

$$G(x) + C_1 = F(t) + C_2,$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi rzeczywistymi. A zatem

$$G(x) - F(t) = C_2 - C_1$$

i możemy przyjąć, że $C = C_2 - C_1$. To samo można uzyskać, korzystając z definicji różniczki zupełnej tak, jak w rozdziale 1. Przy czym teraz podaliśmy w pełni formalne uzasadnienie odnośnie całkowania. Jest to praktyczny sposób szukania rozwiązań równań o zmiennych rozdzielonych.

Przykład 2.1. Rozwiązać równanie

$$x' = (t+1)(x-2). \tag{2.6}$$

Rozważmy dwa przypadki.

1° Funkcja $g(x) = x - 2$ zeruje się, gdy $x = 2$. Zatem $x(t) \equiv 2$ jest rozwiązaniem.

2° Niech $g(x) \neq 0$, czyli $x \neq 2$. Poszukajmy rozwiązań $x(t) \neq 2$ w każdym punkcie określoności. Obliczamy:

$$\int \frac{dx}{x-2} = \int (t+1)\, dt,$$

$$\ln|x-2| = \frac{1}{2}t^2 + t + C.$$

2.2 Równanie jednorodne

Równanie różniczkowe postaci

$$x' = f\left(\frac{x}{t}\right), \tag{2.7}$$

gdzie funkcja $f : \mathbb{R} \supset \tilde{U} \to \mathbb{R}$ jest dana, nazywamy równaniem jednorodnym.

Aby rozwiązać równanie (2.7), stosujemy podstawienie

$$y = \frac{x}{t}, \quad y = y(t).$$

Różniczkujemy:

$$x = ty,$$
$$x' = y + ty'$$

i otrzymujemy równanie

$$y + ty' = f(y),$$

a po przekształceniu równanie o zmiennych rozdzielonych

$$y' = \frac{1}{t}\Big(f(y) - y\Big). \tag{2.8}$$

Przykład 2.2. Rozwiązać równanie

$$x' = \frac{t+x}{t} + \left(\frac{x}{t}\right)^2. \tag{2.9}$$

Po przekształceniu otrzymujemy równanie jednorodne

$$x' = 1 + \frac{x}{t} + \left(\frac{x}{t}\right)^2.$$

Robimy podstawienie $y = \frac{x}{t}$ i mamy

$$y + ty' = 1 + y + y^2,$$

a po uproszczeniu i rozdzieleniu zmiennych

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dt}{t}.$$

Stąd po scałkowniu

$$\mathrm{arctg} y = \ln|t| + C$$

lub równoważnie

$$y = \mathrm{tg}\,(\ln|t| + C).$$

Finalnie, w zmiennych wyjściowych, rozwiązanie ma postać

$$x = t\,\mathrm{tg}\,(\ln|t| + C).$$

2.3 Równanie wymierne

Równanie różniczkowe postaci

$$x' = f\left(\frac{a_1 t + b_1 x + c_1}{a_2 t + b_2 x + c_2}\right) \tag{2.10}$$

gdzie funkcja $f : \mathbb{R} \supset \tilde{U} \to \mathbb{R}$ i stałe a_i, b_i, c_i, $i = 1, 2$ są dane, nazywamy równaniem wymiernym.

Rozważmy dwa przypadki.

1° Rozpatrzmy przypadek, gdy $c_1 = c_2 = 0$. W równaniu (2.10) dzielimy licznik i mianownik przez t i dostajemy równanie jednorodne

$$x' = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{x}{t}}{a_2 + b_2\frac{x}{t}}\right). \tag{2.11}$$

2° Przeanalizujmy teraz przypadek, gdy $c_1 \neq 0$ lub $c_2 \neq 0$. Musimy zbadać dwa przypadki ze względu na wartość wyznacznika macierzy współczynników a_i, b_i, $i = 1, 2$.

1) W pierwszym przypadku niech

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

A to oznacza, że

$$\begin{vmatrix} a_1 t & b_1 x \\ a_2 t & b_2 x \end{vmatrix} = tx \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

dla dowolnych $t, x \in \mathbb{R}$. Stąd wektory $(a_1 t, b_1 x)$ i $(a_2 t, b_2 x)$ są liniowo zależne, co oznacza, że istnieje $\lambda \in \mathbb{R}$ taka, że $\lambda(a_1 t, b_1 x) = (a_2 t, b_2 x)$ lub w formie skalarnej

$$\begin{cases} \lambda a_1 t = a_2 t \\ \lambda b_1 x = b_2 x \end{cases}.$$

Jeśli więc położymy $y = a_1 t + b_1 x$, to po dodaniu stronami równań w powyższym układzie mamy, że $\lambda y = a_2 t + b_2 x$. Przyjmijmy, że y jest funkcją zmiennej t. Obliczamy pierwszą pochodną $y' = a_1 + b_1 x'$ i w efekcie otrzymujemy szczególny przypadek równania o zmiennych rozdzielonych

$$y' = a_1 + b_1 f\left(\frac{y + c_1}{\lambda y + c_2}\right). \tag{2.12}$$

2) Niech teraz

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ten przypadek jest najtrudniejszy. Z twierdzenia Kroneckera-Capellego wynika, że układ równań algebraicznych

$$\begin{cases} a_1 t + b_1 x + c_1 = 0 \\ a_2 t + b_2 x + c_2 = 0 \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie, które oznaczamy przez $(t, x) = (\alpha, \beta)$. Wprowadzamy nowe zmienne za pomocą wzorów:

$$t = u + \alpha, \quad x = v + \beta,$$

gdzie $v = v(u)$. Na podstawie twierdzenia o różniczkowaniu złożenia i zależności $\frac{du}{dt} = 1$, prawdziwe są równości

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{du}\,\frac{du}{dt} = \frac{dv}{du}.$$

Zauważmy jeszcze, że

$$\begin{aligned} a_1 t + b_1 x + c_1 &= a_1(u + \alpha) + b_1(v + \beta) + c_1 \\ &= a_1 u + b_1 v + (a_1\alpha + b_1\beta + c_1) \\ &= a_1 u + b_1 v \end{aligned}$$

i po analogicznym rachunku

$$a_2 t + b_2 x + c_2 = a_2 u + b_2 v.$$

W konsekwencji dochodzimy do równania

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v}\right),$$

a po podzieleniu licznika i mianownika przez u do równania jednorodnego

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{v}{u}}{a_2 + b_2\frac{v}{u}}\right). \tag{2.13}$$

Przykład 2.3. Rozwiązać równanie

$$x' = \frac{t+x}{t-2x}. \tag{2.14}$$

Sprawdzamy, że $c_1 = c_2 = 0$. Dzielimy licznik i mianownik prawej strony przez t, co prowadzi do równania jednorodnego

$$x' = \frac{1+\frac{x}{t}}{1-2\frac{x}{t}}.$$

Podstawiamy

$$y = \frac{x}{t}$$

i otrzymujemy równanie

$$y + ty' = \frac{1+y}{1-2y},$$

a po przekształceniu równanie o zmiennych rozdzielonych

$$y' = \frac{1}{t}\frac{2y^2+1}{1-2y}.$$

Obliczamy:

$$\int \frac{1-2y}{2y^2+1}dy = \int \frac{dt}{t},$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{4y}{2y^2+1} = \ln|t|,$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}y) - \frac{1}{2}\ln\left(2y^2+1\right) = \ln|t| + C.$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\frac{x}{t}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(2\left(\frac{x}{t}\right)^2 + 1\right) = \ln|t| + C.$$

Przykład 2.4. Rozwiązać równanie

$$x' = \frac{t+x}{3t+3x-4}. \tag{2.15}$$

Tym razem $c_1 = 0$, $c_2 = -4 \neq 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Podstawiamy

$$y = t + x$$

i dochodzimy do zredukowanego równania o zmiennych rozdzielonych

$$y' = 1 + \frac{y}{3y-4},$$

które po przekształceniu ma postać

$$y' = 4\frac{y-1}{3y-4}.$$

Rozważmy dwa przypadki.

1° Funkcja $g(y) = \frac{y-1}{3y-4}$ zeruje się, gdy $y = 1$. Zatem funkcja $y(t) \equiv 1$ jest rozwiązaniem powyższego równania, a więc $t + x = 1$ jest rozwiązaniem równania (2.15).

2° Niech $g(y) \neq 0$, co oznacza, że $y \neq 1$. Poszukajmy rozwiązań takich, że $t + x \neq 1$. Po prostych obliczeniach mamy:

$$\int \frac{3y-4}{y-1} dy = 4 \int dt,$$

$$3 \int dy - \int \frac{dy}{y-1} = 4t,$$

$$3y - \ln|y-1| = 4t + C,$$

$$3(t+x) - \ln|t+x-1| = 4t + C.$$

Przykład 2.5. Znaleźć rozwiązanie równania

$$x' = 2\left(\frac{x+2}{t+x-1}\right)^2. \tag{2.16}$$

Mamy: $c_1 = 2 \neq 0$, $c_2 = -1 \neq 0$ i $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Para $(\alpha, \beta) = (3, -2)$ jest jedynym rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} x + 2 = 0 \\ t + x - 1 = 0 \end{cases}.$$

Wykonujemy podstawienie:

$$t = u + 3, \quad x = v - 2.$$

W nowym zmiennych badane równanie ma postać

$$\frac{dv}{du} = 2\left(\frac{v}{u+v}\right)^2,$$

a po podzieleniu licznika i mianownika przez u otrzymujemy równanie jednorodne

$$\frac{dv}{du} = 2\left(\frac{\frac{v}{u}}{1+\frac{v}{u}}\right)^2.$$

Robimy kolejne podstawienie

$$y = \frac{v}{u},$$

gdzie $y = y(u)$. Następnie różniczkujemy i wstawiamy do równania:

$$v = uy,$$

$$\frac{dv}{du} = y + u\frac{dy}{du},$$

$$y + u\frac{dy}{du} = \frac{2y^2}{(1+y)^2},$$

$$u\frac{dy}{du} = \frac{2y^2 - y(1+y)^2}{(1+y)^2},$$

$$\frac{dy}{du} = -\frac{1}{u}\frac{y(1+y^2)}{(1+y)^2}.$$

Rozważmy dwa przypadki.

1°. Funkcja $g(y) = \frac{y(1+y^2)}{(1+y)^2}$ zeruje się, gdy $y = 0$. W związku z tym funkcja $y(u) \equiv 0$ jest rozwiązaniem tego równania. A to jest równoważne temu, że $v(u) \equiv 0$ i w efekcie $x(t) \equiv -2$ jest rozwiązaniem równania wyjściowego.

2°. Niech $g(y) \neq 0$, czyli $y \neq 0$. Poszukajmy rozwiązań takich, że $x(t) \neq -2$. Rozdzielenie zmiennych, rozkład na ułamki proste i scałkowanie prowadzi nas do celu:

$$\int \frac{(1+y)^2}{y(1+y^2)}\,dy = -\int \frac{du}{u},$$

$$\int \frac{dy}{y} + 2\int \frac{dy}{1+y^2}\,dy = -\int \frac{du}{u},$$

$$\ln|y| + 2\,\mathrm{arctg} y = -\ln|u| + C,$$

$$\ln\left|\frac{x+2}{t-3}\right| + 2\,\mathrm{arctg}\frac{x+2}{t-3} = -\ln|t-3| + C.$$

2.4 Równanie liniowe

Równanie różniczkowe

$$x' = a(t)x + b(t), \tag{2.17}$$

gdzie funkcje $a, b : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ są dane, nazywamy równaniem liniowym. Gdy $b(t) \equiv 0$, $t \in I$, to mówimy, że (2.17) jest równaniem liniowym jednorodnym (RLJ)

$$x' = a(t)x, \tag{2.18}$$

w przeciwnym razie - równaniem liniowym niejednorodnym (RLN). Jeśli (2.17) jest równaniem niejednorodnym (RLN), to (2.18) nazywamy równaniem jednorodnym (RLJ) z nim skojarzonym.

Twierdzenie 2.1. *Jeśli funkcja $a : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to rozwiązanie ogólne RLJ dane jest wzorem*

$$x(t) = Ce^{\int_{t_0}^t a(s)ds}, \quad t \in I, \tag{2.19}$$

gdzie $t_0 \in I$ jest dowolnie ustalone, $C \in \mathbb{R}$, i są to wszystkie rozwiązania tego równania na I.

Dowód. Zauważmy najpierw, że każda funkcja określona wzorem (2.19) zależy od parametru $C \in \mathbb{R}$ i jest rozwiązaniem równania (2.18), gdy ustalimy C. Rzeczywiście,

$$x'(t) = Ce^{\int_{t_0}^t a(s)ds}a(t) = a(t)x(t), \quad t \in I.$$

Pokażemy teraz, że każde rozwiązanie φ równania (2.18) w przedziale I jest postaci (2.19), tzn. że istnieje stała $C \in \mathbb{R}$ taka, że

$$\varphi(t) = Ce^{\int_{t_0}^t a(s)ds}, \quad t \in I. \tag{2.20}$$

Niech φ będzie rozwiązaniem równania (2.18) w przedziale I, różnym od zera w każdym punkcie $t \in I$. Wobec tego

$$\varphi'(t) = a(t)\varphi(t), \quad t \in I,$$

a po podzieleniu przez $\varphi(t)$ i po scałkowaniu

$$\int_{t_0}^t \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}ds = \int_{t_0}^t a(s)ds, \quad t \in I,$$

gdzie $t_0 \in I$ jest dowolnie ustalone. Biorąc pod uwagę własność Darboux dla funkcji ciągłych, mamy:

$$\ln|\varphi(t)| = \ln|\varphi(t_0)| + \int_{t_0}^{t} a(s)ds, \quad t \in I,$$

$$\varphi(t) = \varphi(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}, \quad t \in I.$$

Kładziemy $C := \varphi(t_0)$.

Jeśli $\varphi(t) \equiv 0$, $t \in I$, to kładziemy $C := 0$.

Zauważmy jeszcze, że rozwiązania zerowego nie można skleić w żadnym punkcie $t_1 \in I$ z jakimkolwiek rozwiązaniem niezerowym $\varphi(t) = \varphi(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$, gdyż wtedy musiałyby zachodzić równości $0 = \lim_{t\to t_1} \varphi(t) = \varphi(t_0)e^{\int_{t_0}^{t_1} a(s)ds}$, a tym samym $\varphi(t_0) = 0$ i $\varphi(t) \equiv 0$, $t \in I$, co przeczy niezerowości φ. Oczywiście jakiegokolwiek rozwiązania dodatniego i ujemnego też nie można skleić ze sobą w żadnym punkcie, rozumując jak wyżej, co kończy dowód.

Wniosek 2.1. Jeśli funkcja $a : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to zbiór rozwiązań RLJ z działaniem dodawania funkcji i mnożenia ich przez liczby rzeczywsite jest jednowymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Twierdzenie 2.2. *Jeśli x_j jest rozwiązaniem ogólnym RLJ skojarzonego z RLN określonym na przedziale $\tilde{I} \subset I$, zaś x_s jest jakimś rozwiązaniem szczególnym RLN określonym na $\tilde{I}$, to rozwiązanie ogólne RLN na $\tilde{I}$ dane jest wzorem*

$$x = x_j + x_s, \tag{2.21}$$

i są to wszystkie rozwiązania tego równania na $\tilde{I}$.

Dowód. Załóżmy, że rozwiązania x_j i x_s istnieją na przedziale $\tilde{I} \subset I$. Każda funkcja postaci (2.21) zależy od parametru $C \in \mathbb{R}$ i jest rozwiązaniem RLN po ustaleniu C, gdyż

$$\begin{aligned} P = a(t)x(t) + b(t) &= a(t)\Big(x_j(t) + x_s(t)\Big) + b(t) = a(t)x_j(t) + \Big(a(t)x_s(t) + b(t)\Big) \\ &= x_j'(t) + x_s'(t) = \Big(x_j + x_s\Big)'(t) = x'(t) = L, \quad t \in \tilde{I}. \end{aligned}$$

Niech teraz φ będzie dowolnym rozwiązaniem RLN określonym na przedziale $\tilde{I}$. Zaproponujmy $x_j := \varphi - x_s$. Istotnie, tak zdefiniowane x_j jest rozwiązaniem RLJ skojarzonego z RLN, ponieważ

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= a(t)\varphi(t) + b(t), \quad t \in \tilde{I}, \\ x_s'(t) &= a(t)x_s(t) + b(t), \quad t \in \tilde{I}, \end{aligned}$$

a po odjęciu stronami

$$L = x_j'(t) = \Big(\varphi - x_s\Big)'(t) = \varphi'(t) - x_s'(t) = a(t)\Big(\varphi - x_s\Big)(t) = a(t)x_j(t) = P, \quad t \in \tilde{I}.$$

Zatem $\varphi = x_j + x_s$ i dowód jest skończony.

Uwaga 2.1. Czasami rozwiązanie ogólne równań liniowych RLJ lub RLN definiowane jest jako zbiór wszystkich ich rozwiązań.

Pojawia sią naturalne pytanie: Jak wyznaczyć rozwiązanie szczególne x_s RLN? Jednym ze sposobów jest **metoda uzmienniania stałej**. Załóżmy, że funkcje $a, b : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ są ciągłe. Na podstawie twierdzenia 2.1 wnioskujemy, że

$$x_j(t) = Ce^{\int_{t_0}^t a(s)ds}, \quad t \in I. \tag{2.22}$$

Zaproponujmy

$$x_s(t) = C(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}, \quad t \in I, \tag{2.23}$$

gdzie $C : I \to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^1, a nie stałą, jak we wzorze (2.22). Stąd też nazwa metody. Czy taka funkcja $C(t)$ istnieje, a jeśli tak, to jak ją efektywnie wyznaczyć? Zróżniczkujmy x_s ze wzoru (2.23)

$$x_s'(t) = C'(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + C(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}a(t), \quad t \in I$$

i wstawmy do równania RLN

$$C'(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + C(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}a(t) = a(t)C(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + b(t), \quad t \in I.$$

Po uproszczeniu

$$C'(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} = b(t), \quad t \in I$$

i w efekcie

$$C(t) = \int_{t_0}^t b(\tau)e^{-\int_{t_0}^\tau a(s)ds}d\tau, \quad t \in I.$$

Regularność funkcji $C(t)$ wynika z twierdzenia Newtona-Leibniza.

Uwaga 2.2. W praktyce wygodnie jest korzystać ze wzorów:

$$x_j(t) = Ce^{\int a(t)dt},$$

$$x_s(t) = C(t)e^{\int a(t)dt},$$

$$C'(t)e^{\int a(t)dt} = b(t),$$

gdzie przez symbol $\int a(t)dt$ rozumiemy tutaj jakąś jedną funkcję pierwotną funkcji a.

Przykład 2.6. Wyznaczyć rozwiązanie ogólne liniowego równania niejednorodnego

$$x' = (\operatorname{tg} t)x + \cos t. \tag{2.24}$$

Najpierw znajdźmy rozwiązanie ogólne skojarzonego z nim równania jednorodnego

$$x' = (\operatorname{tg} t)x. \tag{2.25}$$

Obliczamy:

$$x_j = Ce^{\int \operatorname{tg} t \, dt} = Ce^{-\ln|\cos t|} = C\frac{1}{|\cos t|}, \quad C \in \mathbb{R},$$

$$x_j = C\frac{1}{\cos t}, \quad C \in \mathbb{R}$$

(zamiast pisać $\pm C$ pozostawiliśmy C, bowiem jest to stała dowolna). Rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego będzie mieć postać

$$x_s = C(t)\frac{1}{\cos t},$$

gdzie szukana funkcja $C(t)$ spełnia związek

$$C'(t)\frac{1}{\cos t} = \cos t,$$

czyli

$$C(t) = \int \cos^2 t\, dt.$$

Powyższą całkę można bez trudu obliczyć, korzystając z elementarnych wzorów trygonometrycznych:

$$\int \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) dt = \int dt = t + C,$$

$$\int \left(\cos^2 t - \sin^2 t\right) dt = \int \cos 2t\, dt = \frac{1}{2}\sin 2t + C,$$

a po dodaniu stronami i podzieleniu przez 2 mamy

$$\int \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C$$

(i znowu zamiast pisać odpowiednio C_1, C_2 i $\frac{C_1+C_2}{2}$ napisaliśmy po prostu C, bo jest to stała dowolna). Ponieważ potrzebujemy jednej funkcji $C(t)$, przyjmujemy np. $C = 0$ i otrzymujemy

$$C(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t.$$

Zatem

$$x_s = \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\frac{1}{\cos t}$$

i funkcja

$$x = \left(C + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\frac{1}{\cos t}$$

jest rozwiązaniem ogólnym równania (2.24).

2.5 Równanie Bernoulliego

Równanie różniczkowe

$$x' = a(t)x + b(t)x^{\alpha}, \tag{2.26}$$

gdzie funkcje $a, b : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ i stała $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ są dane, nazywamy równaniem Bernoulliego.

Jeśli $\alpha > 0$, to funkcja $x(t) \equiv 0$, $t \in I$ jest rozwiązaniem równania (2.26).

Poszukajmy rozwiązań $x(t) \neq 0$ dla każdego $t \in I$. Równanie (2.26) mnożymy przez $x^{-\alpha}$:

$$x'x^{-\alpha} = a(t)x^{1-\alpha} + b(t).$$

Następnie podstawiamy

$$y = x^{1-\alpha}, \quad y = y(t),$$

obliczamy pochodną

$$y' = (1-\alpha)x^{-\alpha}x'$$

i otrzymujemy równanie liniowe

$$y' = (1-\alpha)a(t)y + (1-\alpha)b(t).$$

Przykład 2.7. Rozwiązać równanie

$$x' = \frac{4}{t}x + tx^{\frac{1}{2}}. \tag{2.27}$$

Rozważmy dwa przypadki.

1° Funkcja $x(t) \equiv 0$ jest rozwiązaniem.

2° Poszukajmy rozwiązań $x(t) > 0$. Po pomnożeniu przez $x^{-\frac{1}{2}}$ mamy

$$x'x^{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{t}x^{\frac{1}{2}} + t.$$

Podstawienie

$$y = x^{\frac{1}{2}}$$

sprowadza badane równanie do niejednorodnego równania liniowego

$$y' = \frac{2}{t}y + \frac{1}{2}t.$$

Całką ogólną skojarzonego równania jednorodnego jest funkcja

$$y_j = Ct^2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Znajdźmy całkę szczególną równania niejednorodnego, uzmienniając stałą, tj.

$$y_s = C(t)t^2.$$

Po podstawieniu do tego równania i po redukcji otrzymujemy związek

$$C'(t)t^2 = \frac{1}{2}t,$$

a stąd

$$C(t) = \frac{1}{2}\ln|t|.$$

Zatem

$$y_s = \frac{1}{2}t^2\ln|t|$$

i całka ogólna równania niejednorodnego ma postać

$$y = \left(C + \frac{1}{2}\ln|t|\right)t^2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Uwzględniając podstawienie, funkcja

$$x = \left(C + \frac{1}{2}\ln|t|\right)^2 t^4, \quad C \in \mathbb{R}$$

jest rozwiązaniem równania wyjściowego.

2.6 Równanie zupełne. Czynnik całkujący

Równanie różniczkowe

$$P(t,x) + Q(t,x)x' = 0, \tag{2.28}$$

gdzie $P, Q : \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}$ są zadanymi funkcjami określonymi w obszarze D, nazywamy równaniem zupełnym, gdy istnieje funkcja $F : D \to \mathbb{R}$ taka, że jej różniczka zupełna pierwszego rzędu jest postaci

$$dF = P(t,x)dt + Q(t,x)dx.$$

Inaczej mówiąc, oznacza to, że pole wektorowe (P, Q) jest potencjalne, tzn. że istnieje pole skalarne $F : D \to \mathbb{R}$ takie, że

$$\nabla F = (P, Q),$$

lub równoważnie w zapisie skalarnym

$$\begin{cases} \frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = P(t,x) \\ \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = Q(t,x) \end{cases} \tag{2.29}$$

dla $(t,x) \in D$. Funkcję F nazywa się potencjałem pola (P, Q) i jest to uogólnienie pojęcia funkcji pierwotnej funkcji jednej zmiennej. Równanie (2.28) zapisuje się często w postaci różniczkowej

$$P(t,x)dt + Q(t,x)dx = 0.$$

Mówimy wtedy, że równanie to jest zupełne, gdy jego lewa strona jest różniczką zupełną pierwszego rzędu funkcji F.

Rozwiązanie równania zupełnego (2.28) dane jest w postaci uwikłanej

$$F(t,x) = C. \tag{2.30}$$

Rzeczywiście, po wyznaczeniu funkcji uwikłanej $x = x(t)$ z równania (2.30) i zróżniczkowaniu wyrażenia $F(t, x(t)) = C$ względem zmiennej t, otrzymujemy tożsamość

$$\frac{\partial F(t,x(t))}{\partial t} + \frac{\partial F(t,x(t))}{\partial x} x'(t) = 0.$$

Uwzględniając związek (2.29), funkcja x jest rozwiązaniem równania (2.28).

Twierdzenie 2.3. *Jeśli D jest obszarem jednospójnym i $P, Q \in C^1(D)$, to równanie (2.28) jest zupełne wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\frac{\partial P(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial Q(t,x)}{\partial t}, \quad (t,x) \in D. \tag{2.31}$$

Dowód. Najpierw udowodnimy, że jeśli równanie (2.28) jest zupełne, to prawdziwa jest tożsamość (2.31). Przypuśćmy więc, że równanie (2.28) jest zupełne. A to oznacza, że istnieje funkcja F, która spełnia układ równań (2.29). Różniczkując pierwszą równość w (2.29) względem x, a drugą względem t, otrzymujemy

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F(t,x)}{\partial t}\right) = \frac{\partial P(t,x)}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}\right) = \frac{\partial Q(t,x)}{\partial t}, \quad (t,x) \in D.$$

Ale z założenia $P, Q \in C^1(D)$, dlatego $F \in C^2(D)$. Na podstawie twierdzenia Schwarza o równości pochodnych mieszanych lewe strony są równe, zatem i prawe strony są równe, czyli wzór (2.31) zachodzi.

Teraz uzasadnimy implikację w drugą stronę. Załóżmy, że spełniona jest równość (2.31). Obszar jednospójny D na płaszczyźnie ma tę własność, że jeśli dowolna krzywa zamknięta zwykła l (inaczej krzywa zamknięta Jordana), tj. krzywa zamknięta kawałkami gładka bez punktów wielokrotnych, zawiera się w tym obszarze, to i obszar wewnętrzny D_1 nią ograniczony zawiera się w tym obszarze. Własność tę można uważać za definicję jednospójności na płaszczyźnie. Niech l będzie dowolną krzywą zamkniętą zwykłą zawartą w D. Na podstawie twierdzenia Greena i wzoru (2.31) całka krzywoliniowa skierowana z pola wektorowego (P, Q) po krzywej l jest równa zeru:

$$\oint_l P(t,x)dt + Q(t,x)dx = \int\int_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) dtdx = 0.$$

Stąd wynika, że całka krzywoliniowa skierowana

$$\oint_{\tilde{l}} P(t,x)dt + Q(t,x)dx = 0$$

po każdej krzywej zamkniętej kawałkami gładkiej $\tilde{l}$ zawartej w D, gdyż każdą taką krzywą można rozbić na skończenie wiele krzywych zamkniętych zwykłych kawałkami gładkich. Zatem pole wektorowe (P, Q) jest potencjalne w obszarze D, co jest równoważne temu, że równanie (2.28) jest zupełne.

Przykład 2.8. Rozwiązać równanie

$$\Big(\frac{x}{\cos^2 tx} + \sin t\Big)dt + \Big(\frac{t}{\cos^2 tx} + \sin x\Big)dx = 0. \tag{2.32}$$

Połóżmy

$$P(t,x) = \frac{x}{\cos^2 tx} + \sin t, \quad Q(t,x) = \frac{t}{\cos^2 tx} + \sin x.$$

Sprawdzamy, że

$$\frac{\partial P(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial Q(t,x)}{\partial t} = \frac{\cos^2 tx + tx\sin 2tx}{\cos^4 tx}.$$

Zatem równanie (2.32) jest zupełne w dowolnym obszarze $D \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : tx = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ na mocy twierdzenia 2.3. Szukamy funkcji F spełniającej układ równań

$$\begin{cases} \frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = \frac{x}{\cos^2 tx} + \sin t \\ \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = \frac{t}{\cos^2 tx} + \sin x \end{cases} \tag{2.33}$$

dla $(t,x) \in D$. Całkując względem t pierwsze równanie w (2.33), otrzymujemy

$$F(t,x) = \operatorname{tg} tx - \cos t + \varphi(x).$$

Następnie z drugiego równania w (2.33) mamy

$$\frac{t}{\cos^2 tx} + \varphi'(x) = \frac{t}{\cos^2 tx} + \sin x.$$

A stąd

$$\varphi'(x) = \sin x$$

i po scałkowaniu

$$\varphi(x) = -\cos x.$$

Zatem
$$F(t,x) = \operatorname{tg} tx - \cos t - \cos x,$$
a szukane rozwiązanie równania (2.32) można zapisać w postaci uwikłanej
$$\operatorname{tg} tx - \cos t - \cos x = C.$$
Oczywiście to samo można uzyskać, całkując względem x drugie równanie w (2.33), przy czym $\varphi(x)$ zastępujemy wtedy przez $\varphi(t)$, które obliczamy z pierwszego równania w (2.33).

Warto zwrócić uwagę, że zarówno równanie
$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x + \sin t \cos^2 tx}{t + \sin x \cos^2 tx},$$
jak i równanie
$$\frac{dt}{dx} = -\frac{t + \sin x \cos^2 tx}{x + \sin t \cos^2 tx}$$
generowane przez (2.32) są trudne i w zasadzie nie wiadomo w jaki sposób można by je rozwiązać.

Jeśli równanie (2.28) nie jest zupełne, to można próbować je przekształcić w sposób równoważny do równania zupełnego, mnożąc obustronnie przez odpowiednią funkcję.

Definicja 2.1. Czynnikiem całkującym równania (2.28) nazywamy funkcję $\mu : D \to \mathbb{R}$, $\mu(t,x) \neq 0$ dla $(t,x) \in D$, taką, że równanie
$$\mu(t,x)P(t,x) + \mu(t,x)Q(t,x)x' = 0 \tag{2.34}$$
jest zupełne.

Często udaje się znaleźć czynnik całkujący nie w obszarze D, ale w jakimś mniejszym obszarze $D_1 \subset D$.

Przedstawimy teraz sposób wyznaczania czynnika całkującego μ. Niech D będzie obszarem jednospójnym i $P, Q \in C^1(D)$. Szukamy $\mu \in C^1(D)$. Na mocy twierdzenia 2.3, równanie (2.34) jest zupełne wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\frac{\partial(\mu P)(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu Q)(t,x)}{\partial t}, \quad (t,x) \in D.$$
Po zróżniczkowaniu otrzymujemy trudne równanie różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu z funkcją niewiadomą μ
$$\frac{\partial \mu}{\partial x} P(t,x) + \mu \frac{\partial P(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial t} Q(t,x) + \mu \frac{\partial Q(t,x)}{\partial t},$$
które po pogrupowaniu przyjmuje postać
$$\frac{\partial \mu}{\partial x} P(t,x) - \frac{\partial \mu}{\partial t} Q(t,x) = \mu \Big(\frac{\partial Q(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial P(t,x)}{\partial x} \Big).$$
Zaproponujmy jakąś funkcję $w \in C^1(D, \mathbb{R})$ i poszukajmy $(\mu \circ w)(t,x)$. Wówczas
$$\mu' \Big(\frac{\partial w(t,x)}{\partial x} P(t,x) - \frac{\partial w(t,x)}{\partial t} Q(t,x) \Big) = \mu \Big(\frac{\partial Q(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial P(t,x)}{\partial x} \Big),$$

a po podzieleniu

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\frac{\partial Q(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial P(t,x)}{\partial x}}{\frac{\partial w(t,x)}{\partial x} P(t,x) - \frac{\partial w(t,x)}{\partial t} Q(t,x)}.$$

Jeśli prawa strona w powyższej relacji jest funkcją zmniennej w, tzn. gdy funkcja

$$\Psi(w) := \frac{\frac{\partial Q(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial P(t,x)}{\partial x}}{\frac{\partial w(t,x)}{\partial x} P(t,x) - \frac{\partial w(t,x)}{\partial t} Q(t,x)} \tag{2.35}$$

jest dobrze określona, to czynnik całkujący $\mu \circ w$ istnieje. Wtedy wystarczy rozwiązać równanie różniczkowe zwyczajne

$$\frac{\mu'}{\mu} = \Psi(w), \tag{2.36}$$

czyli:

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \Psi(w)\, dw,$$

$$\ln|\mu| = \int \Psi(w)\, dw,$$

$$\mu(w) = Ce^{\int \Psi(w)\, dw}, \quad C \neq 0.$$

Najprostsza jest sytuacja, gdy $w = t$ lub $w = x$. Pociąga to za sobą redukcję funkcji Ψ odpowiednio do postaci:

$$\Psi(t) := \frac{\frac{\partial Q(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial P(t,x)}{\partial x}}{-Q(t,x)}, \tag{2.37}$$

$$\Psi(x) := \frac{\frac{\partial Q(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial P(t,x)}{\partial x}}{P(t,x)}. \tag{2.38}$$

Przykład 2.9. Znaleźć rozwiązanie równania

$$\Big(t^2x^3 + x\Big)dt + \Big(t^3x^2 - t\Big)dx = 0. \tag{2.39}$$

Połóżmy

$$P(t,x) = t^2x^3 + x, \quad Q(t,x) = t^3x^2 - t.$$

Ponieważ

$$\frac{\partial P(t,x)}{\partial x} = 3t^2x^2 + 1, \quad \frac{\partial Q(t,x)}{\partial t} = 3t^2x^2 - 1,$$

więc równanie (2.39) nie jest zupełne w żadnym obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$. Równanie to nie ma czynnika całkującego μ zależnego tylko od jednej zmiennej, gdyż kładąc $w = t$, mamy

$$\frac{\frac{\partial Q(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial P(t,x)}{\partial x}}{-Q(t,x)} = \frac{-2}{-(t^3x^2 - t)} \neq \Psi(t),$$

a kładąc $w = x$, mamy

$$\frac{\frac{\partial Q(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial P(t,x)}{\partial x}}{P(t,x)} = \frac{-2}{t^2x^3 + x} \neq \Psi(x).$$

Zaproponujmy $w = tx$. Teraz otrzymujemy, że

$$\frac{\frac{\partial Q(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial P(t,x)}{\partial x}}{\frac{\partial w(t,x)}{\partial x}P(t,x) - \frac{\partial w(t,x)}{\partial t}Q(t,x)} = \frac{-2}{2tx} = -\frac{1}{w} = \Psi(w),$$

co oznacza istnienie czynnika całkującego

$$\mu(w) = Ce^{-\int \frac{dw}{w}} = Ce^{-\ln|w|} = C\frac{1}{|w|}, \quad C \neq 0.$$

Połóżmy $\mu = \frac{1}{tx}$. Po pomnożeniu równania (2.39) przez taką funkcję μ otrzymujemy równanie zupełne

$$\Big(tx^2 + \frac{1}{t}\Big)dt + \Big(t^2x - \frac{1}{x}\Big)dx = 0$$

w dowolnym obszarze $D \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : \; tx = 0\}$. Postępując analogicznie jak w przykładzie 2.8, znajdujemy jego rozwiązanie, a więc i rozwiązanie równania wyjściowego (2.39), w postaci uwikłanej

$$\frac{1}{2}t^2x^2 + \ln|t| - \ln|x| = C.$$

2.7 Równanie Clairauta

Równaniem Clairauta nazywamy równanie

$$x = tx' + g(x'), \tag{2.40}$$

gdzie funkcja $g : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ jest dana.

Założmy, że równanie (2.40) ma rozwiązanie x, które ma drugą pochodną x'' i funkcja g jest różniczkowalna. Aby je znaleźć, zróżniczkujmy to równanie względem t. Wówczas otrzymujemy równanie

$$x' = x' + tx'' + g'(x')x'',$$

a po redukcji

$$x''(t + g'(x')) = 0.$$

Chcemy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x''(t + g'(x')) = 0 \\ x = tx' + g(x') \end{cases}. \tag{2.41}$$

Układ ten rozpada się na dwa prostsze układy

$$\begin{cases} x'' = 0 \\ x = tx' + g(x') \end{cases}, \tag{2.42}$$

$$\begin{cases} t + g'(x') = 0 \\ x = tx' + g(x') \end{cases}. \tag{2.43}$$

W układzie (2.42) z pierwszego równania obliczamy $x' = C$, podstawiamy tę wielkość do drugiego równania i otrzymujemy jednoparametrową rodzinę prostych

$$x = Ct + g(C) \tag{2.44}$$

z parametrem C, które są rozwiązaniami (2.40). Z układu (2.43) uzyskujemy rozwiązanie równania Clairauta w postaci parametrycznej

$$\begin{cases} t(p) = -g'(p) \\ x(p) = -g'(p)p + g(p) \end{cases} \tag{2.45}$$

z parametrem p, który jest efektem podstawienia $x' = p$. Rozwiązanie to jest osobliwe i takie, że problem Cauchy'ego zwykle nie ma jednoznaczności rozwiązania w każdym punkcie jego wykresu. Ma to miejsce np. wtedy, gdy jego wykres jest tzw. obwiednią jednoparametrowej rodziny prostych (2.44).

Definicja 2.2. Krzywą l nazywamy obwiednią rodziny krzywych $\Phi(t, x; C) = 0$, gdy jest ona styczna w każdym swoim punkcie do co najmniej jednej krzywej z tej rodziny i każda krzywa z tej rodziny jest styczna do l w jakimś punkcie.

Twierdzenie 2.4. *Jeśli w równaniu (2.40) pochodna $g''(p)$ jest stałego znaku i $g''(p) \not\equiv 0$, to krzywa parameytryczna (2.45) jest obwiednią jednoparametrowej rodziny prostych (2.44).*

Dowód. Ponieważ g'' ma stały znak i nie jest tożsamościowo równa zeru, więc g' jest silnie monotoniczna, a co za tym idzie g' jest różnowartościowa. Krzywa parametryczna (2.45) jest generowana przez układ (2.43), z czego wnioskujemy, że

$$x'(t) = (g')^{-1}(-t)$$

i rozważaną krzywą można zapisać jawnym wzorem

$$x(t) = t(g')^{-1}(-t) + g\Big((g')^{-1}(-t)\Big).$$

Ustalmy dowolny punkt $(t_0, x(t_0))$ należący do krzywej $x(t)$. Poszukajmy prostej z rodziny (2.44) stycznej do tej krzywej w tym punkcie. Korzystając ze znanego wzoru na styczną

$$x = x'(t_0)(t - t_0) + x(t_0),$$

mamy w naszym przypadku:

$$x = (g')^{-1}(-t_0)(t - t_0) + t_0(g')^{-1}(-t_0) + g\Big((g')^{-1}(-t_0)\Big),$$

$$x = (g')^{-1}(-t_0)t + g\Big((g')^{-1}(-t_0)\Big).$$

Wystarczy położyć

$$C := (g')^{-1}(-t_0).$$

Teraz ustalmy dowolną prostą z rodziny (2.44) i znajdźmy punkt $(t_0, x(t_0))$ należący do krzywej $x(t)$, w którym ta prosta jest do niej styczna. Zaproponujmy

$$t_0 := -g'(C).$$

A stąd

$$C = (g')^{-1}(-t_0).$$

Zatem zadaną prostą możemy zapisać wzorem

$$x = (g')^{-1}(-t_0)t + g\Big((g')^{-1}(-t_0)\Big).$$

Rozumując jak wyżej, wnioskujemy, że jest ona styczna do krzywej $x(t)$ w punkcie $(t_0, x(t_0))$.

Przykład 2.10. Rozwiązać równanie

$$x = tx' + (x')^2. \tag{2.46}$$

Różniczkując równanie (2.46) względem t, otrzymujemy równanie

$$x''(t + 2x') = 0.$$

Zatem

$$x'' = 0 \quad \text{lub} \quad t + 2x' = 0. \tag{2.47}$$

Z pierwszego równania w (2.47) wynika, że $x' = C$, a więc rozwiązaniem (2.46) jest jednoparametrowa rodzina prostych

$$x = Ct + C^2.$$

Poszukajmy obwiedni tej rodziny. Kładąc $x' = p$ w drugim równaniu w (2.47), mamy

$$\begin{cases} t = -2p \\ x = -2p^2 + p^2 \end{cases}.$$

Rugujemy parametr p, obliczając z pierwszego równania $p = -\frac{1}{2}t$ i wstawiając to do równania drugiego w powyższym układzie. W ten sposób znajdujemy obwiednię postaci

$$x = -\frac{1}{4}t^2.$$

Zwróćmy uwagę, że $g(p) = p^2$, a więc pochodna $g''(p) = 2$ jest stałego znaku tak, jak założono w twierdzeniu 2.4. Nietrudno sprawdzić, że krzywą całkową będzie również każda krzywa powstała z łuku tej paraboli i stycznej do niej, dana wzorem

$$x_\alpha = \begin{cases} -\frac{1}{4}t^2, & t \leqslant \alpha \\ -\frac{1}{2}\alpha t + \frac{1}{4}\alpha^2, & t > \alpha \end{cases}$$

oraz

$$x_\alpha = \begin{cases} -\frac{1}{2}\alpha t + \frac{1}{4}\alpha^2, & t \leqslant \alpha \\ -\frac{1}{4}t^2, & t > \alpha \end{cases},$$

gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$ jest dowolnie ustalona.

Przykład 2.11. Rozwiązać równanie

$$x = tx' + (x')^2 - \cos x'. \tag{2.48}$$

Postępując analogicznie jak w przykładzie 2.10, mamy

$$x''(t + 2x' + \sin x') = 0.$$

Zatem jednoparametrowa rodzina prostych i krzywa parametryczna dane są odpowiednio wzorami:

$$x = Ct + C^2 - \cos C,$$

$$\begin{cases} t = -2p - \sin p \\ x = (-2p - \sin p)p + p^2 - \cos p \end{cases},$$

gdzie po uproszczeniu

$$\begin{cases} t = -2p - \sin p \\ x = -p^2 - p\sin p - \cos p \end{cases}.$$

Na podstawie twierdzenia 2.4 krzywa parametryczna również jest obwiednią jednoparametrowej rodziny prostych, gdyż $g(p) = p^2 - \cos p$ i pochodna $g''(p) = 2 + \cos p$ jest stałego znaku.

Do równania Clairauta dochodzimy zawsze, gdy poszukujemy krzywej na podstawie właściwości jej stycznej, nie zależących od punktu styczności. Przy tym, z geometrycznego punktu widzenia, najbardziej interesujące jest rozwiązanie osobliwe.

Przykład 2.12. Znaleźć wszystkie krzywe, do których styczna tworzy z osiami współrzędnych trójkąt o stałym polu S. Zakładamy, że krzywe i trójkąt leżą w tej samej ćwiartce układu współrzędnych.

Bez straty ogólności ograniczymy się do pierwszej ćwiartki układu współrzędnych. Oznaczmy szukaną krzywą przez $x(t)$. Styczna do $x(t)$ w dowolnie ustalonym punkcie t_0 dana jest wzorem

$$x = x'(t_0)(t - t_0) + x(t_0).$$

Przecina ona osie współrzędnych odpowiednio w punktach

$$t = t_0 - \frac{x(t_0)}{x'(t_0)}, \quad x = x(t_0) - t_0 x'(t_0).$$

Wnosimy stąd, że

$$S = \frac{1}{2}\Big(t_0 - \frac{x(t_0)}{x'(t_0)}\Big)\Big(x(t_0) - t_0 x'(t_0)\Big).$$

W dalszym ciągu będziemy pisać t, x, x' zamiast t_0, $x(t_0)$, $x'(t_0)$ i wielkości te będziemy traktować jako zmienne. Przekształcając powyższe równanie, mamy

$$-2Sx' = (x - tx')^2.$$

Pierwiastkujemy

$$|x - tx'| = \sqrt{2S}\sqrt{-x'}$$

i finalnie otrzymujemy równanie Clairauta

$$x = tx' + \sqrt{2S}\sqrt{-x'}, \tag{2.49}$$

bo $x' < 0$, co pociąga $x - tx' > 0$. Po zróżniczkowaniu i redukcji dochodzimy do równania

$$x''\Big(t - \frac{\sqrt{2S}}{2\sqrt{-x'}}\Big) = 0.$$

Podobnie jak w poprzednich przykładach rozwiązaniami są odpowiednio jednoparametrowa rodzina prostych

$$x = Ct + \sqrt{2S}\sqrt{-C} \tag{2.50}$$

i krzywa parametryczna

$$\begin{cases} t = \frac{\sqrt{2S}}{2\sqrt{-p}} \\ x = tp + \sqrt{2S}\sqrt{-p} \end{cases},$$

którą można napisać w postaci

$$\begin{cases} t = \frac{\sqrt{2S}}{2\sqrt{-p}} \\ x = \frac{\sqrt{2S}}{2}\sqrt{-p} \end{cases}.$$

Aby wyrugować parametr p, obliczamy z pierwszego równania $\sqrt{-p} = \frac{\sqrt{2S}}{2t}$ i wstawiamy do równania drugiego, co daje nam jawny wzór na żądaną krzywą

$$x = \frac{S}{2t}. \tag{2.51}$$

Jest to równanie hiperboli równoosiowej. Znaną własnością dowolnej hiperboli jest stałość pola zawartego między asymptotami (tutaj osiami współrzędnych), a styczną do hiperboli. Zauważmy, że również tutaj hiperbola jest obwiednią rodziny prostych, bo $g(p) = \sqrt{2S}\sqrt{-p}$, $p < 0$ i $g''(p) = \frac{\sqrt{2S}}{4p\sqrt{-p}} < 0$. Dodajmy, że każda prosta (2.50) też ma żądaną własność. A skoro tak, to każda krzywa

$$x_\alpha = \begin{cases} \frac{S}{2t}, & t \leqslant \alpha \\ -\frac{S}{2\alpha^2}t + \frac{S}{\alpha}, & t > \alpha \end{cases} \tag{2.52}$$

oraz

$$x_\alpha = \begin{cases} -\frac{S}{2\alpha^2}t + \frac{S}{\alpha}, & t \leqslant \alpha \\ \frac{S}{2t}, & t > \alpha \end{cases}, \tag{2.53}$$

gdzie $\alpha > 0$ jest dowolnie ustalona, też ją ma. Są to wszystkie szukane krzywe.

2.8 Równanie Lagrange'a

Związek postaci

$$x = tf(x') + g(x'), \tag{2.54}$$

gdzie funkcje $f, g : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$, f nie jest identycznością, są dane, nazywamy równaniem Lagrange'a.

Podobnie jak w przypadku równania Clairauta (2.40), załóżmy, że równanie (2.54) ma rozwiązanie x, które ma drugą pochodną x'' i funkcje f, g są różniczkowalne. W celu znalezienia tego rozwiązania, na początku postępujemy tak samo, jak w przypadku równania Clairauta, czyli różniczkujemy to równanie względem t. Mamy więc

$$x' = f(x') + tf'(x')x'' + g'(x')x''.$$

Chcemy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x' = f(x') + tf'(x')x'' + g'(x')x'', \\ x = tf(x') + g(x'). \end{cases} \tag{2.55}$$

Podstawmy

$$x' = p, \quad p = p(t).$$

Z pierwszego równania otrzymujemy równanie nieliniowe

$$p = f(p) + tf'(p)\frac{dp}{dt} + g'(p)\frac{dp}{dt} \tag{2.56}$$

z funkcją niewiadomą $p(t)$. Jeśli uda nam się to równanie rozwiązać i dodatkowo uzyskać jawny wzór na $p(t)$, to rozwiązanie ogólne równania (2.54) wyrazi się wzorem

$$x = tf(p(t)) + g(p(t)). \tag{2.57}$$

Jeśli jednak nie potrafimy tego zrobić, to mnożymy równanie (2.56) obustronnie przez $\frac{dt}{dp}$ i otrzymujemy równanie liniowe z funkcją niewiadmomą $t(p)$,

$$(p - f(p))\frac{dt}{dp} = f'(p)t + g'(p). \tag{2.58}$$

Rozważmy dwa przypadki.

1° Niech $f(p_0) = p_0$ dla pewnych liczb $p_0 \in I$. Wówczas każda prosta

$$x = p_0 t + g(p_0) \tag{2.59}$$

jest rozwiązaniem równania (2.54). Są to rozwiązania osobliwe i takie, że problem Cauchy'ego zwykle nie ma jednoznaczności rozwiązania w każdym punkcie ich wykresu.

2° Załóżmy, że $f(p) \neq p$ dla każdego $p \in I$. Po podzieleniu równania (2.58) przez $(p - f(p))$ dochodzimy do równania liniowego w postaci normalnej

$$\frac{dt}{dp} = \frac{f'(p)}{p - f(p)} t + \frac{g'(p)}{p - f(p)}. \tag{2.60}$$

Rozwiązanie ogólne równania (2.60) można zapisać wzorem

$$t(p) = Ca(p) + b(p), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Jeśli potrafimy z tego związku wyznaczyć $p(t)$, to rozwiązanie ogólne równania (2.54) przyjmie postać (2.57). W przeciwnym razie szukane rozwiązanie możemy przedstawić w postaci jednoparametrowej rodziny krzywych całkowych

$$\begin{cases} t(p) = Ca(p) + b(p) \\ x(p) = [Ca(p) + b(p)]\, f(p) + g(p) \end{cases} \tag{2.61}$$

z parametrem $C \in \mathbb{R}$, z których każda sparametryzowana jest parametrem p.

Przykład 2.13. Wyznaczyć rozwiązanie równania

$$x = t + (x')^3 - 3x'. \tag{2.62}$$

Różniczkując względem t, otrzymujemy

$$x' = 1 + 3(x')^2 x'' - 3x''.$$

Podstawmy

$$x' = p, \quad p = p(t).$$

Wnosimy stąd, że

$$p = 1 + 3p^2 \frac{dp}{dt} - 3\frac{dp}{dt},$$

a po przekształceniu

$$3(p^2 - 1)\frac{dp}{dt} = p - 1.$$

Jest to na tyle proste równanie, że możemy je efektywnie rozwiązać. Rozważmy dwa przypadki.

1° Jeśli $p = 1$, to $x = t + 1 - 3$, czyli $x = t - 2$ jest rozwiązaniem.

2° Niech $p \neq 1$, co oznacza, że szukamy rozwiązań $x(t) \neq t - 2$ w każdym punkcie określoności. Rozwiązując równanie o zmiennych rozdzielonych

$$3(p+1)\frac{dp}{dt} = 1,$$

mamy:

$$3\int (p+1)\, dp = \int dt,$$

$$\frac{3}{2}p^2 + 3p = t + C.$$

Obliczamy $p(t)$:

$$p^2 + 2p = \frac{2}{3}t + C,$$

$$(p+1)^2 = \frac{2}{3}t + C,$$

$$|p+1| = \sqrt{\frac{2}{3}t + C},$$

$$p = \pm\sqrt{\frac{2}{3}t + C} - 1.$$

(Zamiast $\frac{2}{3}C$ i $\frac{2}{3}C+1$ pozostawiliśmy C, bo jest to stała dowolna). Wstawiając tak wyznaczone funkcje $p(t)$ do równania wyjściowego (2.62), otrzymujemy rozwiązanie

$$x = t + \left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}t + C} - 1\right)^3 - 3\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}t + C} - 1\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Przykład 2.14. Rozwiązać równanie

$$x = t(1 + x') + (x')^3. \tag{2.63}$$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie zróżniczkujmy względem t:

$$x' = 1 + x' + tx'' + 3(x')^2 x''.$$

Podstawmy

$$x' = p, \quad p = p(t).$$

A stąd otrzymujemy trudne nieliniowe równanie

$$0 = 1 + (t + 3p^2)\frac{dp}{dt}$$

względem $p(t)$, które staje się bardzo łatwym równaniem liniowym

$$\frac{dt}{dp} = -t - 3p^2$$

względem $t(p)$. Obliczamy t(p):

$$t_j = Ce^{-\int dp} = Ce^{-p},$$

$$t_s = C(p)e^{-p},$$

$$C'(p)e^{-p} = -3p^2,$$

$$C(p) = -3\int p^2 e^p \, dp = -3p^2 e^p + 6pe^p - 6e^p,$$

$$t_s = -3p^2 + 6p - 6,$$

$$t = Ce^{-p} - 3p^2 + 6p - 6.$$

Widać, że tym razem nie jesteśmy w stanie wyznaczyć $p(t)$. Szukane rozwiązanie możemy jednak wyrazić w postaci parametrycznej, wstawiając t do równania wyjściowego (2.63)

$$\begin{cases} t = Ce^{-p} - 3p^2 + 6p - 6 \\ x = (Ce^{-p} - 3p^2 + 6p - 6)(1 + p) + p^3 \end{cases}, \quad C \in \mathbb{R},$$

a po uproszczeniu

$$\begin{cases} t = Ce^{-p} - 3p^2 + 6p - 6 \\ x = C(1 + p)e^{-p} - 2p^3 + 2p^2 - 6 \end{cases}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2.9 Równanie Riccatiego

Równanie różniczkowe

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t), \tag{2.64}$$

gdzie funkcje $a, b, c : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ są dane, nazywamy równaniem Riccatiego, od nazwiska włoskiego matematyka Jacopo Riccatiego. Widać, że jeśli $c(t) \equiv 0$, $t \in I$, to jest to równanie Bernoulliego z wykładnikiem $\alpha = 2$, zaś w przypadku $a(t) \equiv 0$, $t \in I$ jest to równanie liniowe.

Nie istnieje ogólny analityczny sposób scałkowania równania Riccatiego, co spowodowane jest składnikiem c. W zastosowaniach fizycznych reprezentuje on zródło i jest nazywany członem reakcyjnym. Jeżeli jednak znamy jakieś rozwiązanie szczególne x_1, to przez podstawienie

$$u = x - x_1, \quad u = u(t)$$

można to równanie sprowadzić do równania Bernoulliego z wykładnikiem $\alpha = 2$ postaci

$$u' = \Big(2a(t)x_1(t) + b(t)\Big)u + a(t)u^2, \tag{2.65}$$

a takie równanie sprowadzamy za pomocą podstawienia

$$y = u^{-1}, \quad y = y(t)$$

do równania liniowego

$$y' = -\Big(2a(t)x_1(t) + b(t)\Big)y - a(t), \tag{2.66}$$

zgodnie z analizą przeprowadzoną w poprzednim rozdziale. Równanie liniowe (2.66) można też uzyskać bezpośrednio, podstawiając

$$x = x_1 + \frac{1}{y}, \quad y = y(t).$$

Ponieważ postać liniowa jest wygodna przy rozwiązywaniu konkretnych zadań, skupimy się teraz na jej wyprowadzeniu. Różniczkując powyższe podstawienie:

$$x' = x_1' - \frac{y'}{y^2}$$

i wstawiając do równania (2.64), otrzymujemy równość

$$\begin{aligned} x_1'(t) - \frac{y'}{y^2} &= a(t)\left(x_1(t) + \frac{1}{y}\right)^2 + b(t)\left(x_1(t) + \frac{1}{y}\right) + c(t) \\ &= a(t)x_1^2(t) + 2a(t)x_1(t)\frac{1}{y} + a(t)\frac{1}{y^2} + b(t)x_1(t) + b(t)\frac{1}{y} + c(t). \end{aligned}$$

Ponieważ x_1 jest rozwiązaniem równania (2.64), po redukcji mamy

$$-\frac{y'}{y^2} = \Big(2a(t)x_1(t) + b(t)\Big)\frac{1}{y} + a(t)\frac{1}{y^2},$$

a po pomnożeniu przez $-y^2$ - równanie (2.66).

Przykład 2.15. Wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania

$$x' = x^2 - (2t+1)x + t^2 + t + 1, \tag{2.67}$$

znając jego rozwiązanie szczególne $x_1(t) = t$. Podstawiając

$$x = t + \frac{1}{y},$$

otrzymujemy równanie o zmiennych rozdzielonych (jest to też równanie liniowe niejednorodne)

$$y' = y - 1,$$

którego rozwiązaniem jest funkcja

$$y = Ce^t + 1, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Zatem rozwiązanie ogólne równania wyjściowego jest postaci

$$x = t + \frac{1}{Ce^t + 1}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Twierdzenie 2.5. *Równanie Riccatiego*

$$x' = ax^2 + \frac{b}{t}x + \frac{c}{t^2}, \tag{2.68}$$

gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, ma rozwiązanie szczególne postaci $x_1(t) = \frac{d}{t}$, $d \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(b+1)^2 \geqslant 4ac$.

Dowód. Wstawiamy x_1 do równania (2.68) i mamy

$$-\frac{d}{t^2} = a\frac{d^2}{t^2} + b\frac{d}{t^2} + c\frac{1}{t^2},$$

a po pomnożeniu przez t^2:

$$-d = ad^2 + bd + c,$$

$$ad^2 + (b+1)d + c = 0.$$

Teza twierdzenia wynika ze wzoru

$$\Delta = (b+1)^2 - 4ac.$$

Przykład 2.16. Rozwiązać równanie

$$x' = x^2 - \frac{2}{t^2}. \tag{2.69}$$

Na podstawie twierdzenia 2.5 stwierdzamy, że można znaleźć rozwiązanie szczególne $x_1(t) = \frac{d}{t}$. Po podstawieniu do równania mamy

$$-\frac{d}{t^2} = \frac{d^2}{t^2} - \frac{2}{t^2},$$

a stąd

$$d^2 + d - 2 = 0.$$

Zatem $d_1 = 1$, $d_2 = -2$.

Połóżmy
$$x_1(t) = \frac{1}{t}$$
i podstawmy
$$x = \frac{1}{t} + \frac{1}{y}.$$
Otrzymujemy liniowe równanie niejednorodne
$$y' = -\frac{2}{t}y - 1.$$
Rozwiązaniem ogólnym skojarzonego z nim równania jednorodnego jest funkcja
$$y_j = C\frac{1}{t^2}, \quad C \in \mathbb{R},$$
zaś rozwiązaniem szczególnym jest funkcja
$$y_s = -\frac{1}{3}t$$
i w efekcie rozwiązanie ogólne tego równania dane jest wzorem
$$y = C\frac{1}{t^2} - \frac{1}{3}t, \quad C \in \mathbb{R}.$$
Uwzględniając podstawienie, rozwiązaniem równania wyjściowego jest funkcja
$$x = \frac{1}{t} + \frac{1}{C\frac{1}{t^2} - \frac{1}{3}t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Pokażemy teraz, że każde równanie Riccatiego (2.64) takie, że funkcja a jest różniczkowalna i $a(t) \neq 0$, $t \in I$ można przez podstawienie
$$x = \varphi(t)y + \psi(t)$$
sprowadzić do równania Riccatiego
$$y' = y^2 + c_1(t). \tag{2.70}$$
Rzeczywiście, zróżniczkujmy podstawienie:
$$x' = \varphi'(t)y + \varphi(t)y' + \psi'(t)$$
i wstawmy do równania (2.64):
$$\varphi'(t)y + \varphi(t)y' + \psi'(t) = a(t)\left(\varphi(t)y + \psi(t)\right)^2 + b(t)\left(\varphi(t)y + \psi(t)\right) + c(t),$$
$$\varphi'(t)y + \varphi(t)y' + \psi'(t) = a(t)\varphi^2(t)y^2 + 2a(t)\varphi(t)\psi(t)y + a(t)\psi^2(t) + b(t)\varphi(t)y + b(t)\psi(t) + c(t).$$
Następnie ostatni związek pomnóżmy przez $a(t)$ i odpowiednio pogrupujmy składniki, co implikuje tożsamość
$$\begin{aligned}\Big(a(t)\varphi(t)\Big)y' =& \Big(a(t)\varphi(t)\Big)^2 y^2 + \Big(2a^2(t)\varphi(t)\psi(t) + a(t)b(t)\varphi(t) - a(t)\varphi'(t)\Big)y \\ &+ \Big(a^2(t)\psi^2(t) + a(t)b(t)\psi(t) + a(t)c(t) - a(t)\psi'(t)\Big).\end{aligned}$$

Rozważmy układ równań różniczkowo-algebraicznych

$$\begin{cases} a(t)\varphi(t) = 1, \\ a(t)\varphi'(t) = 2a^2(t)\varphi(t)\psi(t) + a(t)b(t)\varphi(t). \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego ukladu są funkcje:

$$\varphi(t) = \frac{1}{a(t)}, \quad \psi(t) = -\frac{a'(t) + a(t)b(t)}{2a^2(t)}.$$

W równaniu (2.70) kładziemy

$$c_1(t) = a^2(t)\psi^2(t) + a(t)b(t)\psi(t) + a(t)c(t) - a(t)\psi'(t).$$

Poniżej sformułujemy i uzasadnimy algorytm rozwiązywania równania Riccatiego (2.70) w przypadku, gdy $c_1(t) = \alpha t^m$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $k := \frac{m}{2m+4} \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$ i $m \neq -2$.

1. Podstawiamy:

$$y = \frac{z}{t}, \quad u = t^{m+2} \quad (z = z(u),\ u = u(t)),$$

co w istocie generuje zależność

$$z(u(t)) = ty(t).$$

Po jej zróżniczkowaniu, wstawieniu do równania (2.70), pomnożeniu przez t i podzieleniu przez $m+2$ otrzymujemy kolejno związki:

$$z'u' = y + ty',$$

$$(m+2)t^{m+1}z' = y + t(y^2 + \alpha t^m),$$

$$(m+2)uz' = z + z^2 + \alpha u,$$

$$uz' - \frac{1}{m+2}z - \frac{1}{m+2}z^2 = \frac{\alpha}{m+2}u.$$

Biorąc pod uwagę tożsamość $\frac{1}{m+2} = \frac{1}{2} - k$ i kładąc $\beta_0 = k - \frac{1}{2}$, $\gamma_0 = \beta_0$, $\delta_0 = -\alpha\beta_0$, mamy równanie

$$uz' + \beta_0 z + \gamma_0 z^2 = \delta_0 u. \tag{2.71}$$

2. Jeśli $\beta_0 < -\frac{1}{2}$, to robimy ciąg $n \in \mathbb{N}$ podstawień:

$$v_0 = z, \quad v_i = \frac{u}{A_i + v_{i+1}}, \quad A_i := \frac{1+\beta_i}{\delta_i} \quad (v_i = v_i(u),\ v_{i+1} = v_{i+1}(u)),$$

z których każde prowadzi do równania postaci

$$uv'_{i+1} + \beta_{i+1}v_{i+1} + \gamma_{i+1}v_{i+1}^2 = \delta_{i+1}u, \tag{2.72}$$

gdzie $\beta_{i+1} = \beta_i + 1$, $i = 0, ..., n-1$, aż uzyskamy równanie z $\beta_n = -\frac{1}{2}$. Jeśli $\beta_0 > -\frac{1}{2}$, to robimy ciąg $n \in \mathbb{N}$ podstawień:

$$v_0 = z, \quad v_i = A_i + \frac{u}{v_{i+1}}, \quad A_i := -\frac{\beta_i}{\gamma_i} \quad (v_i = v_i(u),\ v_{i+1} = v_{i+1}(u)),$$

z których każde prowadzi do równania (2.72), gdzie $\beta_{i+1} = \beta_i - 1$, $i = 0, ..., n-1$, aż uzyskamy równanie z $\beta_n = -\frac{1}{2}$.

3. Podstawiamy

$$v_n = \sqrt{u}\,w \quad (w = w(u)),$$

różniczkujemy

$$v_n' = \frac{1}{2\sqrt{u}}w + \sqrt{u}\,w',$$

wstawiamy do równania (2.72) i dochodzimy do prostego równania o zmiennych rozdzielonych

$$w' = \frac{1}{\sqrt{u}}(-\gamma_n w^2 + \delta_n). \tag{2.73}$$

Przykład 2.17. Rozwiązać równanie

$$x' = x^2 + \frac{1}{t^4}. \tag{2.74}$$

Równanie to jest postaci (2.70), gdzie $c_1(t) = t^{-4}$, $\alpha = 1$, $m = -4$, przy czym funkcją szukaną jest x zamiast y. A stąd $k = 1$ i możemy skorzystać z algorytmu opisanego wyżej. Najpierw podstawmy

$$x = \frac{z}{t}, \quad u = t^{-2} \quad (z = z(u),\ u = u(t)).$$

Wykonując elementarne obliczenia, otrzymujemy równanie

$$uz' + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^2 = -\frac{1}{2}u. \tag{2.75}$$

Ponieważ $\beta_0 = \frac{1}{2}$, więc teraz podstawmy

$$z = -1 + \frac{u}{v_1} \quad (v_1 = v_1(u)).$$

Wstawiając do równania (2.75), po prostych przekształceniach otrzymujemy równanie

$$uv_1' - \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_1^2 = \frac{1}{2}u. \tag{2.76}$$

Widać, że $\beta_1 = -\frac{1}{2}$ i możemy podstawić

$$v_1 = \sqrt{u}w \quad (w = w(u)),$$

co prowadzi do równania

$$w' = \frac{1}{2\sqrt{u}}(w^2 + 1). \tag{2.77}$$

Rozdzielamy zmienne i całkujemy:

$$\int \frac{dw}{w^2+1} = \int \frac{du}{2\sqrt{u}},$$
$$\operatorname{arctg} w = \sqrt{u} + C,$$
$$w = \operatorname{tg}(\sqrt{u} + C).$$

Zgodnie z podstawieniami obliczamy:

$$\frac{v_1}{\sqrt{u}} = \operatorname{tg}(\sqrt{u} + C),$$
$$v_1 = \sqrt{u}\operatorname{tg}(\sqrt{u} + C),$$
$$\frac{u}{z+1} = \sqrt{u}\operatorname{tg}(\sqrt{u} + C),$$
$$z = \sqrt{u}\operatorname{ctg}(\sqrt{u} + C) - 1,$$
$$tx = \sqrt{t^{-2}}\operatorname{ctg}(\sqrt{t^{-2}} + C) - 1,$$
$$x = \frac{1}{t|t|}\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{|t|} + C\right) - \frac{1}{t}.$$

Przykład 2.18. Rozwiązać równanie

$$x' = x^2 + \frac{1}{t^{\frac{8}{5}}}. \tag{2.78}$$

Analogicznie jak w przykładzie 2.17, równanie to jest postaci (2.70), gdzie $c_1(t) = t^{-\frac{8}{5}}$, $\alpha = 1$, $m = -\frac{8}{5}$, przy czym funkcją szukaną jest x zamiast y. Zatem $k = -2$ i znowu możemy skorzystać z zaproponowanego wyżej algorytmu. Podstawiając

$$x = \frac{z}{t}, \quad u = t^{\frac{2}{5}} \quad (z = z(u),\ u = u(t)),$$

otrzymujemy równanie

$$uz' - \frac{5}{2}z - \frac{5}{2}z^2 = \frac{5}{2}u. \tag{2.79}$$

Ponieważ $\beta_0 = -\frac{5}{2}$, więc teraz podstawmy

$$z = \frac{u}{-\frac{3}{5} + v_1} \quad (v_1 = v_1(u)).$$

Po wstawieniu do równania (2.79), w wyniku prostych przekształceń dochodzimy do równania

$$uv_1' - \frac{3}{2}v_1 + \frac{5}{2}v_1^2 = -\frac{5}{2}u. \tag{2.80}$$

Skoro $\beta_1 = -\frac{3}{2}$, to podstawmy jeszcze raz

$$v_1 = \frac{u}{\frac{1}{5} + v_2} \quad (v_2 = v_2(u)),$$

wstawmy do równania (2.80), a to implikuje równanie

$$uv_2' - \frac{1}{2}v_2 - \frac{5}{2}v_2^2 = \frac{5}{2}u. \tag{2.81}$$

Tym razem $\beta_2 = -\frac{1}{2}$ i możemy podstawić

$$v_2 = \sqrt{u}w \quad (w = w(u)),$$

co prowadzi do równania

$$w' = \frac{5}{2\sqrt{u}}(w^2 + 1). \tag{2.82}$$

Rozdzielamy zmienne i całkujemy:

$$\int \frac{dw}{w^2+1} = \int \frac{5\,du}{2\sqrt{u}},$$
$$\mathrm{arctg} w = 5\sqrt{u} + C,$$
$$w = \mathrm{tg}\,(5\sqrt{u} + C).$$

Uwzględniając wszystkie podstawienia, ostatecznie

$$x = \frac{5\left(5\sqrt[5]{t}\,\mathrm{tg}\,(5\sqrt[5]{t} + C) + 1\right)}{5\sqrt[5]{t^4}\left(5\sqrt[5]{t} - 3\,\mathrm{tg}\,(5\sqrt[5]{t} + C)\right) - 3\sqrt[5]{t^3}}$$

jest rozwiązaniem.

Uwaga 2.3. Równanie

$$x' = x^2 + \frac{2}{t^2}$$

nie ma rozwiązania postaci $x_1 = \frac{d}{t}$ (porównaj z (2.69)). Ponadto nie można go rozwiązać przy pomocy powyższego algorytmu, bo $m = -2$. Z tego samego powodu równania (2.69) również nie można rozwiązać, używając tegoż algorytmu. Dodajmy, że równania (2.74) i (2.78) nie mają rozwiązań $x_1 = \frac{d}{t}$.

2.10 Równania drugiego rzędu sprowadzalne do równań pierwszego rzędu

I Najprostszy jest przypadek

$$x'' = f(t). \tag{2.83}$$

Wtedy po prostu dwukrotnie całkujemy.

Przykład 2.19. Rozwiązać równanie

$$x'' = t. \tag{2.84}$$

Po scałkowaniu mamy równanie

$$x' = \frac{1}{2}t^2 + C_1,$$

które znowu całkujemy, otrzymując rozwiązanie

$$x = \frac{1}{6}t^3 + C_1 t + C_2.$$

II Teraz niech

$$F(t, x', x'') = 0. \tag{2.85}$$

Zróbmy podstawienie

$$y = x', \quad y = y(t).$$

A stąd

$$x'' = y'$$

i równanie (2.85) sprowadza się do równania

$$F(t, y, y') = 0. \tag{2.86}$$

Przykład 2.20. Rozwiązać równanie

$$x'' = t(x')^2 \tag{2.87}$$

Zgodnie z powyższym podstawieniem równanie to przechodzi w równanie o rozdzielonych zmiennych postaci

$$y' = ty^2,$$

którego rozwiązaniami są funkcje:

$$y(t) \equiv 0, \quad y = -\frac{1}{\frac{1}{2}t^2 + C_1}.$$

Dalej musimy rozwiązać równania:

$$x' = 0, \quad x' = -\frac{1}{\frac{1}{2}t^2 + C_1}.$$

Po elementarnych obliczeniach otrzymujemy:

$$x = C,$$

$$x = \frac{2}{t} + C_2, \quad \text{gdy} \quad C_1 = 0,$$

$$x = -\frac{2}{\sqrt{C_1}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{C_1}} + C_2, \quad \text{gdy} \quad C_1 > 0,$$

$$x = -\frac{1}{\sqrt{-C_1}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{-C_1}}{t+\sqrt{-C_1}}\right| + C_2, \quad \text{gdy} \quad C_1 < 0.$$

(Zamiast $2C_1$ napisaliśmy C_1, bo jest to dowolna stała).

III Rozważmy przypadek
$$F(x,x',x'')=0. \tag{2.88}$$
Zróbmy trudniejsze podstawienie niż poprzednio
$$y=x', \quad y=y(x).$$
Zatem
$$x''=y'x'=y'y$$
i równanie (2.88) sprowadza się do równania
$$F(x,y,yy')=0, \tag{2.89}$$
w którym x jest zmienną niezależną.

Przykład 2.21. Rozwiązać równanie
$$xx'x''-(x')^3-(x'')^2=0. \tag{2.90}$$
Podstawiając jak wyżej, otrzymujemy równanie
$$xy^2y'-y^3-y^2(y')^2=0.$$
Rozważmy dwa przypadki.

1° Funkcja $y(x)\equiv 0$ jest rozwiązaniem, co pociąga $x'=0$ i ostatecznie $x=C$, $C\in\mathbb{R}$ jest rozwiązaniem równania (2.90).

2° Niech $y\neq 0$. Równanie (2.90) sprowadza się do równania Clairauta
$$y=xy'-(y')^2.$$
Postępując analogicznnie jak w przykładzie 2.10, znajdujemy odpowiednio jednoparametrową rodzinę prostych i ich obwiednię:
$$y=C_1x-C_1^2, \quad y=\frac{1}{4}x^2.$$
Uwzględniając podstawienie, musimy jeszcze rozwiązać równania:
$$x'=C_1x-C_1^2, \quad x'=\frac{1}{4}x^2.$$
Przyjmijmy, że $C_1\neq 0$, bo wtedy rozwiązaniami są funkcje stałe znalezione juz w pierwszym przypadku. Z tego samego powodu pomińmy rozwiązanie $x(t)\equiv 0$ w drugim równaniu. Szukanymi rozwiązaniami są:
$$\ln|x-C_1|=C_1t+C_2, \quad x=-\frac{4}{t+C}.$$

IV Zbadajmy sytuację ogólną
$$F(t,x,x',x'')=0. \tag{2.91}$$

Definicja 2.3. Funkcję F zmiennych t,u_1,u_2,u_3 nazywamy jednorodną względem zmiennych u_1,u_2,u_3 stopnia $m\in\mathbb{N}$, gdy
$$F(t,ru_1,ru_2,ru_3)=r^mF(t,u_1,u_2,u_3), \quad r\in\mathbb{R}.$$
Jeśli F jest jednorodna względem zmiennych u_1,u_2,u_3 stopnia m, to równanie (2.91) nazywamy jednorodnym względem x,x',x'' stopnia m.

Pokażemy, że równanie (2.91) jednorodne względem x, x', x'' stopnia m można przez podstawienie

$$x' = xy, \quad y = y(t)$$

sprowadzić do równania pierwszego rzędu. Rzeczywiście, uwzględniając pochodną

$$x'' = x'y + xy' = x(y^2 + y'),$$

otrzymujemy

$$F(t, x, xy, x(y^2 + y')) = x^m F(t, 1, y, y^2 + y'),$$

a tym samym po podzieleniu przez x^m, relacja

$$F(t, 1, y, y^2 + y') = 0 \tag{2.92}$$

jest żądanym równaniem. Oczywiście wcześniej zauważamy, że $x(t) \equiv 0$ jest rozwiązaniem.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że równanie (2.90) w przykładzie 2.21 nie jest jednorodne względem x, x', x'', ponieważ nie w każdym składniku suma wykładników funkcji x i jej pochodnych jest taka sama. Jest ona równa odpowiednio trzy, trzy i dwa.

Przykład 2.22. Rozwiązać równanie

$$t^2 x x'' = (x - tx')^2. \tag{2.93}$$

Aby się przekonać, że jest to równanie jednorodne względem x, x', x'' stopnia dwa, wystarczy podnieść prawą stronę do kwadratu,

$$t^2 x x'' = x^2 - 2txx' + t^2(x')^2$$

i zauważyć, że w każdym składniku suma wykładników funkcji x i jej pochodnych jest równa dwa.

Wykorzystując zaproponowane podstawienie, mamy

$$t^2x^2(y^2 + y') = x^2 - 2tx^2y + t^2x^2y^2 = 0.$$

Rozważmy dwa przypadki.

1° Funkcja $x(t) \equiv 0$ jest rozwiązaniem.

2° Załóżmy, że $x \neq 0$. Dzielimy ostatni związek przez x^2, następnie redukujemy, dzielimy przez t^2 i otrzymujemy równanie liniowe

$$y' = -\frac{2}{t}y + \frac{1}{t^2}.$$

Obliczamy:

$$y_j = C_1 e^{-2\int \frac{dt}{t}} = C_1 e^{-2\ln|t|} = C_1 \frac{1}{t^2},$$

$$y_s = C_1(t)\frac{1}{t^2},$$

$$C_1'(t)\frac{1}{t^2} = \frac{1}{t^2},$$

$$C_1(t) = \int dt = t,$$

$$y_s = \frac{1}{t},$$

$$y = C_1 \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}.$$

Rozwiązując równanie

$$x' = \Big(C_1 \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} \Big) x,$$

znajdujemy rozwiązanie równania (3.3)

$$\ln|x| = -C_1 \frac{1}{t} + \ln|t| + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2.11 Zadania

1. Rozwiązać równania o rozdzielonych zmiennych:

   1.1. $x' = t^2 + t + 1$,

   1.2. $x' = \operatorname{tg} t + t^2 - 1$,

   1.3. $x' = 3t + 5$,

   1.4. $x' = 4t^2 - 9$,

   1.5. $x' = 3t^2 + 6$,

   1.6. $x' = (2t+3)\,x$,

   1.7. $x' = \frac{t}{(1-t)x}$,

   1.8. $x' = \frac{t^3 x}{1-t^2}$,

   1.9. $x' = 2tx - tx^2$,

   1.10. $x' = x^4 e^{2t}$,

   1.11. $(t^3 x - 8x - t^3 + 8)\,x' = -x - x^2 + t^2 x + t^2 x^2$,

   1.12. $x' = x \sin \ln t + x \cos \ln t + x$,

   1.13. $(1+x^2)\,(e^{2t} - e^x x') - (1+x)\,x' = 0$.

2. Rozwiązać równania jednorodne:

   2.1. $x' = \frac{x}{t} + \frac{t}{x}$,

   2.2. $x' = \frac{x}{t} - \left(\frac{x}{t}\right)^2$,

   2.3. $x' = 1 + \frac{x}{t} + \left(\frac{x}{t}\right)^2$,

   2.4. $x' = \frac{1}{\sin 2\frac{x}{t}} + \frac{x}{t}$,

   2.5. $x' = \frac{x^3 + t^2 x}{t^3}$,

   2.6. $x' = \frac{t^2 + 2tx - x^2}{x^2 + 2tx - t^2}$,

   2.7. $tx' = \sqrt{t^2 - 4x^2} + x$,

   2.8. $tx' - x = (t+x) \ln \frac{t+x}{t}$,

   2.9. $tx' = x\,(1 + \ln x - \ln t)$,

   2.10. $x' = e^{2\frac{x}{t}} + \frac{x}{t}$,

   2.11. $tx' - x = t \operatorname{tg} \frac{x}{t}$,

   2.12. $t\,(x + tx') \cos \frac{x}{t} = x\,(tx' - x) \sin \frac{x}{t}$.

3. Rozwiązać równania wymierne:

   3.1. $x' = (8t + 2x + 1)^2$,
   3.2. $x' = \frac{1}{t+x}$,
   3.3. $x' = 10^{t+x}$,
   3.4. $x' = \sin(t - x)$,
   3.5. $x' = \frac{2t+3x}{t}$,
   3.6. $x' = \frac{x+t}{x-t}$,
   3.7. $x' = \frac{-3t-3x+1}{t+x+1}$,
   3.8. $x' = -\frac{t-2x+5}{2t-5x+4}$,
   3.9. $x' = -\frac{x+t-2}{t-x-4}$,
   3.10. $x' = \left(1 + \frac{x-1}{2t}\right)^2$,
   3.11. $x' = (t + x + 1)^3 + 5(t + x + 1)^2 - t - x - 7$.

4. Rozwiązać równania liniowe:

   4.1. $x' = \frac{1}{t}x + t^2 \sin 5t$,
   4.2. $x' = tx + t^3$,
   4.3. $x' = \frac{3}{t}x + t$,
   4.4. $x' = 2x + (e^t - t)$,
   4.5. $x' = -(\sin t)\, x + \sin t$,
   4.6. $x' = (t + 2)\, x + t + 2$,
   4.7. $x' = -2x + e^{3t}$,
   4.8. $x' = -\frac{1}{t}x + \sqrt{t}$,
   4.9. $(1 + t^2)\, x' - 2tx = (1 + t^2)^2$,
   4.10. $x' + x \cos t = \sin t \cos t$,
   4.11. $x' + x \operatorname{tg} t = \sin 2t$,
   4.12. $x' + 2tx = 2te^{-t^2}$,
   4.13. $x' - \frac{2t+1}{t^2+t+1}x = \cos t - \frac{2t+1}{t^2+t+1} \sin t$,
   4.14. $x' - \frac{2}{\sin 2t}x = \frac{\sin^2 t}{\cos t}$,
   4.15. $x' + 2x = t^2 e^{3t} + \sin 2t$,
   4.16. $tx' + x = \ln t + 1$,
   4.17. $x' + x \operatorname{tg} t = \frac{1}{\cos t}$,
   4.18. $x' + \operatorname{tg} x = \frac{t}{\cos x}$ (wskazówka: zastosować odpowiednie podstawienie).

5. Rozwiązać równania Bernoulliego:

   5.1. $x' + tx = tx^3$,
   5.2. $x' = -\frac{1}{t}x + \frac{1}{2}x^3$,
   5.3. $2x' \cos t = x \sin t - x^3$,
   5.4. $x' - \frac{1}{2}x = -\frac{2t}{x}$,

5.5. $x' + 2x \operatorname{tg} t = x^2 \operatorname{ctg} t$,

5.6. $(1+t^2)\, x' - 2tx = 4\sqrt{x\,(1+t^2)}\, \operatorname{arctg} t$,

5.7. $(1-t^2)\, x' - tx - tx^2 = 0$,

5.8. $x - x' \cos t = x^2 \cos t\, (1 - \sin t)$,

5.9. $x' = x - \sqrt{x}$,

5.10. $tx' + x = x^2 \ln t$.

6. Rozwiązać równania zupełne:

6.1. $xdt + (t-1)\, dx = 0$,

6.2. $(3t^2 + 6tx^2)\, dt + (6t^2x + 4x^3)\, dx = 0$,

6.3. $\frac{(t+2x)dt + xdx}{(t+x)^2} = 0$,

6.4. $\left(\frac{x}{\cos^2 tx} + \sin t\right) dt + \left(\frac{t}{\cos^2 tx} + \sin x\right) dx = 0$,

6.5. $\left(\frac{\sin 2t}{x} + t\right) dt + \left(x - \frac{sin^2 t}{x^2}\right) dx = 0$,

6.6. $\left(1 + e^{\frac{t}{x}}\right) dt + e^{\frac{t}{x}} \left(1 - \frac{t}{x}\right) dx = 0$.

7. Rozwiązać równania z czynnikiem całkującym:

7.1. $(2tx^2 - x)\, dt + (x^2 + t + x)\, dx = 0$,

7.2. $\left(\frac{t}{x} + 1\right) dt + \left(\frac{t}{x} - 1\right) dx = 0$,

7.3. $(e^t - \sin x)\, dt + \cos x dx = 0$,

7.4. $e^t\, (t+1)\, dt + (xe^x - te^t)\, dx = 0$,

7.5. $(t \sin x + x)\, dt + (t^2 \cos x + t \ln t)\, dx = 0$,

7.6. $(t - tx)\, dt + (x + t^2)\, dx = 0$,

7.7. $t\left(4 + \frac{1}{t^2 - x^2}\right) dt - x\left(4 - \frac{1}{t^2 - x^2}\right) dx = 0$,

7.8. $\left(2x + \frac{1}{(t+x)^2}\right) dt + \left(3x + t + \frac{1}{(t+x)^2}\right) dx = 0$.

Wskazówka: W zadaniach 7.1-7.6 czynnik całkujący zależy tylko od jednej zmiennej, a w zadaniach 7.6-7.8 jest on jednej z postaci: $\mu = \mu\,(tx)$, $\mu = \mu\,(t+x)$, $\mu = \mu\,(t^2 - x^2)$, $\mu = \mu\,(t^2 + x^2)$.

8. Rozwiązać równania Clairauta:

8.1. $2xx' - 2t(x')^2 - 1 = 0$,

8.2. $x = tx' + (x')^4$,

8.3. $x = tx' + \sqrt{1 - (x')^2}$,

8.4. $t = \frac{x}{x'} + \frac{1}{(x')^2}$.

9. Rozwiązać równania Lagrange'a:

9.1. $xx' - t(x')^3 - 1 = 0$,

9.2. $2tx' - x + \sqrt{1 + (x')^2} = 0$,

9.3. $x = t + tx' + (x')^2$,

9.4. $x = x' \ln x'$,

9.5. $x = tx' - t\sqrt{1 + (x')^2}$,

9.6. $x = 2tx' + (x')^3$.

10. Rozwiązać równania Riccatiego:

10.1. $x' = x^2 + \frac{1}{t}x + \frac{1}{t^2}$,

10.2. $x' = \frac{t^2x^2+1}{2t^2}$,

10.3. $x' = -x^2 + t^2 + 1$ (uwaga: wynik zawiera całkę nieelementarną).

11. Rozwiązać równania, wiedząc, że mają jedno rozwiązanie szczególne postaci $x_1 = at + b$, gdzie a, b są stałe:

11.1. $x' = x^2 - tx - t$,

11.2. $tx' = x^2 - (2t + 1)x + t^2 + 2t$.

12. Równanie
$$x = e^t(x')^2$$
nie jest równaniem Lagrange'a. Rozwiązać je taką metodą jak rozwiązuje się równanie Lagrange'a.

13. Sprawdzić, czy zbiór rozwiązań określonych na $\mathbb{R}$ RLJ
$$x' = \operatorname{sgn}(t)\, x$$
z działaniami dodawania funkcji i mnożenia funkcji przez liczby rzeczywiste jest jednowymiarową przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$.

14. Wykazać, że równanie
$$x' = ax + b(t),$$
gdzie $a = \mathrm{const} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, zaś $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą i okresową, ma dokładnie jedno rozwiązanie okresowe o tym samym okresie. Znaleźć to rozwiązanie.

15. Dana jest funkcja $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\varphi(t) \neq 0$ dla $t \in \mathbb{R}$. Rozwiązać równanie
$$x' = \frac{x\varphi'(t) - x^2}{\varphi(t)}.$$

16. Sprowadzić równanie
$$x' + a(t) = b(t)e^{mx},$$
gdzie $m = \mathrm{const} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, do równania Bernoulliego.

17. Dane są funkcje $a, b : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ i załóżmy, że a jest ciągła. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania liniowego
$$x' = a(t)x + b(t),$$
jeśli znane są jego dwa różne rozwiązania szczególne x_1, x_2 (wynik podać bez całki).

18. Dane są funkcje $a, b, c : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ i załóżmy, że a, b, c są ciągłe. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania Riccatiego
$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t),$$
jeśli znane są jego trzy różne rozwiązania szczególne x_1, x_2, x_3 (wynik podać bez całki).

19. Dane są funkcje $a, b, c : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ i załóżmy, że a, b, c są ciągłe. Wykazać, że każde cztery różne rozwiązania równania Riccatiego spełniają zależność
$$\frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)} = \text{const.}$$

20. Znaleźć taką krzywą, że odcinek stycznej do niej poprowadzonej, zawarty między osiami współrzędnych ma stałą długość a.

21. Znaleźć krzywe, dla których iloczyn odległości stycznych od dwóch zadanych punktów $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$ jest stały.

22. Znaleźć krzywe, dla których trójkąt, utworzony przez oś rzędnych 0x, styczną i wektor wodzący punktu styczności, jest równoramienny.

23. Znaleźć krzywe, dla których stosunek odcinka odciętego styczną na osi rzędnych 0x oraz odcinka odciętego na osi odciętych 0t jest równy dwa.

24. Rozwiązać równania, sprowadzając je do równań pierwszego rzędu:

    24.1. $x'' = \text{arctg} t$,
    24.2. $x'' = (x')^2 + \frac{1}{t}x' + \frac{1}{t^2}$,
    24.3. $tx'' = x'(\ln x' - \ln t)$,
    24.4. $x^2x'' + e^{x^2}x' - 2x^3(x')^2 = 0$,
    24.5. $2xx'' + (x')^2 + (x')^4 = 0$,
    24.6. $4x' = 4tx'' - (x'')^2$,
    24.7. $xx'x'' = (x')^3 + (x'')^2$,
    24.8. $x'' = t\sin^2 t$,
    24.9. $x'' = \frac{1}{t^4}(x - tx')^3$,
    24.10. $xx'' + (x')^2 = (x')^3$,
    24.11. $2xx'' - 3(x')^2 = 4x^2$,
    24.12. $xx'' - (x')^2 = x^2x'$,
    24.13. $x'' + (x')^2 = 2e^{-x}$,
    24.14. $t^2xx'' = (x + tx')^2$,
    24.15. $2xx'' - 3(x')^2 = 4x^2$.

Rozdział 3

Problem początkowy

3.1 Istnienie i jednoznaczność rozwiązań problemu Cauchy'ego

Zaczniemy od sformułowania elementarnego twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania problemu początkowego dla równań o rozdzielonych zmiennych.

Twierdzenie 3.1. *Jeśli $f : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \supset J \to \mathbb{R}$ są ciągłe oraz $g(x) \neq 0$ dla $x \in J$, gdzie przedziały I, J są otwarte, to dla dowolnego punktu $(t_0, x_0) \in I \times J$ problem Cauchy'ego*

$$x' = f(t)g(x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{3.1}$$

ma jedyne rozwiązanie.

Dowód. Z równania algebraicznego (2.4) wynika, że

$$G(x_0) - F(t_0) = C, \tag{3.2}$$

gdzie F i G są dowolnie ustalonymi funkcjami pierwotnymi odpowiednio funkcji f i $\frac{1}{g}$. A stąd otrzymujemy równanie algebraiczne

$$G(x) - F(t) = G(x_0) - F(t_0), \quad t \in I,\ x \in J. \tag{3.3}$$

Zdefiniujmy funkcję $H : I \times J \to \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$H(t, x) = G(x) - F(t) - G(x_0) + F(t_0), \quad (t, x) \in I \times J.$$

Funkcja H jest klasy C^1, $H(t_0, x_0) = 0$ oraz $\frac{\partial H}{\partial x}(t_0, x_0) = \frac{\partial G}{\partial x}(x_0) = \frac{1}{g(x_0)} \neq 0$. Z twierdzenia o funkcji uwikłanej wnioskujemy istnienie jedynej funkcji uwikłanej $x : I \supset \tilde{I} \to J$ różniczkowalnej i takiej, że $H(t, x(t)) = 0$ dla $t \in \tilde{I}$, gdzie $\tilde{I}$ jest przedziałem otwartym, $t_0 \in \tilde{I}$ i $x(t_0) = x_0$. A tym samym

$$G(x(t)) - F(t) = G(x_0) - F(t_0), \quad t \in \tilde{I}, \tag{3.4}$$

co oznacza, że funkcja x jest jedynym rozwiązaniem zagadnienia (3.1).

Uwaga 3.1. Rozwiązanie problemu początkowego (3.1) w twierdzeniu 3.1 można wyznaczyć jawnym wzorem. Wystarczy zauważyć, że funkcja G jest różnowartościowa. Wiemy, że $\frac{1}{g(x)} = G'(x)$ dla $x \in J$. Z własności Darboux dla funkcji ciągłych wnioskujemy, że funkcja $\frac{1}{g(x)}$ dla $x \in J$ ma stały znak, gdyż w przeciwnym razie musiałaby się zerować w jakimś punkcie z przedziału J, co jest niemożliwe. A stąd G' ma stały znak, co implikuje silną monotoniczność G i w konsekwencji różnowartościowość G. Zatem

$$x(t) = G^{-1}\left(F(t) + G(x_0) - F(t_0)\right), \quad t \in \tilde{I}. \tag{3.5}$$

Jeśli $\{F(t) + G(x_0) - F(t_0) : \ t \in I\} \subset \{G(x) : \ x \in J\}$, to korzystając z różnowartościowości G istnienie jedynego rozwiązania danego wzorem (3.5) problemu (3.1) i to globalnego, tzn. że $\tilde{I} = I$, wynika też wprost ze związku (3.3). Inkluzja ta nie jest oczywiście warunkiem koniecznym istnienia dokładnie jednego rozwiązania (lokalnego) zagadnienia (3.1).

Przykład 3.1. Znaleźć wszystkie rozwiązania problemu Cauchy'ego

$$x' = x^2, \quad x(0) = 1. \tag{3.6}$$

Wykonując elementarne obliczenia:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2} &= \int dt, \\ -\frac{1}{x} &= t + C, \\ C &= -1, \end{aligned}$$

znajdujemy rozwiązanie

$$x = \frac{1}{1-t}, \quad t \in \big(-\infty, 1\big).$$

Na podstawie twierdzenia 3.1 jest to jedyne rozwiązanie. Wystarczy położyć: $I = \mathbb{R}$, $J = (0, \infty)$, $f(t) = 1$ dla $t \in I$, $g(x) = x^2$ dla $x \in J$.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że nie jest to rozwiązanie globalne, tj. określone na I. Prześledźmy tę sytuację, nawiązując do uwagi 3.1. Mamy: $F(t) = t$ dla $t \in I$, $G(x) = -\frac{1}{x}$ dla $x \in J$. Związki (3.2), (3.3) prowadzą do relacji

$$-\frac{1}{x} = t - 1,$$

co wymusza założenie: $t < 1$, gdyż $-\frac{1}{x} < 0$. Zauważmy, że $\mathbb{R} = \{F(t) + G(1) - F(0) : \ t \in I\} \not\subset \{G(x) : \ x \in J\} = (-\infty, 0)$.

Przykład 3.2. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania problemu początkowego

$$x' = -tx^2, \quad x(0) = 1. \tag{3.7}$$

Po elementarnych obliczeniach:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2} &= -\int t\,dt, \\ -\frac{1}{x} &= -\frac{1}{2}t^2 + C, \\ C &= -1 \end{aligned}$$

otrzymujemy rozwiązanie

$$x = \frac{2}{t^2+2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Z twierdzenia 3.1 wynika, że jest to jedyne rozwiązanie. Aby się o tym przekonać, kładziemy: $I = \mathbb{R}$, $J = (0, \infty)$, $f(t) = -t$ dla $t \in I$, $g(x) = x^2$ dla $x \in J$.

W przeciwieństwie do przykładu 3.1 widzimy, że znalezione rozwiązanie jest globalne, czyli określone na I. Znowu przeanalizujmy tę sytuację, nawiązując do uwagi 3.1. Mamy: $F(t) = -\frac{1}{2}t^2$ dla $t \in I$, $G(x) = -\frac{1}{x}$ dla $x \in J$. Związki (3.2), (3.3) implikują relację

$$-\frac{1}{x} = -\frac{1}{2}t^2 - 1,$$

a to już nie wymusza żadnego założenia na t, jak to miało miejsce w przykladzie 3.1. Zwróćmy uwagę, że tym razem prawdziwa jest inkluzja $(-\infty, -1] = \{F(t) + G(1) - F(0) : \ t \in I\} \subset \{G(x) : \ x \in J\} = (-\infty, 0)$.

Przeanalizujemy teraz kilka ważnych przykładów, gdy założenia twierdzenia 3.1 nie są spełnione.

Przykład 3.3. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania problemu Cauchy'ego

$$x' = \sqrt{|x|}, \quad x(0) = 0 \tag{3.8}$$

określone na $\mathbb{R}$.

Widzimy, że

$$x(t) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.9}$$

jest takim rozwiązaniem.

Poszukajmy dodatnich rozwiązań $x(t) > 0$ równania $x' = \sqrt{|x|}$. Obliczamy:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int dt,$$

$$2\sqrt{x} = t + C, \quad t + C > 0,$$

$$x(t) = \frac{1}{4}(t + C)^2, \quad t + C > 0. \tag{3.10}$$

Zdefiniujmy funkcję

$$x_1(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \\ \frac{1}{4}(t + C)^2, & t > 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

będącą sklejeniem w punkcie $t_0 = 0$ rozwiązań (3.9) i (3.10). Dobierzmy taką stałą C, o ile to możliwe, żeby $x_1(t)$ była ciągła w $t_0 = 0$. Wystarczy obliczyć

$$0 = \lim_{t \to 0^+} x_1(t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{4}(t + C)^2 = \frac{1}{4}C^2,$$

a stąd $C = 0$. Sprawdźmy, czy funkcja (3.11) z tak dobraną C, tj. funkcja

$$x_1(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \\ \frac{1}{4}t^2, & t > 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

jest rozwiązaniem problemu (3.8). Trzeba pokazać, że $x_1(t)$ jest różniczkowalna w punkcie $t_0 = 0$, spełnia równanie różniczkowe $x' = \sqrt{|x|}$ w tym punkcie i spełnia warunek początkowy. Rzeczywiście:

$$x_1'(0) = 0 = \sqrt{|x_1(0)|},$$

$$x_1(0) = 0.$$

Powyższa konstrukcja sugeruje możliwość tworzenia nieskończenie wielu rozwiązań problemu (3.8), sklejając w sposób ciągły w punkcie $t_0 = \alpha$ rozwiązania (3.9) i (3.10), gdzie $\alpha \geqslant 0$ jest dowolnie ustalona. Otrzymamy w ten sposób rodzinę funkcji

$$x_\alpha(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant \alpha \\ \frac{1}{4}(t-\alpha)^2, & t > \alpha \end{cases}. \tag{3.13}$$

Każda funkcja z tej rodziny rozwiązuje problem (3.8), gdyż:

$$x'_\alpha(\alpha) = 0 = \sqrt{|x_\alpha(\alpha)|},$$

$$x_\alpha(0) = 0.$$

Rozumując podobnie, sprawdzamy, że każda funkcja

$$x_\beta(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t-\beta)^2, & t < \beta \\ 0, & t \geqslant \beta \end{cases} \tag{3.14}$$

dla dowolnie ustalonej $\beta \leqslant 0$ też jest rozwiązaniem naszego problemu.

Nietrudno zauważyć, że każda funkcja

$$x_{\alpha,\beta}(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t-\beta)^2, & t < \beta \\ 0, & \beta \leqslant t \leqslant \alpha \\ \frac{1}{4}(t-\alpha)^2, & t > \alpha \end{cases} \tag{3.15}$$

dla dowolnie ustalonych $\beta \leqslant 0 \leqslant \alpha$ również jest rozwiązaniem tego zagadnienia. Funkcje (3.9), (3.13), (3.14) i (3.15) wyczerpują zbiór rozwiązań (3.8) określonych na $\mathbb{R}$.

Zwróćmy uwagę, że funkcja $g(x) = \sqrt{|x|}$, $x \in J = \mathbb{R}$ nie spełnia założeń twierdzenia 3.1, bo $g(0) = 0$.

Przykład 3.4. Uzasadnić, że zagadnienie Cauchy'ego

$$x' = \operatorname{sgn}(t), \quad x(0) = 0 \tag{3.16}$$

nie ma rozwiązania. Przypuśćmy, że x jest rozwiązaniem (3.16) określonym na jakimś prawostronnym otoczeniu punktu $t_0 = 0$. Niech $\bar{t} > 0$ należy do tego otoczenia. Wówczas:

$$x'(0) = \operatorname{sgn}(0) = 0,$$

$$x'(\bar{t}) = \operatorname{sgn}(\bar{t}) = 1.$$

Z twierdzenia Darboux dla pochodnej wynika, że x' przyjmuje na przedziale $[0, \bar{t}]$ wszystkie wartości z przedziału $[0, 1]$. A to jest sprzeczne z definicją funkcji signum. Analogicznie dochodzi się do sprzeczności na dowolnym lewostronnym otoczeniu punktu $t_0 = 0$.

Podkreślmy, że funkcja $f(t) = \operatorname{sgn}(t)$, $t \in I = \mathbb{R}$ nie spełnia założeń twierdzenia 3.1, bo nie jest ciągła w $t_0 = 0$.

Przykład 3.5. Sprawdzić, że zagadnienie Cauchy'ego

$$x' = \operatorname{sgn}(x), \quad x(0) = 0 \tag{3.17}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Funkcja

$$x(t) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

jest rozwiązaniem (3.17), ponieważ:

$$x'(t) = 0 = \operatorname{sgn}(0),$$

$$x(0) = 0.$$

Przypuśćmy, że $x(t) \not\equiv 0$ też jest rozwiązaniem (3.17). Ustalmy $\bar{t} \neq 0$ takie, że $x(\bar{t}) \neq 0$. Jeśli $x(\bar{t}) > 0$, to

$$x'(\bar{t}) = \operatorname{sgn}(x(\bar{t})) = 1,$$

a jeśli $x(\bar{t}) < 0$, to

$$x'(\bar{t}) = \operatorname{sgn}(x(\bar{t})) = -1.$$

Oczywiscie

$$x'(0) = \operatorname{sgn}(x(0)) = \operatorname{sgn}(0) = 0.$$

Uwzględniając twierdzenie Darboux dla pochodnej, x' przyjmuje na przedziale $[0, \bar{t}]$, gdy $\bar{t} > 0$ albo na przedziale $[\bar{t}, 0]$, gdy $\bar{t} < 0$, wszystkie wartości z przedziału $[0, 1]$ lub $[-1, 0]$, stosownie do znaku $x(\bar{t})$. I mamy sprzeczność z definicją funkcji signum.

Zwróćmy uwagę, że funkcja $g(x) = \operatorname{sgn}(x)$, $x \in J = \mathbb{R}$ nie spełnia założeń twierdzenia 3.1, gdyż nie jest ciągła w $x_0 = 0$.

Zauważmy, że ciągłość prawej strony równania różniczkowego w zagadnieniu początkowym nie implikuje jednoznaczności rozwiązania, co więcej problem ten może mieć wtedy nawet nieskończenie wiele rozwiązań tak, jak w przykładzie 3.3. Ale ciągłość nie jest warunkiem koniecznym istnienia, a nawet jednoznaczności rozwiązań, na co wskazuje przykład 3.5. Jednak nieciągłość prawej strony może być przyczyną braku rozwiązania, jak to ma miejsce w przykładzie 3.4.

Rozpatrzmy problemy początkowe:

$$x' = x, \quad x(0) = 0, \tag{3.18}$$

$$x' = x^2, \quad x(0) = 0, \tag{3.19}$$

$$x' = \sqrt{|x|}, \quad x(0) = 0. \tag{3.20}$$

Mimo że równania w tych zagadnieniach są równaniami o rozdzielonych zmiennych, twierdzenia 3.1 o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań nie można tutaj zastosować, gdyż odpowiednie funkcje $g(x) = x$, $g(x) = x^2$ i $g(x) = \sqrt{|x|}$ nie są różne od zera w każdym przedziale otwartym J, do którego należy $x_0 = 0$. Zmierzamy w kierunku twierdzenia Picarda, które rozstrzygnie istnienie i jednoznaczność rozwiązań problemów Cauchy'ego (3.18), (3.19), oraz twierdzenia Peano, z którego wyniknie istnienie rozwiązania problemów Cauchy'ego (3.18), (3.19) i (3.20). Twierdzenia te sformułujemy w wersjach lokalnej oraz globalnej.

Rozważmy problem Cauchy'ego

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{3.21}$$

i równanie całkowe

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds. \tag{3.22}$$

Twierdzenie 3.2. *Jeżeli funkcja f jest ciągła, to (3.21) i (3.22) są równoważne w następujacym sensie: każde rozwiązanie $x \in C^1$ zagadnienia początkowego (3.21) jest rozwiązaniem równania całkowego (3.22) oraz każde rozwiązanie $x \in C$ równania całkowego (3.22) jest rozwiązaniem problemu początkowego (3.21).*

Dowód.

Załóżmy, że $x \in C^1$ jest rozwiązaniem (3.21). Po obustronnym scałkowaniu równania różniczkowego w (3.21):

$$\int_{t_0}^{t} x'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds$$

i uwzględnieniu warunku początkowego w (3.21) widzimy, że x spełnia (3.22).

Niech teraz $x \in C$ będzie rozwiązaniem (3.22). Na podstawie twierdzenia Newtona-Leibniza prawa strona w tożsamości całkowej (3.22), a więc i jej lewa strona, jest klasy C^1. Różniczkujemy obustronnie (3.22) i stwierdzamy, że x spełnia równanie różniczkowe w (3.21). Spełnienie warunku początkowego w (3.21) jest natychmiastowe po położeniu $t = t_0$ w (3.22).

Uwaga 3.2. Z dowodu twierdzenia 3.2 wynika, że każde rozwiązanie $x \in C^1$ problemu (3.21) jest rozwiązaniem równania (3.22) nawet jeśli f nie jest ciągła. Wystarczy założyć, że f jest całkowalna (w sensie Riemanna). Ale przy takim uproszczonym założeniu implikacja w drugą stronę nie jest prawdziwa nawet dla $x \in C^1$.

Definicja 3.1. Funkcja $f : \mathbb{R}^d \supset U \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza (jest funkcją lipschitzowską), gdy

$$\exists L \geqslant 0\ \forall x, \bar{x} \in U \quad |f(x) - f(\bar{x})| \leqslant L\|x - \bar{x}\|.$$

Najmniejszą wartość stałej L, dla której zachodzi powyższe oszacowanie, nazywamy stałą Lipschitza.

Definicja 3.2. Funkcja $f : \mathbb{R}^d \supset U \to \mathbb{R}$ spełnia lokalny warunek Lipschitza (jest funkcją lokalnie lipschitzowską), gdy

$$\forall x_0 \in U\ \exists U(x_0)\ \exists L(U(x_0)) \geqslant 0\ \forall x, \bar{x} \in U(x_0) \quad |f(x) - f(\bar{x})| \leqslant L(U(x_0))\|x - \bar{x}\|.$$

Symbol $U(x_0)$ oznacza otoczenie otwarte punktu x_0.

Definicja 3.3. Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza względem drugiej zmiennej, gdy

$$\exists L \geqslant 0\ \forall (t, x), (t, \bar{x}) \in U \quad |f(t, x) - f(t, \bar{x})| \leqslant L|x - \bar{x}|.$$

Definicja 3.4. Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$ spełnia lokalny warunek Lipschitza względem drugiej zmiennej, gdy

$$\forall (t_0, x_0) \in U\ \exists U(t_0, x_0)\ \exists L(U(t_0, x_0)) \geqslant 0\ \forall (t, x), (t, \bar{x}) \in U(t_0, x_0)$$

$$|f(t, x) - f(t, \bar{x})| \leqslant L(U(t_0, x_0))|x - \bar{x}|.$$

Symbol $U(t_0, x_0)$ oznacza otoczenie otwarte punktu (t_0, x_0).

Funkcja $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza, bo dla każdych $x, \bar{x} \in \mathbb{R}$

$$|x - \bar{x}| \leqslant 1 \cdot |x - \bar{x}|.$$

Ale funkcja $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ nie spełnia warunku Lipschitza, gdyż dla dowolnych $x, \bar{x} \in \mathbb{R}$

$$|x^2 - \bar{x}^2| = |x + \bar{x}| \cdot |x - \bar{x}|$$

i czynnik $|x + \bar{x}|$ jest nieograniczony. Oczywiście funkcja ta spełnia lokalny warunek Lipschitza, co więcej spełnia ona warunek Lipschitza na każdym przedziale ograniczonym $I \subset \mathbb{R}$.

Z kolei funkcja $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$ nie spełnia nawet lokalnego warunku Lipschitza ze względu na punkt $x_0 = 0$. Przypuśćmy bowiem, że ten warunek jest spełniony. Wobec tego w szczególności istnieje stała $L \geqslant 0$ taka, że dla odpowiednio małych $x > 0$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{0}| \leqslant L|x - 0|.$$

A stąd

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant L.$$

Przechodząc do granicy

$$+\infty = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant L,$$

otrzymujemy sprzeczność.

Warto dodać, że funkcja niekoniecznie musi być różniczkowalna, żeby być lipschitzowską. Przykładem jest $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, dla której prawdziwa jest nierówność

$$|\,|x| - |\bar{x}|\,| \leqslant |x - \bar{x}|, \quad x, \bar{x} \in \mathbb{R}.$$

Dwa elementarne twierdzenia ułatwiają sprawdzanie odpowiednio warunku Lipschitza i lokalnego warunku Lipschitza, gdy funkcja jest różniczkowalna.

Twierdzenie 3.3. *Niech funkcja $f : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna. Wówczas f spełnia warunek Lipschitza wtedy i tylko wtedy, gdy f' jest ograniczona.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że f spełnia warunek Lipschitza. Ustalmy dowolne $x_0 \in I$. Niech $x \in I$ będzie dowolny i różny od x_0. Mamy

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant L|x - x_0|,$$

a po podzieleniu

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| \leqslant L.$$

Przechodząc do granicy, otrzymujemy, że

$$|f'(x_0)| = \left|\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| = \lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| \leqslant L.$$

Wobec tego f' jest ograniczona z dowolności x_0.

Przypuśćmy teraz, że f' jest ograniczona. Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika, że dla dowolnych dwóch różnych punktów $x, \bar{x} \in I$ istnieje punkt pośredni $\tilde{x} \in I$ taki, że

$$|f(x) - f(\bar{x})| = |f'(\tilde{x})|\; |x - \bar{x}| \leqslant M|x - \bar{x}|.$$

Zatem f jest lipschitzowska, bo kładziemy $L := M$.

Twierdzenie 3.4. *Jeśli funkcja $f : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1, to spełnia lokalny warunek Lipschitza.*

Dowód. Ustalmy dowolne $x_0 \in I$. Niech $\tilde{I}(x_0) \subset I$ będzie przedziałem domkniętym, do którego należy x_0. Rozważmy dowolne dwa różne punkty $x, \bar{x} \in \tilde{I}(x_0)$. Uwzględniając regularność f, wprost z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wnioskujemy, że istnieje punkt pośredni $\tilde{x} \in \tilde{I}(x_0)$ taki, że

$$|f(x) - f(\bar{x})| = |f'(\tilde{x})|\; |x - \bar{x}| \leqslant M(\tilde{I}(x_0))|x - \bar{x}|.$$

A to implikuje, że f jest lipschitzowska, gdyż możemy położyć $L(\tilde{I}(x_0)) := M(\tilde{I}(x_0))$.

Wniosek 3.1. Z dowodu twierdzenia 3.4 wynika, że jeśli funkcja $f : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1, gdzie I jest przedziałem domkniętym, to spełnia warunek Lipschitza.

Wniosek 3.2. Załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{R}^2 \supset I \times J \to \mathbb{R}$, $f = f(t,x)$ jest różniczkowalna względem drugiej zmiennej x. Wówczas f spełnia warunek Lipschitza względem x wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{\partial f}{\partial x}$ jest ograniczona. Jeśli f jest klasy C^1 względem x, to spełnia lokalny warunek Lipschitza względem x. Jeśli f jest klasy C^1 względem x, gdzie I, J są przedziałami domkniętymi, to spełnia warunek Lipschitza względem x.

Lemat 3.1. *Niech (x_n) będzie ciągiem funkcji $x_n : \mathbb{R} \supset [a,b] \to \mathbb{R}$ takim, że*

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leqslant \alpha_n, \quad t \in [a,b],\ n \in \mathbb{N}.$$

Załóżmy, że szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ jest zbieżny. Wówczas ciąg (x_n) jest jednostajnie zbieżny w przedziale $[a,b]$. Jeśli ponadto funkcje x_n są ciągłe, to granica tego ciągu również jest funkcją ciągłą.

Lemat 3.2. *Niech $f : [\alpha,\beta] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Niech ponadto (x_n) będzie ciągiem funkcji ciągłych $x_n : [\alpha,\beta] \to [a,b]$, $n \in \mathbb{N}$ zbieżnym jednostajnie w przedziale $[\alpha,\beta]$ do funkcji x. Wówczas*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^t f(s, x_n(s))\, ds = \int_\alpha^t f(s, x(s))\, ds, \quad t \in [\alpha,\beta].$$

Dowody lematów 3.1 i 3.2 Czytelnik znajdzie w [Myjak], str. 10, 11.

Twierdzenie 3.5 (Picard, lokalne istnienie i jednoznaczność dla prostokąta)**.** *Niech $f : P \to \mathbb{R}$, gdzie $P = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leqslant a,\ |x - x_0| \leqslant b\}$, $a, b > 0$, będzie funkcją ciągłą, spełniającą warunek Lipschitza względem zmiennej x ze stałą $L > 0$. Wówczas problem Cauchy'ego*

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{3.23}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie (lokalne) w przedziale $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, gdzie $\alpha < \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right\}$, $M = \max\{|f(t,x)| : (t,x) \in P\} > 0$.

Dowód. W dowodzie wykorzystamy indukcję matematyczną, równanie całkowe (3.22), lematy 3.1, 3.2 i twierdzenie 3.2.

Najpierw wykażemy istnienie rozwiązania **metodą Picarda**.

1. Stosując indukcję matematyczną, skonstruujemy ciąg kolejnych przybliżeń Picarda, tj. ciąg (x_n) funkcji $x_n : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ określonych wzorem rekurencyjnym

$$x_0(t) = x_0, \quad t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \tag{3.24}$$

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_n(s))\, ds, \quad t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha],\ n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.25}$$

Dla uproszczenia dowodu, bez straty ogólności, ograniczymy się do przedziału $[t_0, t_0+\alpha]$. Wykażemy indukcyjnie, że ciąg (x_n) jest dobrze określony, tzn. że x_n są ciągłe w przedziale $[t_0, t_0+\alpha]$ i $x_n(t) \in [x_0 - b, x_0 + b]$ dla $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$, $n \in \mathbb{N}_0$.

1° W pierwszym kroku indukcyjnym niech $n = 0$. Oczywiście $x_0(t)$ jest ciągła jako funkcja stała i

$$|x_0(t) - x_0| = 0 \leqslant b, \quad t \in [t_0, t_0 + \alpha].$$

2° W drugim kroku indukcyjnym ustalmy dowolne $n \in \mathbb{N}_0$ i załóżmy, że x_n jest ciągła w $[t_0, t_0 + \alpha]$ i $|x_n(t) - x_0| \leqslant b$ dla $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. Pokażemy, że x_{n+1} jest ciągła w $[t_0, t_0 + \alpha]$ i $|x_{n+1}(t) - x_0| \leqslant b$ dla $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. Ciągłość x_{n+1} wynika z założenia indukcyjnego o ciągłości x_n, ciągłości f i twierdzenia Newtona-Leibniza. W następnej kolejności, korzystając z ograniczoności f, uzyskujemy oszacowanie

$$\begin{aligned}|x_{n+1}(t) - x_0| &= \left| \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))\, ds \right| \leqslant \int_{t_0}^{t} |f(s, x_n(s))|\, ds \\ &\leqslant M\alpha \leqslant M\frac{b}{M} = b, \quad t \in [t_0, t_0 + \alpha],\end{aligned}$$

co kończy dowód indukcyjny.

2. Znowu korzystając z indukcji matematycznej, uzasadnimy prawdziwość nierówności

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leqslant \frac{ML^n(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad t \in [t_0, t_0 + \alpha],\ n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.26}$$

1° Niech $n = 0$. Dzięki ograniczonosci f mamy oszacowanie

$$|x_1(t) - x_0(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, x_0)\, ds \right| \leqslant M(t - t_0), \quad t \in [t_0, t_0 + \alpha].$$

2° Ustalmy dowolne $n \in \mathbb{N}_0$ i załóżmy, że

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leqslant \frac{ML^n(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad t \in [t_0, t_0 + \alpha].$$

Sprawdzimy, że

$$|x_{n+2}(t) - x_{n+1}(t)| \leqslant \frac{ML^{n+1}(t - t_0)^{n+2}}{(n+2)!}, \quad t \in [t_0, t_0 + \alpha].$$

Warunek Lipschitza dla f względem x i założenie indukcyjne implikują ciąg nierówności

$$\begin{aligned}|x_{n+2}(t) - x_{n+1}(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} [f(s, x_{n+1}(s)) - f(s, x_n(s))]\, ds \right| \\ &\leqslant \int_{t_0}^{t} |f(s, x_{n+1}(s)) - f(s, x_n(s))|\, ds \\ &\leqslant \int_{t_0}^{t} L\, |x_{n+1}(s) - x_n(s)|\, ds \\ &\leqslant L\, \frac{ML^n}{(n+1)!} \int_{t_0}^{t} (s - t_0)^{n+1}\, ds \\ &= \frac{ML^{n+1}}{(n+1)!}\, \frac{(t - t_0)^{n+2}}{n+2} \\ &= \frac{ML^{n+1}(t - t_0)^{n+2}}{(n+2)!} \quad t \in [t_0, t_0 + \alpha],\end{aligned}$$

a to kończy dowód indukcyjny.

W konsekwencji nierówności (3.26) otrzymujemy oszacowanie

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leqslant \frac{ML^n\alpha^{n+1}}{(n+1)!}, \quad t \in [t_0, t_0 + \alpha],\ n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.27}$$

Na mocy kryterium d'Alemberta szereg liczbowy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{ML^n\alpha^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{M}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha L)^{n+1}}{(n+1)!}$$

jest zbieżny, gdyż
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\alpha L)^{n+2}(n+1)!}{(n+2)!(\alpha L)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha L}{n+2} = 0.$$
W efekcie, biorąc pod uwagę lemat 3.1, ciąg (x_n) jest jednostajnie zbieżny w przedziale $[t_0, t_0+\alpha]$ i jego granica, którą oznaczymy przez x, jest funkcją ciągłą.

3. Zauważmy, że ciąg (x_{n+1}) też jest jednostajnie zbieżny do x w przedziale $[t_0, t_0+\alpha]$, jako podciąg ciągu (x_n). Przechodząc we wzorze (3.25) z n do nieskończoności i uwzględniając lemat 3.2 o przejsciu granicznym, stwierdzamy, że funkcja ciągła x spełnia równanie całkowe (3.22). Zgodnie z twierdzeniem 3.2, funkcja x spełnia również zagadnienie początkowe (3.23).

Pozostało wykazać jednoznaczność rozwiązania. Przypuśmy, że $x, y : [t_0, t_0+\alpha] \to [x_0 - b, x_0 + b]$ są rozwiązaniami problemu (3.23). Znowu posługując się twierdzeniem 3.2, wnioskujemy, że x, y są rozwiązaniami równania całkowego (3.22):
$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \quad y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds.$$
Odejmując te równości stronami oraz korzystając z warunku Lipschitza dla f i definicji α, otrzymujemy oszacowanie
$$\begin{aligned}
|x(t) - y(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} [f(s, x(s)) - f(s, y(s))]\ ds \right| \\
&\leqslant \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))|\, ds \\
&\leqslant L \int_{t_0}^{t} |x(s) - y(s)|\, ds \\
&\leqslant L\, \|x - y\| \int_{t_0}^{t} ds \\
&= L\, \|x - y\| (t - t_0) \\
&\leqslant \alpha L\, \|x - y\|, \quad t \in [t_0, t_0+\alpha],
\end{aligned}$$
gdzie symbol $\|\ \|$ oznacza normę maksimum w przestrzeni wektorowej skalarnych funkcji ciągłych określonych na przedziale $t \in [t_0, t_0+\alpha]$;
$$\|x - y\| = \max\{|x(t) - y(t)| :\ t \in [t_0, t_0+\alpha]\}.$$
Ponieważ prawa strona w powyższej nierównosci nie zależy od t, więc możemy napisać
$$\|x - y\| \leqslant \alpha L \|x - y\|.$$
Wobec tego
$$(1 - \alpha L)\|x - y\| \leqslant 0.$$
Ale z założenia $1 - \alpha L > 0$, więc $\|x - y\| = 0$, czyli $x = y$. Dowód jest kompletny.

Nietrudno obliczyć, rozdzielając zmienne, że funkcja $x(t) = e^t$, $t \in \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem problemu Cauchy'ego
$$x' = x, \quad x(0) = 1. \tag{3.28}$$
Pokażemy teraz, że zagadnienie to można również efektywnie rozwiązać przy pomocy ciągu Picarda:
$$x_0(t) = 1,$$
$$x_{n+1}(t) = 1 + \int_0^t x_n(s)\, ds.$$

Obliczmy kilka pierwszych elementów tego ciągu:

$$\begin{aligned}
x_0(t) &= 1,\\
x_1(t) &= 1 + \int_0^t ds = 1 + t,\\
x_2(t) &= 1 + \int_0^t (1+s)\,ds = 1 + t + \frac{1}{2}t^2,\\
x_3(t) &= 1 + \int_0^t (1+s+\frac{1}{2}s^2)\,ds = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3.
\end{aligned}$$

Widzimy, że n-ty jego element jest postaci

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}.$$

Zatem (x_n) jest ciagiem sum cząstkowych szeregu potęgowego $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$, którego suma jest równa $x(t) = e^t$, a promień zbieżności $R = \infty$.

Ale formalnie, posługując się twierdzeniem 3.5, wynik w kontekście rozwiązania (3.28) uzyskaliśmy tylko dla małego przedziału $[-\alpha, \alpha]$, gdzie $\alpha < \min\{a, \frac{b}{b+1}\}$. Oczywiście, wstawiając znalezioną funkcję $x(t) = e^t$ do równania różniczkowego w (3.28), stwierdzamy natychmiast, że jest ona rozwiązaniem dla $t \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 3.6 (Picard, lokalne istnienie i jednoznaczność dla zbioru otwartego)**.** *Załóżmy, że $f : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$, gdzie U jest zbiorem otwartym, jest funkcją ciągłą, spełniającą lokalny warunek Lipschitza względem zmiennej x. Wówczas dla dowolnego punktu $(t_0, x_0) \in U$ problem Cauchy'ego*

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{3.29}$$

ma dokładnie jedno rozwiąza]nie (lokalne).

Dowód. Ustalmy punkt $(t_0, x_0) \in U$. Ponieważ U jest zbiorem otwartym, więc istnieje otoczenie $U(t_0, x_0) \subset U$ punktu (t_0, x_0), w którym funkcja f spełnia warunek Lipschitza względem x. Dobieramy prostokąt $P \subset U(t_0, x_0)$ i stosujemy twierdzenie 3.5.

Przykład 3.6. Problemy początkowe:

$$x' = \sin(x^2 + t^2), \quad x(0) = 0, \tag{3.30}$$

$$x' = \sin(x + t^2) + |x|, \quad x(0) = 0, \tag{3.31}$$

$$x' = \sin(x^2 + t^2) + |x|, \quad x(0) = 0 \tag{3.32}$$

mają dokładnie jedno rozwiązanie.

Sprawdźmy to dla pierwszego problemu (3.30). Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$f(t,x) = \sin(x^2 + t^2), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2.$$

Funkcja ta jest ciągła i lokalnie lipschitzowska względem zmiennej x, ponieważ pochodna

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = 2x\cos(x^2 + t^2), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2$$

jest ciągła (zobacz wniosek 3.2). Istnienie jedynego rozwiązania wynika z twierdzenia 3.6.

Definicja 3.5. Niech funkcje $\varphi : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ i $\psi : \mathbb{R} \supset J \to \mathbb{R}$ będą rozwiązaniami problemu Cauchy'ego

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \tag{3.33}$$

Załóżmy, że $\varphi(t) = \psi(t)$ dla $t \in I \cap J$. Jeżeli $I \subset J$, to rozwiązanie ψ nazywamy przedłużeniem rozwiązania φ. Rozwiązanie φ, które nie ma przedłużenia właściwego nazywamy wysyconym.

Powstaje naturalne pytanie: kiedy istnieje maksymalny przedział istnienia i jak jest on duży? Odpowiedź na to pytanie daje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.7 (Maksymalny przedział i osiąganie brzegu; tw. pierwsze)**.** *Załóżmy, że $f : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$, gdzie U jest zbiorem otwartym, jest funkcją ciągłą, spełniającą lokalny warunek Lipschitza względem zmiennej x i ograniczoną. Wówczas dla dowolnego punktu $(t_0, x_0) \in U$ problem Cauchy'ego*

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{3.34}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie (lokalne). Ponadto rozwiązanie to można jednoznacznie przedłużyć w prawo tak, aby było określone w przedziale $[t_0, +\infty)$ albo, aby osiągało brzeg ∂U. Podobnie rozwiązanie to można jednoznacznie przedłużyć w lewo tak, aby było określone w przedziale $(-\infty, t_0]$ albo, aby osiągało brzeg ∂U.

Dowód. Istnienie jedynego rozwiązania w małym przedziale $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ wynika wprost z twierdzenia 3.6.

Teraz pokażemy, że rozwiązanie to można odpowiednio przedłużyć w prawo. Zdefiniujmy

$$t_* = \sup\{t > t_0 : \text{ problem (3.34) ma jedyne rozwiązanie w przedziale } [t_0, t]\}.$$

Takie $t_* \leqslant \infty$ istnieje, gdyż zbiór, którego supremum obliczamy jest niepusty. Z definicji supremum wynika, że problem (3.34) ma jedyne rozwiązanie w przedziale $[t_0, t_*)$. Oznaczmy je przez x. Rozważmy dwa przypadki.

1° Jeśli $t_* = \infty$, to dowód jest zakończony.

2° Przypuśćmy, że $t_* < \infty$. Wykażemy, że

$$\lim_{t \to t_*^-} x(t) \in \mathbb{R}. \tag{3.35}$$

W tym celu sprawdzimy najpierw, że x jest funkcją lipschitzowską, tzn. że

$$\forall t_1, t_2 \in [t_0, t_*) \quad |x(t_1) - x(t_2)| \leqslant M|t_1 - t_2|, \tag{3.36}$$

gdzie $M = \sup\{|f(t, x)| : (t, x) \in U\} < \infty$. Ustalmy dowolne $t_1, t_2 \in [t_0, t_*)$. Na podstawie twierdzenia 3.2 stwierdzamy, że x spełnia równanie całkowe (3.22), a więc w szczególności:

$$\begin{aligned} x(t_1) &= x_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(s, x(s))\, ds, \\ x(t_2) &= x_0 + \int_{t_0}^{t_2} f(s, x(s))\, ds. \end{aligned}$$

Odejmując stronami powyższe równości, otrzymujemy nierówności

$$|x(t_1) - x(t_2)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s))\, ds \right| \leqslant \left| \int_{t_1}^{t_2} |f(s, x(s))|\, ds \right| \leqslant M|t_1 - t_2|,$$

a z dowolności t_1, t_2 - związek (3.36). Teraz skorzystamy z definicji Heinego granicy funkcji w punkcie. Niech (t_n) będzie dowolnym ciągiem zbieżnym do t_* z lewej strony. Stąd wynika, że (t_n) jest ciągiem Cauchy'ego, a wobec (3.36), $(x(t_n))$ też jest ciągiem Cauchy'ego. W konsekwencji

$(x(t_n))$ jest zbieżny do granicy właściwej, ponieważ $(\mathbb{R}, |\ |)$ jest przestrzenią Banacha. Granica ta nie zależy od wyboru ciągu (t_n). Rzeczywiście, niech dla dowolnych ciągów (t_n), (s_n) zbieżnych do t_* z lewej strony, ciągi $(x(t_n))$, $(x(s_n))$ zmierzają odpowiednio do g_1 i g_2. W rezultacie (3.36) mamy oszacowanie

$$|x(t_n) - x(s_n)| \leqslant M|t_n - s_n|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Przechodząc z n do nieskończoności otrzymujemy, że

$$|g_1 - g_2| \leqslant 0.$$

A zatem $g_1 = g_2$. W ten sposób udowodniliśmy własność (3.35). Połóżmy $x_* = \lim_{t\to t_*^-} x(t)$. Rozważmy dwa przypadki.

a) Jeśli $(t_*, x_*) \in \partial U$, to teza twierdzenia jest spełniona.

b) Przypuśćmy, że $(t_*, x_*) \in U$. Wówczas problem Cauchy'ego

$$x' = f(t,x), \quad x(t_*) = x_*$$

ma, na podstawie twierdzenia 3.6, jedyne rozwiązanie w pewnym przedziale $[t_* - \beta, t_* + \beta]$. A stąd problem (3.34) ma jedyne rozwiązanie w przedziale $[t_0, t_* + \beta]$, co jest sprzeczne z definicją t_*.

Z punktów 1° i 2° wynika, że $t_* = \infty$ lub $(t_*, x_*) \in \partial U$.

Przedłużanie rozwiązania w lewo uzasadnia sie analogicznie, co kończy dowód.

Uwaga 3.3. W twierdzeniu 3.7 założenie ograniczoności f jest istotne. Bez niego rozwiązanie zagadnienia początkowego może być jedyne, ale nie musi ani osiągać brzegu, ani być przedłużalne do $+\infty$ i $-\infty$. Tak się dzieje w przykładzie 3.1, przyjmując np., że $U = (-\infty, a) \times \mathbb{R}$, $a \geqslant \frac{1}{2}$ albo $U = \mathbb{R}^2$.

Zarówno w teorii, jak i ze względu na zastosowania bardzo ważne jest istnienie i jednoznaczność rozwiązań problemu Cauchy'ego w całym przedziale, do którego należy zmienna niezależna t. Takie rozwiązania nazywane są globalnymi. Podamy teraz trzy twierdzenia dotyczące rozwiązań globalnych.

Twierdzenie 3.8 (Picard, globalne istnienie i jednoznaczność dla f ograniczonej)**.** *Niech $f : [t_0 - a, t_0 + a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a > 0$ będzie funkcją ciągłą, spełniającą lokalnie warunek Lipschitza względem zmiennej x i ograniczoną. Wówczas problem Cauchy'ego*

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{3.37}$$

gdzie $x_0 \in \mathbb{R}$, ma dokładnie jedno rozwiązanie (globalne) w przedziale $[t_0 - a, t_0 + a]$.

Dowód. Połóżmy $U = (t_0 - a, t_0 + a) \times \mathbb{R}$. Twierdzenie 3.7 implikuje istnienie jedynego rozwiązania x zagadnienia początkowego (3.37) osiągającego brzeg tego pasa, czyli określonego w przedziale otwartym $(t_0 - a, t_0 + a)$. Pokażemy, że rozwiązanie to można przedłużyć na przedział domknięty $[t_0 - a, t_0 + a]$. Połóżmy $x_1 := \lim_{t\to(t_0-a)^+} x(t) \in \mathbb{R}$ i $x_2 := \lim_{t\to(t_0+a)^-} x(t) \in \mathbb{R}$. Zdefiniujmy funkcję

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t), & t \in (t_0 - a, t_0 + a) \\ x_1, & t = t_0 - a \\ x_2, & t = t_0 + a \end{cases}.$$

Aby wykazać, że $\tilde{x}$ spełnia (3.37) w $[t_0 - a, t_0 + a]$, wystarczy rozważyć punkty $t_0 - a$ i $t_0 + a$. Oczywiście $\tilde{x}$ jest w tych punktach ciągła. Wykonujemy elementarne obliczenia:

$$\lim_{t \to (t_0 - a)^+} \tilde{x}'(t) = \lim_{t \to (t_0 - a)^+} x'(t) = \lim_{t \to (t_0 - a)^+} f(t, x(t)) = f(t_0 - a, x_1),$$
$$\lim_{t \to (t_0 + a)^-} \tilde{x}'(t) = \lim_{t \to (t_0 + a)^-} x'(t) = \lim_{t \to (t_0 + a)^-} f(t, x(t)) = f(t_0 + a, x_2)$$

i mamy:

$$\tilde{x}'(t_0 - a) = f(t_0 - a, x_1) = f(t_0 - a, \tilde{x}(t_0 - a)),$$
$$\tilde{x}'(t_0 + a) = f(t_0 + a, x_2) = f(t_0 + a, \tilde{x}(t_0 + a)),$$

co należało dowieść.

W twierdzeniu 3.8 przyjęto bardzo mocne założenie o ograniczonosci funkcji f. Dla przykładu równania $x' = \sin x$ i $x' = \sin(x^2 + t^2)$ spełniają to założenie, ale proste równanie liniowe $x' = x$ już nie spełnia. Niżej sformułujemy twierdzenie bez tego założenia, ale z kolei lokalny warunek Lipschiza względem x wzmocnimy, przyjmując warunek Lipschitza względem x. Takie uogólnienie dopuszcza już wspomniane równanie $x' = x$.

Twierdzenie 3.9 (Picard, globalne istnienie i jednoznaczność dla f lipschitzowskiej)**.** *Niech $f : [t_0 - a, t_0 + a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a > 0$ będzie funkcją ciągłą i spełniającą warunek Lipschitza względem zmiennej x ze stała $L > 0$. Wówczas problem Cauchy'ego*

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{3.38}$$

gdzie $x_0 \in \mathbb{R}$, ma dokładnie jedno rozwiązanie (globalne) w przedziale $[t_0 - a, t_0 + a]$.

Dowód. Istnienie rozwiązania $x(t)$ można udowodnić **metodą Picarda**. Wystarczy zmodyfikować definicję liczby M w dowodzie twierdzenia 3.5, kładąc $M = \max\{|f(t, x_0)| : t \in [t_0 - a, t_0 + a]\}$. Jednoznaczność rozwiązań wynika z twierdzenia 3.5 zastosowanego do zagadnienia początkowego

$$x' = f(t, x), \quad x(t_1) = x_1,$$

gdzie (t_1, x_1) jest dowolnym punktem z trajektorii naszego rozwiązania $x(t)$.

Rozważmy równanie $x' = \sin(x^2 + t^2) + |x|$. Funkcja $f(t, x) = \sin(x^2 + t^2) + |x|$ generująca to równanie nie jest ani ograniczona, ani lipschitzowska względem x. Jest ona tylko lokalnie lipschitzowska względem x. Spełnia jednak warunek wzrostu liniowego:

$$|f(t, x)| \leqslant |x| + 1, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

I właśnie w kierunku takich własności funkcji f uogólnimy teraz twierdzenie 3.9.

Twierdzenie 3.10 (Picard, globalne istnienie i jednoznaczność dla f o liniowym wzroście)**.** *Niech $f : [t_0 - a, t_0 + a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a > 0$ będzie funkcją ciągłą, spełniającą lokalnie warunek Lipschitza względem zmiennej x, która ma liniowy wzrost:*

$$|f(t, x)| \leqslant \alpha |x| + \beta, \quad |t - t_0| \leqslant a, \ x \in \mathbb{R}$$

dla pewnych $\alpha, \beta \geqslant 0$. Wówczas problem Cauchy'ego

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{3.39}$$

gdzie $x_0 \in \mathbb{R}$, ma dokładnie jedno rozwiązanie (globalne) w przedziale $[t_0 - a, t_0 + a]$.

Twierdzenie 3.11. *Jeśli funkcja $f : \mathbb{R}^2 \supset I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdzie I jest przedziałem domkniętym, jest ciągła i spełnia warunek lipschitza względem drugiej zmiennej, to spełnia warunek wzrostu liniowego*

$$|f(t,x)| \leqslant \alpha|x| + \beta, \quad (t,x) \in I \times \mathbb{R}$$

ze stałymi $\alpha, \beta \geqslant 0$.

Dowód. Niech $\bar{x} \in \mathbb{R}$ będzie ustalony. Dla dowolnego $t \in I$ i $x \in \mathbb{R}$ prawdziwe są nierówności:

$$\Big||f(t,x)| - |f(t,\bar{x})|\Big| \leqslant L|x - \bar{x}|,$$

$$|f(t,x)| \leqslant L|x-\bar{x}| + |f(t,\bar{x})| \leqslant L|x| + \Big(L|\bar{x}| + |f(t,\bar{x})|\Big).$$

Kładziemy:

$$\alpha := L, \quad \beta := L|\bar{x}| + \max_{t \in I} |f(t,\bar{x})|.$$

Uwaga 3.4. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, na co wskazuje przykład funkcji $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Funkcja ta spełnia warunek wzrostu liniowego

$$\Big|\sqrt{|x|}\Big| \leqslant |x| + 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

ale nie jest nawet lokalnie lipschitzowska (porównaj rozdział 3.1).

Uwaga 3.5. Twierdzenia 3.8 i 3.9 są szczególnymi przypadkami twierdzenia 3.10. W twierdzeniu 3.10 założenie liniowego wzrostu f jest ważne. Jeśli wzrost jest silniejszy, to rozwiązanie zagadnienia początkowego może być jedyne, ale nie musi być przedłużalne na cały przedział $[t_0 - a, t_0 + a]$. Ma to miejsce w przykładzie 3.1, biorąc dowolne $a \geqslant \frac{1}{2}$.

Przykład 3.7. Zagadnienia początkowe (3.30), (3.31) i (3.32) w przykładzie 3.6 mają dokładnie jedno rozwiązanie, które jest przedłużalne na $\mathbb{R}$.

Sprawdźmy to dla pierwszego problemu (3.30). Ustalmy dowolne $a > 0$. Rozważmy funkcję $f : [-a, a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$f(t,x) = \sin(x^2 + t^2), \quad (t,x) \in [-a,a] \times \mathbb{R}.$$

Funkcja ta jest ciągła i ograniczona oraz spełnia lokalny warunek Lipschitza względem zmiennej x, ponieważ pochodna

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = 2x\cos(x^2 + t^2), \quad (t,x) \in [-a,a] \times \mathbb{R}$$

jest ciągła (zobacz wniosek 3.2). A stąd twierdzenie 3.8 (twierdzenie 3.10 oczywiście też) implikuje istnienie jedynego rozwiązania określonego na przedziale $[-a, a]$. Ponieważ $a > 0$ jest dowolne, więc rozwiązanie to jest przedłużalne na $\mathbb{R}$. Warto jeszcze zwrócić uwagę na fakt, że $\frac{\partial f}{\partial x}$ nie spełnia warunku Lipschitza, więc nie można zastosować twierdzenia 3.9.

3.2 Istnienie rozwiązania problemu Cauchy'ego

Definicja 3.6. Ciąg (x_n) funkcji $x_n : \mathbb{R} \supset [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ jest wspólnie ograniczony, gdy

$$\exists M \geqslant 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \; \forall t \in [\alpha,\beta] \quad |x_n(t)| \leqslant M.$$

Definicja 3.7. Ciąg (x_n) funkcji $x_n : \mathbb{R} \supset [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ jest równociągły (jednakowo ciągły), gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \; \forall t_1, t_2 \in [\alpha,\beta] \quad |t_1 - t_2| < \delta \implies |x_n(t_1) - x_n(t_2)| < \varepsilon.$$

Z definicji 3.7 wynika natychmiast, że jeśli ciąg (x_n) jest równociągły, to funkcje x_n, $n \in \mathbb{N}$ są jednostajnie ciągłe.

Uwaga 3.6. Jak nietrudno zauważyć jeśli wszystkie funkcje x_n, $n \in \mathbb{N}$ spełniają warunek Lipschitza ze wspólną stałą $L > 0$, to ciąg (x_n) jest równociągły. Dla każdego $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$ możemy napisać

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n(t_1) - x_n(t_2)| \leqslant L|t_1 - t_2|.$$

Wystarczy dla zadanego $\varepsilon > 0$ położyć $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$. Jeśli zaś funkcje x_n, $n \in \mathbb{N}$ są różniczkowalne i ciąg (x_n') jest wspólnie ograniczony, to ciąg (x_n) jest równociągły. Jest to bezpośrednim wnioskiem z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej, gdyż dla dowolnych dwóch różnych punktów $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$ mamy wtedy

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n(t_1) - x_n(t_2)| = |x_n'(\tilde{t})|\, |t_1 - t_2| \leqslant M|t_1 - t_2|,$$

gdzie $\tilde{t} \in [\alpha, \beta]$ jest punktem pośrednim. Dla zadanego $\varepsilon > 0$ kładziemy $\delta := \frac{\varepsilon}{M}$.

Lemat 3.3 (Arzela-Ascoli)**.** *Z każdego ciągu (x_n) funkcji $x_n : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, który jest wspólnie ograniczony i równociągły można wybrać podciąg (x_{n_k}) jednostajnie zbieżny w $[\alpha, \beta]$.*

Czytelnik znajdzie dowód lematu 3.3 w [Myjak], str. 20.

Twierdzenie 3.12 (Peano, lokalne istnienie dla prostokąta)**.** *Niech $f : P \to \mathbb{R}$, gdzie $P = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leqslant a,\ |x - x_0| \leqslant b\}$, $a, b > 0$, będzie funkcją ciągłą. Wówczas problem Cauchy'ego*

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{3.40}$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie (lokalne) w przedziale $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, gdzie $\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$, $M = \max\{|f(t, x)| : (t, x) \in P\} > 0$.

Dowód. Twierdzenie wykażemy **metodą łamanych Eulera**. W dowodzie wykorzystamy indukcję matematyczną, równanie całkowe (3.22), lemat 3.3 i twierdzenie 3.2.

1. Stosując indukcję matematyczną, skonstruujemy ciąg (x_n) funkcji ciągłych $x_n : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tzw. łamanych Eulera. W celu uproszczenia dowodu, bez straty ogólności, ograniczymy się do przedziału $[t_0, t_0 + \alpha]$. Ustalmy dowolne $n \in \mathbb{N}$. Zdyskretyzujmy przedział $[t_0, t_0 + \alpha]$, definiując punkty $t_i^n = t_0 + i\delta_n$, $i = 0, ..., n$, gdzie $\delta_n = \frac{\alpha}{n}$ jest krokiem siatki. Rozważmy jeszcze punkty $x_n(t_i^n)$ określone wzorem rekurencyjnym

$$\begin{cases} \frac{x_n(t_{i+1}^n) - x_n(t_i^n)}{\delta_n} = f(t_i^n, x_n(t_i^n)), \quad i = 0, ..., n-1, \\ x_n(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{3.41}$$

Zwróćmy uwagę, że równania w dyskretnym zagadnieniu początkowym (3.41) powstały w wyniku aproksymacji pochodnej x' w różniczkowym problemie początkowym (3.40), ilorazem różnicowym. Każde dwa punkty $(t_i^n, x_n(t_i^n))$, $(t_{i+1}^n, x_n(t_{i+1}^n))$ łączymy odcinkiem i otrzymujemy w ten sposób krzywą (łamaną Eulera), która jest wykresem funkcji ciągłej $x_n : [t_0, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}$ określonej wzorem

$$x_n(t) = x_n(t_i^n) + \frac{x_n(t_{i+1}^n) - x_n(t_i^n)}{\delta_n}(t - t_i^n), \quad t \in [t_i^n, t_{i+1}^n],\ i = 0, ..., n-1.$$

Uwzględniając (3.41), możemy napisać

$$x_n(t) = x_n(t_i^n) + f(t_i^n, x_n(t_i^n))(t - t_i^n), \quad t \in [t_i^n, t_{i+1}^n],\ i = 0, ..., n-1. \tag{3.42}$$

Definicja (3.42) jest poprawna, o ile $x_n(t) \in [x_0-b, x_0+b]$ dla $t \in [t_0, t_0+\alpha]$. Fakt ten wykażemy indukcyjnie ze względu na i, $i = 0, ..., n$, gdzie n jest dowolnie ustalone.

1° W pierwszym kroku indukcyjnym niech $i = 0$. Mamy

$$|x_n(t) - x_0| = |f(t_0, x_0)|(t - t_0) \leqslant M\alpha \leqslant M\frac{b}{M} = b, \quad t \in [t_0, t_1^n].$$

2° W drugim kroku indukcyjnym ustalmy dowolne $i = 0, ..., n-1$ i załóżmy, że $|x_n(t)-x_0| \leqslant b$ dla $t \in [t_0, t_i^n]$. Pokażemy, że $|x_n(t) - x_0| \leqslant b$ dla $t \in [t_0^n, t_{i+1}^n]$. Dzięki założeniu indukcyjnemu wystarczy zacieśnić się do przedziału $[t_i^n, t_{i+1}^n]$. Zauważmy, że

$$x_n(t) = x_0 + f(t_0, x_0)\delta_n + ... + f(t_{i-1}^n, x_n(t_{i-1}^n))\delta_n + f(t_i^n, x_n(t_i^n))(t - t_i^n), \quad t \in [t_i^n, t_{i+1}^n]. \tag{3.43}$$

Aby się o tym przekonać, przeanalizujmy postać funkcji x_n dla $i = 0, 1$. Jeśli $i = 0$, to wprost z definicji (3.42) mamy

$$x_n(t) = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0), \quad t \in [t_0, t_1^n].$$

W szczególności

$$x_n(t_1^n) = x_0 + f(t_0, x_0)\delta_n.$$

Dla $i = 1$ na podstawie definicji (3.42) i obserwacji powyżej widzimy, że

$$x_n(t) = x_n(t_1^n) + f(t_1^n, x_n(t_1^n))(t - t_1^n) = x_0 + f(t_0, x_0)\delta_n + f(t_1^n, x_n(t_1^n))(t - t_1^n) \quad t \in [t_1^n, t_2^n].$$

Korzystając ze wzoru (3.43), stwierdzamy, że

$$\begin{aligned} |x_n(t) - x_0| &= |f(t_0, x_0)\delta_n + ... + f(t_{i-1}^n, x_n(t_{i-1}^n))\delta_n + f(t_i^n, x_n(t_i^n))(t - t_i^n)| \\ &\leqslant M(i+1)\delta_n = M(i+1)\frac{\alpha}{n} \leqslant M\alpha \leqslant M\frac{b}{M} = b, \quad t \in [t_i^n, t_{i+1}^n], \end{aligned}$$

co kończy dowód indukcyjny.

2. Ustalmy dowolne $n \in \mathbb{N}$. Rozważmy funkcję schodkową $\psi_n : [t_0, t_0+\alpha] \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$\psi_n(t) = \begin{cases} f(t_0, x_0), & t \in [t_0, t_1^n], \\ f(t_i^n, x_n(t_i^n)) & t \in (t_i^n, t_{i+1}^n], \ i = 1, ..., n-1. \end{cases}$$

Na podstawie definicji (3.42) wnioskujemy, że równość (3.43) jest prawdziwa dla każdego $i = 0, ..., n-1$. A to implikuje związek

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \psi_n(s)\, ds, \quad t \in [t_0, t_0 + \alpha]. \tag{3.44}$$

Prześledźmy bowiem tę sytuację, gdy $i = 0, 1$. Jeśli $i = 0$, to

$$x_0 + \int_{t_0}^{t} \psi_n(s)\, ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t_0, x_0)\, ds = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0) = x_n(t), \quad t \in [t_0, t_1^n].$$

A jeśli $i = 1$, to

$$\begin{aligned} x_0 + \int_{t_0}^{t} \psi_n(s)\, ds &= x_0 + \int_{t_0}^{t_1^n} \psi_n(s)\, ds + \int_{t_1^n}^{t} \psi_n(s)\, ds \\ &= x_0 + \int_{t_0}^{t_1^n} f(t_0, x_0)\, ds + \int_{t_1^n}^{t} f(t_1^n, x_n(t_1^n))\, ds \\ &= x_0 + f(t_0, x_0)\delta_n + f(t_1^n, x_n(t_1^n))(t - t_1^n) = x_n(t), \quad t \in [t_1^n, t_2^n]. \end{aligned}$$

Korzystając z formuły (3.44), sprawdzimy, że ciąg (x_n) jest równociągły w $[t_0, t_0+\alpha]$, gdyż każda funkcja x_n jest lipschitzowska ze wspólną, tj. niezależną od n, stałą. Rzeczywiście

$$|x_n(t_1) - x_n(t_2)| = \left|\int_{t_1}^{t_2} \psi_n(s)\,ds\right| \leqslant \left|\int_{t_1}^{t_2} |\psi_n(s)|\,ds\right| \leqslant M|t_1 - t_2|, \quad t_1, t_2 \in [t_0, t_0+\alpha],\ n \in \mathbb{N}.$$

Ciąg ten jest również wspólnie ograniczony w $[t_0, t_0+\alpha]$, bo

$$|\ |x_n(t)| - |x_0|\ | \leqslant |x_n(t) - x_0| \leqslant b, \quad t \in [t_0, t_0+\alpha],\ n \in \mathbb{N},$$

a w konsekwencji

$$|x_n(t)| \leqslant |x_0| + b, \quad t \in [t_0, t_0+\alpha],\ n \in \mathbb{N}.$$

Z lematu 3.3 wynika, że istnieje podciąg (x_{n_k}) jednostajnie zbieżny w przedziale $[t_0, t_0+\alpha]$ i jego granica, którą oznaczymy przez x, jest funkcją ciągłą.

3. Wzór (3.44) dla podciągu (x_{n_k}) możemy zapisać w postaci

$$x_{n_k}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds + \int_{t_0}^{t}\Big(\psi_{n_k}(s) - f(s, x(s))\Big)\,ds, \quad t \in [t_0, t_0+\alpha]. \tag{3.45}$$

Pokażemy, że druga całka w (3.45) zbiega do zera, gdy k zmierza do nieskończoności. Zdefiniujmy dwa pomocnicze ciągi funkcji schodkowych $y_n : [t_0, t_0+\alpha] \to \mathbb{R}$ i $z_n : [t_0, t_0+\alpha] \to \mathbb{R}$:

$$y_n(t) = \begin{cases} t_0, & t \in [t_0, t_1^n], \\ t_i^n & t \in (t_i^n, t_{i+1}^n],\ i = 1, ..., n-1, \end{cases}$$

$$z_n(t) = \begin{cases} x_n(t_0), & t \in [t_0, t_1^n], \\ x_n(t_i^n) & t \in (t_i^n, t_{i+1}^n],\ i = 1, ..., n-1. \end{cases}$$

Dla dowolnie zadanego $\varepsilon > 0$ istnieje $N_1 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\|y_n - id\| = \max\Big\{|t_i^n - t| : t \in [t_i^n, t_{i+1}^n],\ i = 0, ..., n-1\Big\} = \delta_n = \frac{\alpha}{n} < \varepsilon$$

dla $n \geqslant N_1$, co znaczy, że $y_n \rightrightarrows id$ $(n \to \infty)$ w $[t_0, t_0+\alpha]$. Ponieważ $x_{n_k} \rightrightarrows x$ $(k \to \infty)$ w $[t_0, t_0+\alpha]$ i x_{n_k} są ciągłe, dla dowolnie zadanego $\varepsilon > 0$ istnieje $N_2 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\begin{aligned} \|z_{n_k} - x\| &= \max\Big\{|x_{n_k}(t_i^{n_k}) - x(t)| : t \in [t_i^{n_k}, t_{i+1}^{n_k}],\ i = 0, ..., n_k - 1\Big\} \\ &\leqslant \max\Big\{|x_{n_k}(t_i^{n_k}) - x_{n_k}(t)| + |x_{n_k}(t) - x(t)| : t \in [t_i^{n_k}, t_{i+1}^{n_k}],\ i = 0, ..., n_k - 1\Big\} < \varepsilon \end{aligned}$$

dla $n \geqslant N_2$, czyli $z_{n_k} \rightrightarrows x$ $(k \to \infty)$ w $[t_0, t_0+\alpha]$. Biorąc pod uwagę uogólnioną wersję lematu 3.2 na przypadek dwóch ciągów zbieżnych jednostajnie, stwierdzamy, że

$$\lim_{k\to\infty} \int_{t_0}^{t} f\Big(y_{n_k}(s), z_{n_k}(s)\Big)\,ds = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds,$$

a tym samym

$$\lim_{k\to\infty} \int_{t_0}^{t}\Big(\psi_{n_k}(s) - f(s, x(s))\Big) = 0.$$

A więc po wykonaniu przejścia granicznego, funkcja ciągła x spełnia równanie całkowe (3.22). Zgodnie z twierdzeniem 3.2, x spełnia również zagadnienie początkowe (3.23).

Twierdzenie 3.13 (Peano, lokalne istnienie dla zbioru otwartego). *Załóżmy, że $f : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$, gdzie U jest zbiorem otwartym, jest funkcją ciągłą. Wówczas dla dowolnego punktu $(t_0, x_0) \in U$ problem Cauchy'ego*

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{3.46}$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie (lokalne).

Dowód. Ustalmy punkt $(t_0, x_0) \in U$. Ponieważ U jest zbiorem otwartym, istnieje otoczenie $U_0 \subset U$ punktu (t_0, x_0). Dobieramy prostokąt $P \subset U_0$ i stosujemy twierdzenie 3.12.

Podobnie jak wcześniej, postawmy sobie pytania o maksymalny przedział istnienia i jego wielkość dowolnego rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego, a także o istnienie rozwiązania w całym przedziale, do którego należy zmienna niezależna t, gdy nie mamy zagwaratowane jednoznaczności.

Twierdzenie 3.14 (Maksymalny przedział i osiąganie brzegu; tw. drugie). *Załóżmy, że $f : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$, gdzie U jest zbiorem otwartym, jest funkcją ciągłą i ograniczoną. Wówczas dla dowolnego punktu $(t_0, x_0) \in U$ każde rozwiązanie problemu Cauchy'ego*

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{3.47}$$

można przedłużyć w prawo tak, aby było określone w przedziale $[t_0, +\infty)$ albo, aby osiągało brzeg ∂U. Podobnie każde rozwiązanie tego problemu można przedłużyć w lewo tak, aby było określone w przedziale $(-\infty, t_0]$ albo, aby osiągało brzeg ∂U.

Dowód. Uzasadnienie tego twierdzenia jest dokładnie takie samo, jak dowód twierdzenia 3.7. Trzeba tylko zmodyfikować definicję t_* w następujący sposób:

$$t_* = \sup \{t > t_0 : \text{ problem (3.47) ma rozwiązanie w przedziale } [t_0, t]\}.$$

Twierdzenie 3.15 (Peano, globalne istnienie dla f ograniczonej). *Niech $f : [t_0-a, t_0+a]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a > 0$ będzie funkcją ciągłą i ograniczoną. Wówczas problem Cauchy'ego*

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{3.48}$$

gdzie $x_0 \in \mathbb{R}$, ma co najmniej jedno rozwiązanie (globalne) w przedziale $[t_0 - a, t_0 + a]$.

Dowód. Twierdzenie to dowodzi się analogicznie jak twierdzenie 3.8, przy czym korzysta się z twierdzenia 3.14 zamiast twierdzenia 3.7.

Twierdzenie 3.16 (Peano, globalne istnienie dla f o liniowym wzroście). *Niech $f : [t_0-a, t_0+a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a > 0$ będzie funkcją ciągłą, która ma liniowy wzrost:*

$$|f(t, x)| \leqslant \alpha|x| + \beta, \quad |t - t_0| \leqslant a, \ x \in \mathbb{R}$$

dla pewnych $\alpha, \beta \geqslant 0$. Wówczas problem Cauchy'ego

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{3.49}$$

gdzie $x_0 \in \mathbb{R}$, ma co najmniej jedno rozwiązanie (globalne) w przedziale $[t_0 - a, t_0 + a]$.

Uwaga 3.7. Dowody twierdzeń 3.10 i 3.16 przeprowadzimy w dalszej części, sprowadzając wyjściowy problem początkowy do równoważnego zagadnienia z prawą stroną ograniczoną lub korzystając z odpowiedniego nieliniowego twierdzenia porównawczego.

Uwaga 3.8. W twierdzeniach 3.8, 3.9, 3.10 o globalnym istnieniu i jednoznaczności rozwiązań zagadnienia początkowego oraz w twierdzeniach 3.15, 3.16 o globalnym istnieniu rozwiązania tego problemu, założenie o określoności funkcji f dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ jest istotne. Rozważmy bowiem problem początkowy

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{x}, & (t,x) \in [-1,1] \times [\frac{1}{2}, \infty) \\ x(0) = 1 \end{cases} . \tag{3.50}$$

Zdefiniujmy funkcję $f : [-1,1] \times [\frac{1}{2}, \infty) \to \mathbb{R}$ wzorem

$$f(t,x) = \frac{1}{x}, \quad (t,x) \in [-1,1] \times \Big[\frac{1}{2}, \infty\Big).$$

Oczywiście f jest ciągła i ograniczona. Jest to również funkcja lipschitzowska, gdyż

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\Big| = \Big|-\frac{1}{x^2}\Big| \leqslant 4, \quad (t,x) \in [-1,1] \times \Big[\frac{1}{2}, \infty\Big)$$

(zobacz wniosek 3.2). Spełnia ona też warunek liniowego wzrostu

$$|f(t,x)| \leqslant 4|x|, \quad (t,x) \in [-1,1] \times \Big[\frac{1}{2}, \infty\Big).$$

Jedynym rozwiązanie zagadnienia (3.50) jest funkcja

$$x(t) = \sqrt{2t+1}, \quad t \in \Big[-\frac{3}{8}, 1\Big],$$

która, jak widać, nie jest określona na całym przedziale $[-1,1]$.

Definicja 3.8. Układem n równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu w postaci normalnej nazywamy związek

$$\begin{cases} x_1'(t) = F_1\left(t, x_1(t), ..., x_n(t)\right), \\ \vdots \\ x_n'(t) = F_n\left(t, x_1(t), ..., x_n(t)\right), \end{cases} \tag{3.51}$$

gdzie $F_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ są danymi funkcjami, t zmienną niezależną, a x_i, $i = 1, ..., n$ funkcjami szukanymi.

Uwaga 3.9. Układ (3.51) można zapisać w formie jednego równania wektorowego

$$x'(t) = F(t, x(t)), \tag{3.52}$$

gdzie $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^n$, $F = (F_1, ..., F_n)$, $x = (x_1, ..., x_n)$. Wszystkie twierdzenia i uwagi przedstawione w tym rozdziale są prawdziwe dla równania (3.52) z warunkiem początkowym

$$x(t_0) = x_0, \tag{3.53}$$

gdzie punkt $(t_0, x_0) \in U$, $x_0 = (x_{01}, ..., x_{0n})$ jest dany. W dowodach wystarczy moduł zastąpić dowolną normą w $\mathbb{R}^n$.

Uwaga 3.10. Niech funkcja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}$ i punkt $(t_0, x_0) \in U$, $x_0 = (x_{01}, ..., x_{0n})$ będą dane. Zagadnienie Cauchy'ego dla równania różniczkowego zwyczajnego n-tego rzędu

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x^{(1)}(t), ..., x^{(n-1)}(t)),$$

$$x(t_0) = x_{01},\ x^{(1)}(t_0) = x_{02}, ..., x^{(n-1)}(t_0) = x_{0n}$$

jest równoważne zagadnieniu Cauchy'ego dla układu n równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = x_3(t) \\ \quad\vdots \\ x_{n-1}'(t) = x_n(t) \\ x_n'(t) = f\left(t, x_1(t), ..., x_n(t)\right) \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1(t_0) = x_{01} \\ x_2(t_0) = x_{02} \\ \quad\vdots \\ x_n(t_0) = x_{0n} \end{cases}.$$

Funkcję $F : U \to \mathbb{R}^n$ generującą ten układ równań możemy zapisać wzorem

$$F(t, x_1, ..., x_n) = (x_2, ..., x_n, f(t, x_1, ..., x_n)).$$

Widać, że F jest ciągła oraz lipschitzowska i spełnia warunek wzrostu liniowego względem $x = (x_1, ..., x_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy takie własności ma f.

Przykład 3.8. Zagadnienie Cauchy'ego dla równania różniczkowego drugiego rzędu

$$\begin{cases} x'' = x' + x^2 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 2 \end{cases} \tag{3.54}$$

i dla układu dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_2 + x_1^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 2 \end{cases} \tag{3.55}$$

są równoważne. Jeśli x jest rozwiązaniem (3.54), to $(x_1, x_2) = (x, x')$ jest rozwiązaniem (3.55) i na odwrót jeśli (x_1, x_2) jest rozwiązaniem (3.55), to $x = x_1$ jest rozwiązaniem (3.54).

3.3 Zadania

1. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania zagadnień początkowych:

   1.1. $x' = 1 - x^2, \quad x(0) = 0,$

   1.2. $x' = t(2x - 3), \quad x(1) = \frac{3}{2},$

   1.3. $x' = \frac{\sqrt{2-x}+1}{t^2+t+1}, \quad x(0) = 2.$

   Odpowiedź uzasadnić. Znaleźć też dziedzinę rozwiązań.

2. Wykazać, że problemy Cauchy'ego:

   2.1. $x' = \frac{1}{t}\left(t^2 x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} - t^2 x^{\frac{2}{5}} + x^{\frac{2}{5}} - t^2 + 1\right), \quad x(1) = 0,$

   2.2. $x' = \sin(x^2 + t^2) + x\ \mathrm{sgn}(t), \quad x(0) = 0$

   mają dokładnie jedno rozwiązanie.

3. Pokazać, że suma i różnica funkcji lipschitzowskich $f, g : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ jest lipschitzowska. A czy iloczyn i iloraz też mają tę własność? Ponadto wykazać, że jeśli sklejenie funkcji lipschitzowskich $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ i $g : [b, c) \to \mathbb{R}$ jest funkcją, to jest ona lipschitzowska. A jak będzie, gdy założymy, że funkcje f i g spełniają tylko lokalny warunek Lipschitza?

4. Wykazać, że funkcja
$$f(x) = \begin{cases} |x|^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$$
nie spełnia warunku Lipschitza.

5. Sprawdzić, czy problem Cauchy'ego
$$x' = \operatorname{sgn}(t-1), \quad x(1) = 0$$
ma rozwiązanie.

6. Sprawdzić, ile rozwiązań ma problem Cauchy'ego
$$x' = \operatorname{sgn}(3x-6), \quad x(0) = 2.$$

7. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x) = \begin{cases} x \ln |x| & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}.$$
Zbadać istnienie i jednoznaczność rozwiązań problemu Cauchy'ego
$$x' = f(x), \quad x(2) = 0.$$
Wykazać, że funkcja f jest ciągła, ale nie spełnia warunku Lipschitza w każdym przedziale, do którego należy $x = 0$.

8. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(t,x) = \begin{cases} \frac{x^3}{t} & \text{dla} \quad t \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad t = 0 \end{cases}.$$
Sprawdzić, czy problem Cauchy'ego
$$x' = f(t,x), \quad x(0) = x_0$$
ma rozwiązanie dla $x_0 = 1$, $x_0 = 0$.

9. Niech funkcja $f : (-a,a) \times (-b,b) \to \mathbb{R}$, gdzie $a, b > 0$, będzie ciągła oraz taka, że $f(t,x) < 0$ dla $tx > 0$ i $f(t,x) > 0$ dla $tx < 0$. Udowodnić, że problem Cauchy'ego
$$x' = f(t,x), \quad x(0) = 0$$
ma jedyne rozwiązanie $x(t) \equiv 0$. Korzystając z tego twierdzenia wykazać, że powyższe zagadnienie Cauchy'ego ma jedyne rozwiązanie $x(t) \equiv 0$, gdy $f(t,x) = -\sqrt[3]{tx(t^2+x^2)}$. Czy ta funkcja f jest lipschitzowska względem x w jakimkolwiek obszarze, do którego należy $(t,x) = (0,0)$?

10. Znaleźć nieskończenie wiele rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego
$$x' - 9t^2 x = (t^5 + t^2) x^{\frac{2}{3}}, \quad x(0) = 0$$
określonych na $\mathbb{R}$.

11. Pokazać, że funkcja $x(t) \equiv 2$ oraz rodzina funkcji

$$x_\alpha(t) = \begin{cases} 2, & t < \alpha \\ \frac{1}{4}(t-\alpha)^2 + 2, & t \geqslant \alpha \end{cases},$$

gdzie $\alpha \geqslant 1$, są rozwiązaniami zagadnienia początkowego

$$x' = \sqrt{x-2}, \quad x(1) = 2.$$

12. Uzasadnić, że problem początkowy

$$tx' = 2x, \quad x(0) = 0$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań określonych na $\mathbb{R}$.

13. Pokazać, że rozwiązanie problemu początkowego

$$x' = x^3, \quad x(0) = x_0,$$

gdzie $x_0 \neq 0$, nie może być przedłużone poza przedział $(-\infty, \frac{1}{2x_0^2})$. Przeanalizować przypadek, gdy $x_0 = 0$.

14. Wykazać, że problemy Cauchy'ego mają dokładnie jedno rozwiązanie i jest ono przedłużalne na $\mathbb{R}$:

14.1. $x' = t \operatorname{arcctg} x - \frac{\pi}{2}t, \quad x(0) = 0,$

14.2. $x' = (t^2 + x^2)\sin x + x\cos x, \quad x(0) = 0.$

15. Wykazać, że następujące równania mają wszystkie rozwiązania przedłużalne na $\mathbb{R}$:

15.1. $x' = \sin(x^2 + t^2),$

15.2. $x' = \sin(x^2 + t^2) + 3|x|,$

15.3. $x' = \frac{x^2}{x^2+t^2+1} + \cos^5 t,$

15.4. $x' = \frac{|x|}{|x|+t^2+1},$

15.5. $x' = \arcsin \frac{1}{x^2+t^2+2}.$

16. Dana jest funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leqslant 1 \\ -1, & x > 1 \end{cases}.$$

Wykazać, że:

16.1. zagadnienie początkowe

$$x' = f(x), \quad x(0) = 1$$

ma rozwiązanie dla $t \leqslant 0$ i nie ma rozwiązania dla $t \geqslant 0$,

16.2. równanie całkowe

$$x(t) = 1 + \int_0^t f(x(s))\,ds, \quad t \geqslant 0$$

nie ma ciągłego rozwiązania.

17. Niech $f : [t_0, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b] \to \mathbb{R}$, $a, b > 0$ będzie funkcją ciągłą, nierosnącą względem zmiennej x. Udowodnić, że problem początkowy

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

ma jedyne rozwiązanie. Uzasadnić też analogiczne twierdzenie dla funkcji $f : [t_0 - a, t_0] \times [x_0 - b, x_0 + b] \to \mathbb{R}$ ciągłej, niemalejącej względem zmiennej x.

18. Sprawdzić, że problem początkowy

$$x' = -\sin x - |x|^{\alpha}\mathrm{sgn}(x), \quad x(0) = 0,$$

gdzie $\alpha \geqslant 0$, ma jedyne rozwiązanie $x(t) \equiv 0$ dla $t \geqslant 0$. Pokazać, że jeśli $\alpha = 0$, to jest to również jedyne rozwiązanie dla $t \leqslant 0$.

19. Obliczyć $x'''(0)$, jeśli funkcja $x(t)$ jest rozwiązaniem problemu początkowego

$$x' = x^2 + x + t, \quad x(0) = 1.$$

20. Wyznaczyć rozwiązanie problemu początkowego

$$x' = x + t, \quad x(0) = 0$$

przy pomocy ciągu Picarda.

21. Sprawdzić, czy problem początkowy

$$x' = \sqrt{x} + 1, \quad x(0) = 0$$

ma rozwiązanie dla $t \leqslant 0$. Dlaczego nie można zastosować ani twierdzenia 3.1, ani żadnego twierdzenia Picarda i Peano? A czy można wykorzystać któreś z tych twierdzeń dla $t \in \mathbb{R}$?

Rozdział 4

Metoda punktów stałych

4.1 Twierdzenie Banacha o punkcie stałym

Twierdzenia 3.5 i 3.9 można udowodnić metodą punktu stałego. To bardzo popularna, nowoczesna i reprezentatywna technika dowodowa wykorzystująca narzędzia analizy funkcjonalnej. Jest ona często używana w dowodach twierdzeń o istnieniu rozwiązań oraz o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań, zarówno w teorii równań różniczkowych zwyczajnych, jak i cząstkowych. W tym przypadku skorzystamy z twierdzenia Banacha o punkcie stałym.

Twierdzenie 4.1 (Banacha o punkcie stałym)**.** *Jeśli (X, d) jest niepustą przestrzenią metryczną zupełną i $F : X \to X$ jest operatorem zwężającym (kontrakcją):*

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad d(F(x_1), F(x_2)) \leqslant k\; d(x_1, x_2),$$

gdzie $k \in [0, 1)$, to F ma dokładnie jeden punkt stały $x^* \in X$, tzn. taki że $F(x^*) = x^*$. Ponadto x^* jest granicą ciagu $x_n = F(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$ z dowolnym $x_0 \in X$ oraz

$$d(x_n, x^*) \leqslant \frac{k^n}{1-k}\, d(x_1, x_0).$$

Dowód twierdzenia 3.5 przy pomocy twierdzenia 4.1 Banacha o punkcie stałym. Dla uproszczenia rozważmy przedział $[t_0, t_0 + \alpha]$. Symbolem $X = C([t_0, t_0 + \alpha], \mathbb{R})$ oznaczmy przestrzeń wektorową skalarnych funkcji ciągłych określonych na $[t_0, t_0 + \alpha]$. Przestrzeń unormowana $(X, \| \, \|)$ z normą maksimum jest przestrzenią Banacha. Zdefiniujmy w tej przestrzeni kulę domkniętą

$$\overline{B}(x_0, b) = \{x \in X : \|x - x_0\| \leqslant b\},$$

przy czym x_0 traktujemy tutaj jako funkcję stałą na przedziale $[t_0, t_0 + \alpha]$. W przestrzeni X wprowadźmy metrykę generowaną przez normę

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in X.$$

Przestrzeń metryczna $(\overline{B}(x_0, b), d)$ jest zupełna, gdyż kula domknięta $\overline{B}(x_0, b)$ jest zbiorem domkniętym w $(X, \| \, \|)$. Zdefiniujmy operator $F : X \supset \overline{B}(x_0, b) \to X$ określony wzorem

$$F(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \quad t \in [t_0, t_0 + \alpha].$$

Ponieważ f i x są ciągłe, więc na podstawie twierdzenia Newtona-Leibniza F jest dobrze określony.

Zastosujemy twierdzenie Banacha do przestrzeni metrycznej $(\overline{B}(x_0, b), d)$ i operatora F.

1. Pokażemy, że operator F jest działaniem wewnętrznym (przekształca kulę $\overline{B}(x_0, b)$ w siebie):

$$F(\overline{B}(x_0, b)) \subset \overline{B}(x_0, b).$$

Niech funkcja $x \in \overline{B}(x_0, b)$ będzie dowolna i ustalmy dowolne $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. Korzystając z ograniczoności f i definicji α, znajdujemy oszacowanie

$$\begin{aligned} |F(x)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \right| &\leqslant \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s))|\, ds \\ &\leqslant M\alpha \leqslant M\frac{b}{M} = b, \quad t \in [t_0, t_0 + \alpha]. \end{aligned}$$

Przechodząc po lewej stronie do maksimum względem t, otrzymujemy, że $d(F(x), x_0) \leqslant b$. Zatem $F(x) \in \overline{B}(x_0, b)$.

2. Teraz sprawdzimy, że F jest kontrakcją (jest operatorem zwężającym). Bierzemy dwie dowolne funkcje $x, y \in \overline{B}(x_0, b)$ i ustalamy dowolne $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. Warunek Lipschitza dla f względem x i definicja α pociągają za sobą nierówności

$$\begin{aligned} |F(x)(t) - F(y)(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} [f(s, x(s)) - f(s, y(s))]\ ds \right| \\ &\leqslant \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))|\, ds \\ &\leqslant L \int_{t_0}^{t} |x(s) - y(s)|\, ds \\ &\leqslant L\, d(x, y) \int_{t_0}^{t} ds \\ &= L\, d(x, y)(t - t_0) \\ &\leqslant \alpha L\, d(x, y), \quad t \in [t_0, t_0 + \alpha]. \end{aligned}$$

Połóżmy $k = \alpha L$. Z założenia $\alpha < \frac{1}{L}$, więc $k < 1$. Znowu przechodząc po lewej stronie do maksimum względem t, uzyskujemy oszacowanie

$$d(F(x), F(y)) \leqslant k\, d(x, y), \quad x, y \in \overline{B}(x_0, b).$$

Z twierdzenia Banacha o punkcie stałym wynika, że operator F ma dokładnie jeden punkt stały $x^* \in \overline{B}(x_0, b)$, $F(x^*) = x^*$.

Wprost z definicji F wnioskujemy, że równanie operatorowe

$$F(x) = x$$

i równanie całkowe

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \quad t \in [t_0, t_0 + \alpha]$$

są równoważne w $\overline{B}(x_0, b)$. Biorąc pod uwagę twierdzenie 3.2, x^* jest jedynym rozwiązaniem problemu początkowego (3.23), co kończy dowód.

Niech $X = C([t_0, t_0 + a], \mathbb{R})$, $a > 0$ oznacza przestrzeń wektorową skalarnych funkcji ciągłych określonych na przedziale $[t_0, t_0 + a]$. W przestrzeni X zdefiniujmy normę

$$\|x\|_p = \max\left\{ e^{-(t-t_0)p} |x(t)| : t \in [t_0, t_0 + a] \right\}, \quad x \in X,$$

gdzie $p \geqslant 0$ jest dowolną liczbą. Aby udowodnić twierdzenie 3.9, korzystając z twierdzenia Banacha o punkcie stałym, wykorzystamy poniższy lemat.

Lemat 4.1. *Normy maksimum $\| \ \|$ i $\| \ \|_p$, $p \geqslant 0$ są równoważne oraz*

$$\|x\|_p \leqslant \|x\| \leqslant e^{ap} \|x\|_p, \quad x \in X,$$

Dowód twierdzenia 3.9 przy pomocy twierdzenia 4.1 Banacha o punkcie stałym. Dla uproszczenia rozważmy przedział $[t_0, t_0+a]$. Symbolem $X = C([t_0, t_0+a], \mathbb{R})$ oznaczmy przestrzeń wektorową skalarnych funkcji ciągłych określonych na $[t_0, t_0+a]$. Przestrzeń unormowana $(X, \| \ \|)$ z normą maksimum jest przestrzenią Banacha. W przestrzeni X wprowadźmy jeszcze normę Bieleckiego z $p = L$. Biorąc pod uwagę lemat 4.1, przestrzeń unormowana $(X, \| \ \|_L)$ też jest przestrzenią Banacha. Zdefiniujmy operator $F : X \to X$ określony wzorem

$$F(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \quad t \in [t_0, t_0 + a].$$

Ponieważ f i x są ciągłe, na podstawie twierdzenia Newtona-Leibniza F jest dobrze określony.

Zastosujemy wspomniane twierdzenie Banacha do przestrzeni $(X, \| \ \|_L)$ i operatora F. Zwróćmy uwagę, że tym razem nie zacieśniamy się do kuli domkniętej tak, jak miało to miejsce w przypadku dowodu twierdzenia 3.5 o lokalnym istnieniu i jednoznaczności rozwiązań.

Wystarczy sprawdzić, że F jest kontrakcją, gdyż działaniem wewnętrznym jest z definicji. Weźmy dwie dowolne funkcje $x, y \in X$ i ustalmy dowolne $t \in [t_0, t_0 + a]$. Warunek Lipschitza dla f względem x pociąga za sobą nierówności

$$\begin{aligned}
\|F(x) - F(y)\|_L &= \max\left\{e^{-(t-t_0)L} \left|F(x)(t) - F(y)(t)\right| : t \in [t_0, t_0 + a]\right\} \\
&= \max\left\{e^{-(t-t_0)L} \left|\int_{t_0}^{t} [f(s, x(s)) - f(s, y(s))]\; ds\right| : t \in [t_0, t_0 + a]\right\} \\
&\leqslant \max\left\{e^{-(t-t_0)L} \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))|\; ds : t \in [t_0, t_0 + a]\right\} \\
&\leqslant \max\left\{e^{-(t-t_0)L} L \int_{t_0}^{t} |x(s) - y(s)|\; ds : t \in [t_0, t_0 + a]\right\} \\
&= \max\left\{e^{-(t-t_0)L} L \int_{t_0}^{t} e^{-(s-t_0)L} |x(s) - y(s)|\, e^{(s-t_0)L}\, ds : t \in [t_0, t_0 + a]\right\} \\
&\leqslant \max\left\{e^{-(t-t_0)L} L \int_{t_0}^{t} \|x - y\|_L e^{(s-t_0)L}\, ds : t \in [t_0, t_0 + a]\right\} \\
&= \max\left\{e^{-(t-t_0)L} L \int_{t_0}^{t} e^{(s-t_0)L}\, ds : t \in [t_0, t_0 + a]\right\} \|x - y\|_L \\
&= \max\left\{e^{-(t-t_0)L} \left(e^{(t-t_0)L} - 1\right) : t \in [t_0, t_0 + a]\right\} \|x - y\|_L \\
&= \max\left\{1 - e^{-(t-t_0)L} : t \in [t_0, t_0 + a]\right\} \|x - y\|_L \\
&= \left(1 - e^{-aL}\right) \|x - y\|_L.
\end{aligned}$$

Połóżmy $k = 1 - e^{-aL}$. Mamy więc oszacowanie

$$\|F(x) - F(y)\|_L \leqslant k \|x - y\|_L, \quad x, y \in X.$$

Nietrudno sprawdzić, że $0 < k < 1$.

Z twierdzenia Banacha o punkcie stałym wynika, że operator F ma dokładnie jeden punkt stały $x^* \in X$, $F(x^*) = x^*$.

Rozumując tak samo, jak w dowodzie twierdzenia 3.5, stwierdzamy, że x^* jest jedynym rozwiązaniem problemu początkowego (3.38).

4.2 Twierdzenie Schaudera o punkcie stałym

W tym podrozdziale udowodnimy twierdzenia 3.12, 3.15 i 3.16 przy pomocy dwóch różnych wersji twierdzenia Schaudera o punkcie stałym. Będziemy zakładać, że $(X, \| \|)$ jest przestrzenią Banacha. Symbolem $\overline{A}$ będziemy oznaczać domknięcie zbioru $A \subset X$.

Zaczniemy od najprostszej wersji twierdzenia Schaudera, tj. takiej, gdy operator określony jest na zbiorze zwartym. Ale przykładowo kula domknięta w przestrzeni nieskończenie wymiarowej nie jest zwarta. Dlatego w dalszej części sformułujemy to twierdzenie bez krępującego w zastosowaniach założenia o zwartości dziedziny operatora, żądając w zamian zwartości samego operatora.

Twierdzenie 4.2 (Schaudera o punkcie stałym)**.** *Jeśli $M \subset X$ jest zbiorem niepustym, zwartym i wypukłym oraz $F : M \to M$ jest operatorem ciągłym, to F ma punkt stały.*

Definicja 4.1. Zbiór $A \subset X$ jest względnie zwarty, gdy zwarty jest zbiór $\overline{A}$.

Definicja 4.2. Operator $F : M \to X$, $M \subset X$ jest zwarty, gdy jest ciągły i zbiór $F(A)$ jest względnie zwarty dla każdego ograniczonego zbioru $A \subset M$.

Uwaga 4.1. Jeśli operator $F : M \to X$, $M \subset X$ jest ciągły i zbiór $F(M)$ jest względnie zwarty, to F jest zwarty. Ustalmy bowiem dowolny ograniczony zbiór $A \subset M$. Z własności obrazu zbioru oraz operacji domknięcia zbioru wiadomo, że $F(A) \subset F(M)$ i $\overline{F(A)} \subset \overline{F(M)}$. Wobec tego zbiór $\overline{F(A)}$ jest zwarty jako domknięty podzbiór zwartego zbioru $\overline{F(M)}$.

Uwaga 4.2. Wprost z uwagi 4.1 i twierdzenia Weierstrassa wynika, że jeśli operator $F : M \to X$, $M \subset X$ jest ciągły i zbiór M jest zwarty, to F jest zwarty.

Twierdzenie 4.3 (Schaudera o punkcie stałym)**.** *Jeśli $M \subset X$ jest zbiorem niepustym, domkniętym, ograniczonym i wypukłym oraz $F : M \to M$ jest operatorem zwartym, to F ma punkt stały.*

Twierdzenie 4.4 (Schaudera o punkcie stałym)**.** *Jeśli $F : X \to X$ jest operatorem zwartym, to ma punkt stały.*

Twierdzenie 4.5 (Arzela-Ascoli)**.** *Niech $\dim X < \infty$. Zbiór $Z \subset C([\alpha, \beta], X)$, $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ jest względnie zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbiorem funkcji równociągłych i wspólnie ograniczonych.*

Dowód twierdzenia 3.12 Peano przy pomocy twierdzenia 4.3 Schaudera o punkcie stałym. Dla uproszczenia rozważmy przedział $[t_0, t_0 + \alpha]$. Połóżmy $X = C([t_0, t_0 + \alpha], \mathbb{R})$. Przestrzeń $(X, \| \|)$ z normą maksimum jest przestrzenią Banacha. Zdefiniujmy w tej przestrzeni kulę domkniętą

$$\overline{B}(x_0, b) = \{x \in X : \ \|x - x_0\| \leqslant b\}.$$

Oczywiście jest to zbiór niepusty, domknięty, ograniczony i wypukły. Zdefiniujmy operator $F : \overline{B}(x_0, b) \to X$ wzorem

$$F(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \quad t \in [t_0, t_0 + \alpha].$$

Skoro f i x są ciągłe, to na mocy twierdzenia Newtona-Leibniza F jest dobrze określony.

Zastosujemy twierdzenie 4.3 Schaudera do naszej przestrzeni X, zbioru $M = \overline{B}(x_0, b)$ i operatora F.

1. Uzasadnienie, że F jest operatorem wewnętrznym, tj. że $F\left(\overline{B}(x_0, b)\right) \subset \overline{B}(x_0, b)$ jest dokładnie takie samo, jak w dowodzie twierdzenia 3.5 Picarda przy pomocy twierdzenia Banacha o punkcie stałym.

2. Aby wykazać, że F jest operatorem zwartym, sprawdzimy, że jest on ciągły i zbiór $F\left(\overline{B}(x_0,b)\right)$ jest względnie zwarty (zobacz uwagę 4.1).

Najpierw zbadamy ciągłość operatora F. Ustalmy dowolną funkcję $\tilde{x} \in \overline{B}(x_0,b)$. Chcemy pokazać, że F jest ciągły w $\tilde{x}$. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolnie ustaloną liczbą.

Ponieważ prostokąt P jest zbiorem zwartym, więc funkcja f jest jednostajnie ciągła na P. Oznacza to w szczególności, że istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla dowolnych $y_1, y_2 \in [x_0-b, x_0+b]$ jeśli $|y_1 - y_2| < \delta$, to $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| < \frac{\varepsilon}{\alpha}$ dla każdego $t \in [t_0, t_0+\alpha]$.

Zatem, jeżeli $x \in \overline{B}(x_0,b)$ i $\|x - \tilde{x}\| < \delta$, to

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(\tilde{x})\| &= \max_{t\in[t_0,t_0+\alpha]} \left| \int_{t_0}^{t} \left(f(s,x(s)) - f(s,\tilde{x}(s))\right) ds \right| \\ &\leqslant \max_{t\in[t_0,t_0+\alpha]} \int_{t_0}^{t} |f(s,x(s)) - f(s,\tilde{x}(s))|\, ds \\ &< \alpha\frac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Tym samym pokazaliśmy, że F jest operatorem ciągłym w $\tilde{x}$. Z dowolności $\tilde{x}$ wynika, że F jest ciągły.

W dalszej części dowiedziemy, że zbiór $F\left(\overline{B}(x_0,b)\right)$ jest względnie zwarty. Na mocy twierdzenia 4.5 Arzeli-Ascoliego wystarczy pokazać, że jest on zbiorem funkcji równociągłych i wspólnie ograniczonych.

Ustalmy dowolne $\varepsilon > 0$ i połóżmy $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Weźmy dowolną funkcję $y \in F\left(\overline{B}(x_0,b)\right)$, czyli $y = F(x)$ dla pewnej funkcji $x \in \overline{B}(x_0,b)$. Jeśli $t_1, t_2 \in [t_0, t_0+\alpha]$ i $|t_1 - t_2| < \delta$, to otrzymujemy

$$\begin{aligned} |y(t_1) - y(t_2)| &= \left| \int_{t_0}^{t_1} f(s,x(s))\,ds - \int_{t_0}^{t_2} f(s,x(s))\,ds \right| \\ &= \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s,x(s))\,ds \right| \\ &\leqslant \left| \int_{t_1}^{t_2} |f(s,x(s))|\,ds \right| \\ &< \delta M = \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon, \end{aligned}$$

co dowodzi, że $F\left(\overline{B}(x_0,b)\right)$ jest zbiorem funkcji równociągłych.

Teraz niech $y \in F\left(\overline{B}(x_0,b)\right)$, przy czym $y = F(x)$, $x \in \overline{B}(x_0,b)$, będzie dowolną funkcją. Wówczas dla każdego $t \in [t_0, t_0+\alpha]$ mamy

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(s,x(s))\,ds \right| \\ &\leqslant |x_0| + \int_{t_0}^{t_1} |f(s,x(s))|\,ds \\ &\leqslant |x_0| + \alpha M, \end{aligned}$$

czyli $F\left(\overline{B}(x_0,b)\right)$ jest zbiorem funkcji wspólnie ograniczonych.

Twierdzenie 4.3 Schaudera implikuje istnienie punktu stałego $x^* \in \overline{B}(x_0,b)$ operatora F. W efekcie x^* jest rozwiązaniem problemu początkowego (3.12) i dowód jest skończony.

Dowód twierdzenia 3.15 Peano przy pomocy twierdzenia 4.4 Schaudera o punkcie stałym. Uzasadnienie jest podobne, jak dowód twierdzenia 3.12 Peano dla prostokąta powyżej, z tą różnicą, że teraz $F : X \to X$, gdzie $X = C([t_0, t_0+a], \mathbb{R})$. Jedynie sprawdzenie ciągłości operatora F jest bardziej subtelne, bo zbiór $[t_0, t_0+a] \times \mathbb{R}$ nie jest zwarty. Ustalmy więc dowolną funkcję $\tilde{x} \in X$. Niech ε będzie dowolnie ustaloną liczbą. Połóżmy $\tilde{b} = \|x_0 - \tilde{x}\|$. Rozpatrzmy kulę domkniętą

$$\overline{B}(x_0, 2\tilde{b}) = \left\{x \in X : \ \|x - x_0\| \leqslant 2\tilde{b}\right\}$$

w przestrzeni X.

Prostokąt $[t_0, t_0 + a] \times [x_0 - 2\tilde{b}, x_0 + 2\tilde{b}]$ jest zbiorem zwartym. Dzięki jednostajnej ciągłości funkcji f na tym prostokącie, istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla dowolnych $y_1, y_2 \in [x_0 - 2\tilde{b}, x_0 + 2\tilde{b}]$ jeśli $|y_1 - y_2| < \delta$, to $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| < \frac{\varepsilon}{a}$ dla każdego $t \in [t_0, t_0 + a]$. Bez zmniejszenia ogólności rozważań załóżmy, że $\delta \leqslant \tilde{b}$.

Oczywiście $\tilde{x} \in \overline{B}(x_0, \tilde{b}) \subset \overline{B}(x_0, 2\tilde{b})$. Przypuśćmy teraz, że $x \in X$ i $\|x - \tilde{x}\| < \delta$. Mamy

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| &\leqslant \|x - \tilde{x}\| + \|\tilde{x} - x_0\| \\ &< \delta + \tilde{b} \leqslant 2\tilde{b}, \end{aligned}$$

a stąd $x \in \overline{B}(x_0, 2\tilde{b})$. Nierówność

$$|F(x) - F(\tilde{x})| < \varepsilon$$

otrzymujemy w ten sam sposób jak we wzorze (4.1).

Dowód twierdzenia 3.16 Peano przy pomocy twierdzenia 4.4 Schaudera o punkcie stałym. Wystarczy zamiast wyjściowego problemu Cauchy'ego (8.11), rozważyć problem (8.12) i skorzystać z twierdzenia 8.3 oraz z udowodnionego wyżej twierdzenia 3.15 dla funkcji f ograniczonej.

4.3 Zadania

1. Udowodnić lemat 4.1.

2. Pokazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ równanie

$$x^n - (1 + n)(1 - x) = 0$$

   ma w przedziale $(0, 1)$ dokładnie jeden pierwiastek.

3. Wykazać, że jeśli $|\lambda| > M \geqslant 0$ oraz funkcja $f : [a, b] \to [|\lambda|a, |\lambda|b]$ jest ciągła w $[a, b]$ i różniczkowalna w (a, b), przy czym $|f'(x)| \leqslant M$ dla $x \in (a, b)$, to równanie

$$f(x) = |\lambda|x$$

   ma dokładnie jedno rozwiązanie.

4. Udowodnić, że istnieje ciągła funkcja rzeczywista f określona na przedziale $I = [0, 1]$ spełniająca równanie

$$f(x) = \int_0^1 \sin\left(x + f^2(t)\right) dt$$

   dla wszystkich $x \in I$.

Rozdział 5

Równania różniczkowe liniowe n-tego rzędu

5.1 Teoria równań różniczkowych liniowych

Równanie różniczkowe

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(t)x^{(1)} + a_n(t)x = b(t), \tag{5.1}$$

gdzie funkcje $a_i, b : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ są dane, nazywamy równaniem liniowym n-tego rzędu. Gdy $b(t) \equiv 0$, $t \in I$, to mówimy, że (5.1) jest równaniem liniowym jednorodnym (RLJ)

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(t)x^{(1)} + a_n(t)x = 0 \tag{5.2}$$

w przeciwnym razie - równaniem liniowym niejednorodnym (RLN). Jeśli (5.1) jest równaniem niejednorodnym (RLN), to (5.2) nazywamy równaniem jednorodnym (RLJ) z nim skojarzonym.

Uwaga 5.1. Jeśli funkcje $a_i, b : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ są ciągłe, to zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(t)x^{(1)} + a_n(t)x = b(t) \\ x(t_0) = x_{01},\ x^{(1)}(t_0) = x_{02}, ..., x^{(n-1)}(t_0) = x_{0n} \end{cases} \tag{5.3}$$

ma jedyne rozwiązanie określone na I. W przypadku jeśli przedział I jest domknięty, wynika to wprost z uwag 3.9, 3.10 i twierdzenia 3.9 zastosowanych do funkcji $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ określonej wzorem

$$f(t, x_1, ..., x_n) = -a_1(t)x_n - ... - a_n(t)x_1 + b(t).$$

Funkcja ta jest ciągła, a ponadto spełnia warunek Lipschitza względem $x = (x_1, ..., x_n)$, bo dla dowolnych $x = (t, x_1, ..., x_n)$, $\overline{x} = (t, \overline{x}_1, ..., \overline{x}_n) \in I \times \mathbb{R}^n$ mamy

$$\begin{aligned} \Big| f(t, x_1, ..., x_n) - f(t, \overline{x}_1, ..., \overline{x}_n) \Big| &\leqslant \|a_1\||x_n - \overline{x}_n| + ... + \|a_n\||x_1 - \overline{x}_1| \\ &\leqslant \Big(\|a_1\| + ... + \|a_n\|\Big)\|x - \overline{x}\|_E, \end{aligned}$$

gdzie symbole $\| \ \|$ i $\| \ \|_E$ oznaczają odpowiednio normę maksimum w przestrzeni funkcji ciągłych $C(I, \mathbb{R})$ i normę euklidesową w $\mathbb{R}^n$. Jeśli zaś przedział I nie jest domknięty, to możemy powyższe rozumowanie przeprowadzić do każdego przedziału domkniętego $\tilde{I} \subset I$, co implikuje tezę.

Zanim przejdziemy do dalszej analizy równań (5.1) i (5.2), najpierw sformułujemy i omówimy pojęcie wrońskianu, wygodnego narzędzia do sprawdzania liniowej niezależności funkcji.

Definicja 5.1. Wrońskianem zbioru n funkcji skalarnych $\{x_1, ..., x_n\}$, $x_k : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$, $k = 1, ..., n$, $(n-1)$-krotnie różniczkowalnych nazywamy wyznacznik

$$W(x_1, ..., x_n)(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1^{(1)}(t) & \cdots & x_n^{(1)}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}. \tag{5.4}$$

W skrócie, o ile to będzie oczywiste, będziemy pisać $W(t)$.

Twierdzenie 5.1. *Załóżmy, że funkcje skalarne $x_1, ..., x_n : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ są $(n-1)$-krotnie różniczkowalne. Jeśli $W(t_0) \neq 0$ dla pewnego $t_0 \in I$, to funkcje $x_1, ..., x_n$ są liniowo niezależne.*

Dowód. Przypuśćmy, że $W(t_0) \neq 0$ dla pewnego $t_0 \in I$. Rozważmy zerową liniową kombinację

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + ... + \alpha_n x_n(t) = 0, \quad t \in I.$$

Różniczkując $(n-1)$ razy w punkcie t_0 powyższe równanie, otrzymujemy jednorodny układ równań algebraicznych

$$\begin{bmatrix} x_1(t_0) & \cdots & x_n(t_0) \\ x_1^{(1)}(t_0) & \cdots & x_n^{(1)}(t_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t_0) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $W(t_0) \neq 0$, więc układ ten ma jedyne rozwiązanie $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)^T = (0, 0, ..., 0)^T$, a to implikuje liniową niezależność funkcji $x_1, ..., x_n$.

Uwaga 5.2. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, tzn. z liniowej niezależności $(n-1)$-krotnie różniczkowalnych funkcji skalarnych $x_1, ..., x_n : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ nie musi wynikać, że $W(t_0) \neq 0$ w jakimś punkcie $t_0 \in I$. Rozważmy bowiem dwie różniczkowalne funkcje $x_1(t) = t^2$, $x_2(t) = t|t|$, $t \in \mathbb{R}$. Funkcje te są liniowo niezależne, zaś $W(t) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Definicja 5.2. Dowolny zbiór $\{x_1, ..., x_n\}$ liniowo niezależnych rozwiązań RLJ określonych w przedziale $\tilde{I} \subset I$ nazywamy układem fundamentalnym (podstawowym) tego równania w przedziale $\tilde{I}$.

Uwaga 5.3. Jeśli funkcje $a_i : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ są ciągłe, to układ fundamentalny RLJ w przedziale I istnieje. Istotnie, wystarczy rozważyć funkcje $x_k : I \to \mathbb{R}$, $k = 1, ..., n$, które są rozwiązaniami RLJ z warunkami początkowymi

$$x^{(j)}(t_0) = \delta_{j,k-1}, \quad k = 1, ..., n, \ j = 0, ..., n-1,$$

gdzie $t_0 \in I$ jest dowolnie ustalone; symbol $\delta_{j,k-1}$ oznacza deltę Kroneckera. Takie rozwiązania istnieją i dane są jednoznacznie na mocy uwagi 5.1. Wtedy

$$W(t_0) = |I| = 1 \neq 0.$$

Zgodnie z twierdzeniem 5.1, zbiór $\{x_1, ..., x_n\}$ jest układem fundamentalnym RLJ w przedziale I. Niestety nie ma ogólnej metody znajdowania takich rozwiązań. Problem efektywnego wyznaczania układu fundamentalnego w pewnych przypadkach omówimy w dalszej części.

W uwadze 5.2 zauważyliśmy, że twierdzenie 5.1 działa w ogólności tylko w jedną stronę. Ale jeśli funkcje $x_1, ..., x_n$ są rozwiązaniami RLJ o ciągłych współczynnikach, to działa ono również w drugą stronę, co więcej w drugą stronę jest mocniejsze.

Twierdzenie 5.2. *Niech funkcje skalarne $x_1, ..., x_n : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ będą rozwiązaniami RLJ o ciągłych współczynnikach a_i, $i = 1, ..., n$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

1. *zbiór $\{x_1, ..., x_n\}$ jest układem fundamentalnym RLJ w przedziale I,*
2. *istnieje $t_0 \in I$ takie, że $W(t_0) \neq 0$,*
3. *dla każdego $t \in I$ $W(t) \neq 0$.*

Dowód. Oczywiście z punktu 3. natychmiast wynika punkt 2., zaś z punktu 2 wynika punkt 1. na podstawie twierdzenia 5.1.

Wykażemy teraz, że punkt 1. implikuje punkt 3.. Zrobimy to przez zaprzeczenie, tzn. pokażemy, że z zerowania się wrońskianu w jakimś punkcie wynika liniowa zależność funkcji $x_1, ..., x_n$. Przypuśćmy, że istnieje $t_0 \in I$ takie, że $W(t_0) = 0$. Oznacza to, że wektory

$$x^1(t_0) = \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_1^{(1)}(t_0) \\ \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix}, \cdots, x^n(t_0) = \begin{bmatrix} x_n(t_0) \\ x_n^{(1)}(t_0) \\ \vdots \\ x_n^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix}$$

są liniowo zależne. Rozważmy zerową kombinację liniową

$$\alpha_1 x^1(t_0) + ... + \alpha_n x^n(t_0) = 0 \tag{5.5}$$

o nie wszystkich stałych $\alpha_1, ..., \alpha_n$ równych zeru. Zdefiniujmy funkcję

$$x(t) = \alpha_1 x_1(t) + ... + \alpha_n x_n(t), \quad t \in I$$

z tak dobranymi stałymi. Nietrudno sprawdzić, że x jest rozwiązaniem problemu początkowego

$$\begin{cases} x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(t)x^{(1)} + a_n(t)x = 0 \\ x(t_0) = 0, \ x^{(1)}(t_0) = 0, ..., x^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{cases},$$

gdyż kombinacja liniowa rozwiązań RLJ jest rozwiązaniem RLJ, a spełnienie warunków początkowych pociąga za sobą relacja (5.5). Ponieważ zgodnie z uwagą 5.1, zagadnienie to ma jedyne rozwiązanie zerowe określone na I, więc $x(t) \equiv 0$, $t \in I$. Zatem

$$\alpha_1 x_1(t) + ... + \alpha_n x_n(t) = 0, \quad t \in I,$$

co oznacza, że funkcje $x_1, ..., x_n$ są liniowo zależne.

Przykład 5.1. Rozważmy dwie funkcje skalarne $x_1(t) = t^3$ i $x_2(t) = t^2|t|$, $t \in \mathbb{R}$. Sprawdzić, czy istnieją ciągłe funkcje $a_1, a_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że x_1, x_2 są rozwiązaniami równania

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5.6}$$

Odpowiedź jest negatywna. Zauważmy bowiem, że x_1, x_2 są dwukrotnie różniczkowalne i liniowo niezależne. Gdyby x_1, x_2 rozwiązywały równanie (5.6), to tworzyłyby układ fundamentalny tego równania. A to jest niemożliwe, gdyż $W(t) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Uwaga 5.4. Niech $A(t) = [a_{ij}(t)]_{i,j=1}^n$ będzie macierzą kwadratową, której elementami są funkcje różniczkowalne $a_{ij} : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, ..., n$. Wówczas

$$|A(t)|' = \begin{vmatrix} a'_{11}(t) & \cdots & a'_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} + ... + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1}(t) & \cdots & a'_{nn}(t) \end{vmatrix}, \quad t \in I.$$

Twierdzenie 5.3 (Liouville). *Niech funkcje $a_i : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ będą ciągłe. Jeśli funkcje $x_1, ..., x_n$ są rozwiązaniami RLJ w przedziale I, to*

$$W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)\,ds}, \quad t \in I, \tag{5.7}$$

gdzie $t_0 \in I$ jest dowolnie ustalone.

Dowód. Obliczmy pochodną wrońskianu

$$W'(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1^{(1)}(t) & \cdots & x_n^{(1)}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-2)}(t) & \cdots & x_n^{(n-2)}(t) \\ x_1^{(n)}(t) & \cdots & x_n^{(n)}(t) \end{vmatrix}, \quad t \in I.$$

Zastępując ostatni wiersz wyrażeniami

$$x_i^{(n)}(t) = -a_1(t)x_i^{(n-1)}(t) - ... - a_{n-1}(t)x_i^{(1)}(t) - a_n(t)x_i(t), \quad i = 1, ..., n,$$

i korzystając z własności wyznaczników, mamy równanie różniczkowe pierwszego rzędu

$$W'(t) = -a_1(t)W(t), \quad t \in I.$$

W konsekwencji

$$W(t) = Ce^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)\,ds}, \quad t \in I.$$

Obliczamy $C = W(t_0)$.

Wniosek 5.1. Jeśli funkcje $a_i : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ są ciągłe i funkcje $x_1, ..., x_n$ są rozwiązaniami RLJ w przedziale I, to wrońskian albo jest identycznie równy zeru w przedziale I, albo jest różny od zera w każdym punkcie tego przedziału.

Twierdzenie 5.4. *Jeśli funkcje $a_i : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ są ciągłe, to rozwiązanie ogólne RLJ dane jest wzorem*

$$x(t) = C_1x_1(t) + ... + C_nx_n(t), \quad t \in I, \tag{5.8}$$

gdzie zbiór $\{x_1, ..., x_n\}$ jest układem fundamentalnym RLJ w przedziale I, i są to wszystkie rozwiązania tego równania na I.

Dowód. Zauważmy, że każda funkcja określona wzorem (5.8) zależy od n parametrów $C_1, ..., C_n \in \mathbb{R}$ i jest rozwiązaniem równania (5.2), gdy ustalimy parametry.

Pokażemy, że każde rozwiązanie φ równania (5.2) w przedziale I jest postaci (5.8), tzn. że istnieją stałe $C_1, ..., C_n \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\varphi(t) = C_1x_1(t) + ... + C_nx_n(t), \quad t \in I. \tag{5.9}$$

Niech φ będzie rozwiązaniem równania (5.2) w przedziale I. Zróżniczkujmy równanie (5.9) $(n-1)$-krotnie. Żeby uzasadnić istnienie stałych $C_1, ..., C_n$ wystarczy sprawdzić, że układ równań

$$\begin{bmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1^{(1)}(t) & \cdots & x_n^{(1)}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \varphi^{(1)}(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

ma rozwiązanie $(C_1, ..., C_n)^T$, które nie zależy od t. Dla dowolnie ustalonego $t \in I$ jest to układ liniowych równań algebraicznych, którego wyznacznik główny $W(t) \neq 0$ w świetle twierdzenia 5.2. Zgodnie ze wzorami Cramera układ ten ma jedyne rozwiązanie z

$$C_i(t) = \frac{W_i(t)}{W(t)}, \quad i = 1, ..., n,$$

gdzie

$$W_i(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & \cdots & x_{i-1}(t) & \varphi(t) & x_{i+1}(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1^{(1)}(t) & \cdots & x_{i-1}^{(1)}(t) & \varphi^{(1)}(t) & x_{i+1}^{(1)}(t) & \cdots & x_n^{(1)}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}](t) & \cdots & x_{i-1}^{(n-1)}(t) & \varphi^{(n-1)}(t) & x_{i+1}^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

Twierdzenie Liouville'a pociąga za sobą równości

$$C_i(t) = \frac{W_i(t)}{W(t)} = \frac{W_i(t_0)e^{-\int_{t_0}^t a_1(s)\,ds}}{W(t_0)e^{-\int_{t_0}^t a_1(s)\,ds}} = \frac{W_i(t_0)}{W(t_0)}, \quad i = 1, ..., n,$$

gdzie $t_0 \in I$ jest dowolnie ustalone. Oznacza to, że wartości C_i, $i = 1, ..., n$ nie zależą od t, co kończy dowód.

Wniosek 5.2. Jeśli współczynniki $a_i : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ są ciągłe, to zbiór rozwiązań RLJ z działaniem dodawania funkcji i mnożenia ich przez liczby rzeczywsite jest n wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Twierdzenie 5.5. *Jeśli x_j jest rozwiązaniem ogólnym RLJ skojarzonego z RLN określonym na przedziale $\tilde{I} \subset I$, zaś x_s jest rozwiązaniem szczególnym RLN określonym na $\tilde{I}$, to rozwiązanie ogólne RLN na $\tilde{I}$ dane jest wzorem*

$$x = x_j + x_s, \tag{5.10}$$

i są to wszystkie rozwiązania tego równania na $\tilde{I}$.

Dowód. Uzasadnienie powyższego twierdzenia jest analogiczne, jak dowód twierdzenia 2.2.

Uwaga 5.5. Jeśli $b(t) = b_1(t) + ... + b_m(t)$, to $x_s = x_{s1} + ... + x_{sm}$, gdzie x_{sk}, $k = 1, ..., m$ są rozwiązaniami szczególnymi równań RLN

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(t)x^{(1)} + a_n(t)x = b_k(t), \quad k = 1, ..., m.$$

Wynika to z liniowości RLN (5.1) i liniowości operacji pochodnej. Istotnie, po wstawieniu x_{sk} do powyższych równań i dodaniu ich stronami mamy

$$\Big(x_{s1} + ... + x_{sm}\Big)^{(n)} + a_1(t)\Big(x_{s1} + ... + x_{sm}\Big)^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(t)\Big(x_{s1} + ... + x_{sm}\Big)^{(1)} +$$

$$+ a_n(t)\Big(x_{s1} + ... + x_{sm}\Big) = b_1(t) + ... + b_m(t).$$

W przypadku równań liniowych pierwszego rzędu poznaliśmy metodę uzmienniania stałej, która pozwala wyznaczać rozwiązanie szczególne x_s RLN. Metodę tę można uogólnić na równania liniowe n-tego rzędu. Załóżmy, że $a_i, b : I \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ są ciągłe. Niech zbiór $\{x_1, ..., x_n\}$ będzie układem fundamentalnym RLJ skojarzonego z RLN w przedziale I. Na mocy twierdzenia 5.4 wiemy, że rozwiązanie ogólne RLJ jest postaci

$$x_j(t) = C_1x_1(t) + ... + C_nx_n(t), \quad t \in I. \tag{5.11}$$

Zaproponujmy
$$x_s(t) = C_1(t)x_1(t) + ... + C_n(t)x_n(t), \quad t \in I, \tag{5.12}$$
gdzie $C_i : I \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ są funkcjami klasy C^1. Twierdzimy, że takie funkcje istnieją i można je efektywnie wyznaczyć, rozwiązując układ równań

$$\begin{bmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1^{(1)}(t) & \cdots & x_n^{(1)}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-2)}(t) & \cdots & x_n^{(n-2)}(t) \\ x_1^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \\ \vdots \\ C_{n-1}'(t) \\ C_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}, \quad t \in I. \tag{5.13}$$

Metoda ta nosi nazwę **metody uzmienniania stałych**. Uzasadnienie przeprowadzimy dla $n = 1$ i $n = 2$. Dla $n > 2$ dowód jest analogiczny.

Niech $n = 1$. Równania (5.1) i (5.2) mają odpowiednio postać

$$x' + a_1(t)x = b(t), \tag{5.14}$$

$$x' + a_1(t)x = 0. \tag{5.15}$$

Zbiór $\{x_1\}$ jest układem fundamentalnym równania (5.15) w I, więc

$$x_j(t) = C_1x_1(t), \quad t \in I,$$

$$x_s(t) = C_1(t)x_1(t), \quad t \in I.$$

Obliczamy
$$x_s'(t) = C_1(t)x_1'(t) + \underbrace{C_1'(t)x_1(t)}_{b(t)}, \quad t \in I.$$

Sprawdźmy, że funkcję $C_1(t)$ można uzyskać, rozwiązując równanie

$$x_1(t)C_1'(t) = b(t), \quad t \in I. \tag{5.16}$$

Oczywiście równanie to ma jedyne rozwiązanie $C_1'(t)$, gdyż na mocy twierdzenia 5.2

$$W(t) = |x_1(t)| \neq 0, \quad t \in I.$$

Ponadto funkcje x_1 i b są ciągłe, co pozwala wyznaczyć $C(t)$. Po wstawieniu do równania (5.14) mamy

$$\begin{aligned} L &= C_1(t)x_1'(t) + b(t) + a_1(t)\Big(C_1(t)x_1(t)\Big) \\ &= C_1(t)\Big(\underbrace{x_1'(t) + a_1(t)x_1(t)}_{0}\Big) + b(t) = b(t) = P, \quad t \in I. \end{aligned}$$

Niech $n = 2$. Teraz równania (5.1) i (5.2) mają odpowiednio postać

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = b(t), \tag{5.17}$$

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0. \tag{5.18}$$

Zbiór $\{x_1, x_2\}$ jest układem fundamentalnym równania (5.18) w I, czyli

$$x_j(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t), \quad t \in I,$$

$$x_s(t) = C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t), \quad t \in I.$$

Obliczamy:

$$\begin{aligned} x_s'(t) &= C_1(t)x_1'(t) + C_1'(t)x_1(t) + C_2(t)x_2'(t) + C_2'(t)x_2(t) \\ &= C_1(t)x_1'(t) + C_2(t)x_2'(t) + \underbrace{C_1'(t)x_1(t) + C_2'(t)x_2(t)}_{0}, \quad t \in I. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_s''(t) &= C_1(t)x_1''(t) + C_1'(t)x_1'(t) + C_2(t)x_2''(t) + C_2'(t)x_2'(t) \\ &= C_1(t)x_1''(t) + C_2(t)x_2''(t) + \underbrace{C_1'(t)x_1'(t) + C_2'(t)x_2'(t)}_{b(t)}, \quad t \in I. \end{aligned}$$

Sprawdźmy, że funkcje $C_1(t)$ i $C_2(t)$ można uzyskać, rozwiązując układ równań

$$\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix}, \quad t \in I. \tag{5.19}$$

Widzimy, że układ ten ma jedyne rozwiązanie $(C_1'(t), C_2'(t))^T$, ponieważ zgodnie z twierdzeniem 5.2

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0, \quad t \in I.$$

Ponadto funkcje x_1, x_2, x_1', x_2' i b są ciągłe, a to pozwala wyznaczyć $C_1(t)$ i $C_2(t)$. Po wstawieniu do równania (5.17) otrzymujemy

$$\begin{aligned} L =& C_1(t)x_1''(t) + C_2(t)x_2''(t) + b(t) + a_1(t)\Big(C_1(t)x_1'(t) + C_2(t)x_2'(t)\Big) \\ &+ a_2(t)\Big(C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t)\Big) \\ =& C_1(t)\Big(\underbrace{x_1''(t) + a_1(t)x_1'(t) + a_2(t)x_1(t)}_{0}\Big) + C_2(t)\Big(\underbrace{x_2''(t) + a_1(t)x_2'(t) + a_2(t)x_2(t)}_{0}\Big) + b(t) \\ =& b(t) = P, \quad t \in I. \end{aligned}$$

5.2 Równania różniczkowe liniowe o stałych współczynnikach

Rozważmy odpowiednio RLN i RLJ

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + ... + a_{n-1}x^{(1)} + a_n x = b(t), \tag{5.20}$$

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + ... + a_{n-1}x^{(1)} + a_n x = 0, \tag{5.21}$$

gdzie stałe współczynniki $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ i ciągła funkcja $b : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ są dane. Równania (5.20) i (5.21) są oczywiście szczególnymi przypadkami odpowiednio równań (5.1) i (5.2). A skoro tak, to w celu wyznaczenia rozwiązania ogólnego równania (5.21) wystarczy znaleźć jakiś jego układ fundamentalny, zaś żeby wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania (5.20), trzeba wyznaczyć wpomniany układ fundamentalny równania (5.21) z nim skojarzonego i dodatkowo znaleźć jakiekolwiek rozwiązanie szczególne równania (5.21).

Zajmijmy się teraz efektywnym wyznaczeniem układu fundamentalnego RLJ. Poszukajmy rozwiązań RLJ (rzeczywistych lub zespolonych) w postaci

$$x_1 = e^{\lambda t},$$

gdzie $\lambda \in \mathbb{C}$ jest stałą, którą trzeba znaleźć. Wstawiając do równania (5.21), mamy

$$\begin{aligned} 0 &= \left(e^{\lambda t}\right)^{(n)} + a_1\left(e^{\lambda t}\right)^{(n-1)} + ... + a_{n-1}\left(e^{\lambda t}\right)^{(1)} + a_n e^{\lambda t} \\ &= e^{\lambda t}(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n), \end{aligned}$$

a następnie dzieląc przez $e^{\lambda t}$, otrzymujemy tzw. równanie charekterystyczne równania (5.21)

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n = 0. \tag{5.22}$$

Wielomian

$$\Delta(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n$$

nazywamy wielomianem charakterystycznym równania (5.21). Zgodnie z podstawowym twierdzeniem algebry równanie (5.22) ma łącznie z krotnościami dokładnie n pierwiastków. Możemy napisać

$$e^{\lambda t}\Delta(\lambda) = 0.$$

Widzimy, że jeśli λ jest pierwiastkiem rzeczywistym równania (5.22), tzn. że $\Delta(\lambda) = 0$, to funkcja

$$x_1 = e^{\lambda t}$$

jest rozwiązaniem rzeczywistym równania (5.21), a jeśli $\lambda = \alpha + \beta i$ $(\beta \neq 0)$ jest pierwiastkiem zespolonym równania (5.22), to funkcja

$$x_1 = e^{(\alpha+\beta i)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$$

jest rozwiązaniem zespolonym równania (5.21). W przypadku rozwiązania zespolonego można zauważyć, korzystając z liniowości równania (5.21) i liniowości różniczkowania, że jego części rzeczywista i urojona

$$x_{11} = e^{\alpha t}\cos\beta t, \quad x_{12} = e^{\alpha t}\sin\beta t$$

też są rozwiązaniami tego równania. Rzeczywiście mamy

$$\begin{aligned} 0 &= x_1^{(n)} + a_1 x_1^{(n-1)} + ... + a_{n-1}x_1^{(1)} + a_n x_1 \\ &= (x_{11} + x_{12}i)^{(n)} + a_1(x_{11} + x_{12}i)^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x_{11} + x_{12}i)^{(1)} + a_n(x_{11} + x_{12}i) \\ &= \left(x_{11}^{(n)} + a_1 x_{11}^{(n-1)} + ... + a_{n-1}x_{11}^{(1)} + a_n x_{11}\right) + \left(x_{12}^{(n)} + a_1 x_{12}^{(n-1)} + ... + a_{n-1}x_{12}^{(1)} + a_n x_{12}\right)i. \end{aligned}$$

A stąd:

$$\begin{aligned} x_{11}^{(n)} + a_1 x_{11}^{(n-1)} + ... + a_{n-1}x_{11}^{(1)} + a_n x_{11} = 0, \\ x_{12}^{(n)} + a_1 x_{12}^{(n-1)} + ... + a_{n-1}x_{12}^{(1)} + a_n x_{12} = 0. \end{aligned}$$

Okazuje się, że jeśli λ jest k-krotnym pierwiastkiem rzeczywistym równania (5.22), to rozwiązaniami rzeczywistymi równania (5.21) są funkcje

$$x_j = t^{j-1}e^{\lambda t}, \quad j = 1, ..., k,$$

a jeśli $\lambda = \alpha + \beta i$ $(\beta \neq 0)$ jest k-krotnym pierwiastkiem zespolonym równania (5.22), to rozwiązaniami zespolonymi równania (5.21) są funkcje

$$x_j = t^{j-1}e^{(\alpha+\beta i)t} = t^{j-1}e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t), \quad j = 1, ..., k.$$

Sprawdźmy to dla $k = 2$, gdyż dla $k > 2$ idea uzasadnienia jest analogiczna. Oczywiście wystarczy rozważyć $j = 2$, bo dla $j = 1$ rozumowanie przeprowadziliśmy powyżej. Kładziemy

$$x_2 = te^{\lambda t}$$

i chcemy pokazać, że jeśli λ jest dwukrotnym pierwiastkiem równania (5.22), to

$$(te^{\lambda t})^{(n)} + a_1(te^{\lambda t})^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(te^{\lambda t})^{(1)} + a_n te^{\lambda t} = 0.$$

Zauważmy, że dla dowolnej $\lambda \in \mathbb{C}$ prawdziwe są równości

$$\begin{aligned}
&(te^{\lambda t})^{(n)} + a_1(te^{\lambda t})^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(te^{\lambda t})^{(1)} + a_n te^{\lambda t}\\
=&\Big(\frac{d}{d\lambda}e^{\lambda t}\Big)^{(n)}+a_1\Big(\frac{d}{d\lambda}e^{\lambda t}\Big)^{(n-1)}+... + a_{n-1}\Big(\frac{d}{d\lambda}e^{\lambda t}\Big)^{(1)}+a_n\frac{d}{d\lambda}e^{\lambda t}\\
=&\frac{d}{d\lambda}\Big[\Big(e^{\lambda t}\Big)^{(n)}+a_1\Big(e^{\lambda t}\Big)^{(n-1)}+... + a_{n-1}\Big(e^{\lambda t}\Big)^{(1)}+a_n e^{\lambda t}\Big]\\
=&\frac{d}{d\lambda}\Big[e^{\lambda t}\Delta(\lambda)\Big]\\
=&te^{\lambda t}\Delta(\lambda) + e^{\lambda t}\Delta'(\lambda).
\end{aligned}$$

A jeśli λ jest dwukrotnym pierwiastkiem równania (5.22), to $\Delta(\lambda) = 0$ i $\Delta'(\lambda) = 0$, co kończy uzasadnienie. Rozumując dokładnie tak samo jak wcześniej dla $j = 1$, stwierdzamy, że w przypadku zespolonym części rzeczywiste i urojone

$$x_{j1} = t^{j-1}e^{\alpha t}\cos\beta t, \quad x_{j2} = t^{j-1}e^{\alpha t}\sin\beta t, \quad j = 1, ..., k$$

również są rozwiązaniami równania (5.21).

Zdefiniujmy zbiór n funkcji $\{x_1, ..., x_n\}$ odpowiadający n (licząc z krotnościami) pierwiastkom równania charakterystycznego (5.22) w następujący sposób.

1. Jeżeli $\lambda \in \mathbb{R}$ jest k-krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego, to w skład układu $\{x_1, ..., x_n\}$ włączamy k funkcji:

$$e^{\lambda t},\ te^{\lambda t}, \dots, t^{k-1}e^{\lambda t}.$$

2. Jeżeli $\lambda = \alpha + \beta i$, $\overline{\lambda} = \alpha - \beta i \in \mathbb{C}$ $(\beta \neq 0)$ są k-krotnymi pierwiastkami równania charakterystycznego, to w skład układu $\{x_1, ..., x_n\}$ włączamy $2k$ funkcji:

$$e^{\alpha t}\cos\beta t,\ te^{\alpha t}\cos\beta t, \dots, t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t,$$

$$e^{\alpha t}\sin\beta t,\ te^{\alpha t}\sin\beta t, \dots, t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

Zbiór $\{x_1, ..., x_n\}$ zdefiniowany powyżej jest układem fundamentalnym RLJ. Oczywiście wystarczy pokazać, że funkcje $x_1, ..., x_n$ są liniowo niezależne. Dowód tego faktu dla dowolnego n podamy w rozdziale 6 jako prosty wniosek z analizy układów n liniowych równań różniczkowych pierwszego rzędu. Teraz ograniczymy się jedynie do uzasadnienia liniowej niezależności w prostszym przypadku $n = 2$. W tym celu skorzystamy z własności wrońskianu.

Jeśli $n = 2$, to równanie (5.21) ma postać

$$x'' + a_1x' + a_2x = 0. \tag{5.23}$$

Równanie charakterystyczne jest równaniem kwadratowym

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0. \tag{5.24}$$

1. Przypadek $\Delta > 0$. Pierwiastkami jednokrotnymi równania (5.24) są dwie różne liczby $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, zaś funkcje

$$x_1 = e^{\lambda_1 t}, \quad x_2 = e^{\lambda_2 t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

są rozwiązaniami równania (5.23). Obliczamy

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1+\lambda_2)t} \neq 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

skąd na podstawie twierdzenia 5.2 stwierdzamy, że zbiór $\{x_1, x_2\}$ jest układem fundamentalnym równania (5.23).

2. Przypadek $\Delta = 0$. Pierwiastkiem dwukrotnym równania (5.24) jest liczba $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, zaś funkcje

$$x_1 = e^{\lambda_1 t}, \quad x_2 = te^{\lambda_1 t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

są rozwiązaniami równania (5.23). Obliczamy

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 te^{\lambda_1 t} \end{vmatrix} = e^{2\lambda_1 t} \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

i znowu korzystając z twierdzenia 5.2, wnioskujemy, że zbiór $\{x_1, x_2\}$ jest układem fundamentalnym równania (5.23).

3. Przypadek $\Delta < 0$. Pierwiastkami jednokrotnymi równania (5.24) są dwie różne liczby $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\overline{\lambda_1} = \alpha - \beta i \in \mathbb{C}$, $\beta \neq 0$ zaś funkcje

$$x_{11} = e^{\alpha t}\cos\beta t, \quad x_{12} = e^{\alpha t}\sin\beta t, \quad t \in \mathbb{R}$$

są rozwiązaniami równania (5.23). Obliczamy

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t & e^{\alpha t}\sin\beta t \\ \alpha e^{\alpha t}\cos\beta t - \beta e^{\alpha t}\sin\beta t & \alpha e^{\alpha t}\sin\beta t + \beta e^{\alpha t}\cos\beta t \end{vmatrix} = \beta e^{2\alpha t} \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

i analogicznie jak wyżej, dochodzimy do wniosku, że zbiór $\{x_{11}, x_{12}\}$ jest układem fundamentalnym równania (5.23).

W poprzednim rozdziale omówiliśmy metodę uzmienniania stałych, która pozwala znajdować rozwiązanie szczególne x_s RLN, o ile znamy układ fundamentalny skojarzonego z nim RLJ. Okazuje się, że jeśli współczynniki a_i, $i = 1, ..., n$ są stałe i prawa strona $b(t)$ tego równania jest odpowiedniej postaci, to rozwiązanie szczególne potrafimy przewidzieć, a następnie obliczyć i to bez znajomości układu fundamentalnego, a także bez całkowania. Taki sposób wyznaczania x_s nazywamy **metodą przewidywania** lub **metodą współczynników nieoznaczonych**.

1. $b(t) = e^{at}p_n(t)$, liczba $a \in \mathbb{R}$ jest k-krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego skojarzonego RLJ, zaś $p_n(t)$ jest wielomianem stopnia n.

Przewidujemy

$$x_s(t) = t^k e^{at} q_n(t),$$

gdzie $q_n(t)$ jest wielomianem stopnia n, który znajdujemy, wstawiając x_s do RLN.

2. $b(t) = e^{\alpha t}\Big(p_n(t)\cos\beta t + q_m(t)\sin\beta t\Big)$, liczba $\alpha + \beta i \in \mathbb{C}$ jest k-krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego skojarzonego RLJ, zaś $p_n(t)$ i $q_m(t)$ są wielomianami odpowiednio stopnia n i m.

Przewidujemy

$$x_s(t) = t^k e^{\alpha t}\Big(w_l(t)\cos\beta t + r_l(t)\sin\beta t\Big),$$

gdzie $w_l(t)$ i $r_l(t)$ są wielomianami stopnia l, $l = \max\{n, m\}$, który znajdujemy, wstawiając x_s do RLN.

Przykład 5.2. Znaleźć rozwiązanie ogólne RLN

$$x'' + x' - 2x = e^t. \tag{5.25}$$

Zacznijmy od wyznaczenia rozwiązania ogólnego RLJ skojarzonego z RLN

$$x'' + x' - 2x = 0. \tag{5.26}$$

Równanie charakterystyczne dane jest wzorem

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

Pierwiastkami tego równania są liczby:

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 1.$$

A więc

$$x_j(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Rozwiązanie szczególne RLN znajdziemy metodą uzmienniania stałych i metodą przewidywania, a później porównamy otrzymane wyniki.

I sposób (metoda uzmienniania stałych).
Szukamy rozwiązania szczególnego RLN zgodnie ze wzorem

$$x_{s1}(t) = C_1(t)e^{-2t} + C_2(t)e^t.$$

W tym celu należy rozwiązać układ równań

$$\begin{bmatrix} e^{-2t} & e^t \\ -2e^{-2t} & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}.$$

Obliczamy wyznacznik główny

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{-2t} & e^t \\ -2e^{-2t} & e^t \end{vmatrix} = 3e^{-t}$$

oraz dwa wyznaczniki:

$$W_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & e^t \\ e^t & e^t \end{vmatrix} = -e^{2t},$$

$$W_2(t) = \begin{vmatrix} e^{-2t} & 0 \\ -2e^{-2t} & e^t \end{vmatrix} = e^{-t}.$$

Korzystając ze wzorów Cramera, otrzymujemy jedyne funkcje:

$$C_1'(t) = -\frac{1}{3}e^{3t},$$

$$C_2'(t) = \frac{1}{3},$$

a po scałkowaniu możemy przyjąć:

$$C_1(t) = -\frac{1}{9}e^{3t},$$

$$C_2(t) = \frac{1}{3}t.$$

Stąd

$$x_{s1}(t) = -\frac{1}{9}e^t + \frac{1}{3}te^t.$$

II sposób (metoda przewidywania).
Ponieważ $b(t) = e^t$, $a = 1$, $k = 1$, więc przewidujemy rozwiązanie szczególne RLN w postaci

$$x_{s2}(t) = Ate^t.$$

Żeby wyznaczyć stałą A, zróżniczkujmy x_{s2}:

$$x'_{s2}(t) = Ae^t + Ate^t,$$

$$x''_{s2}(t) = 2Ae^t + Ate^t$$

i wstawmy x_{s2} wraz z jej pochodnymi do RLN. Po uproszczeniu mamy równanie algebraiczne

$$3Ae^t = e^t,$$

z którego obliczamy $A = \frac{1}{3}$. Zatem

$$x_{s2}(t) = \frac{1}{3}te^t.$$

Bez przeprowadzania rachunków widać, że $x_{s1} \neq x_{s2}$.

Ostatecznie rozwiązanie ogólne RLN dane jest wzorem

$$x(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^t + x_{s1}(t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

lub równoważnie

$$x(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^t + x_{s2}(t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Przykład 5.3. Wyznaczyć rozwiązanie ogólne RLN

$$x''' + 9x' = \cos 2t + \sin 3t + t\sin t + t^2 + 1 + \frac{1}{\cos t}. \tag{5.27}$$

Najpierw znajdziemy rozwiązanie ogólne RLJ skojarzonego z RLN

$$x''' + 9x' = 0. \tag{5.28}$$

Pierwiastkami równania charakterystycznego

$$\lambda^3 + 9\lambda = 0$$

są liczby:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3i, \quad \lambda_3 = -3i.$$

Zatem

$$x_j(t) = C_1 + C_2\cos 3t + C_3\sin 3t, \quad C_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, 3.$$

W celu znalezienia rozwiązania szczególnego RLN, wygodnie będzie przeprowadzić obliczenia dla pięciu RLN z b_i, $i = 1, ..., 5$ odpowiednio równymi:

$$b_1(t) = \cos 2t, \quad b_2(t) = \sin 3t, \quad b_3(t) = t\sin t, \quad b_4(t) = t^2 + 1, \quad b_5(t) = \frac{1}{\cos t}.$$

Do pierwszych czterech RLN zastosujemy metodę przewidywania, zaś do ostatniego metodę uzmienniania stałych, gdyż w tym przypadku użycie metody przewidywania jest niemożliwe.

1) $b_1(t) = \cos 2t = e^{0t}(1\cos 2t + 0\sin 2t)$, $\alpha + \beta i = 2i$, $k = 0$.
Przewidujemy

$$x_{s1} = A\cos 2t + B\sin 2t.$$

Aby wyznaczyć stałe A i B, zróżniczkujmy x_{s1}:

$$\begin{aligned} x'_{s1} &= -2A\sin 2t + 2B\cos 2t, \\ x''_{s1} &= -4A\cos 2t - 4B\sin 2t, \\ x'''_{s1} &= 8A\sin 2t - 8B\cos 2t, \end{aligned}$$

wstawmy te pochodne do RLN

$$x''' + 9x' = \cos t$$

i po uproszczeniu otrzymujemy równanie algebraiczne

$$-10A\sin 2t + 10B\cos 2t = \cos 2t.$$

W konsekwencji $A = 0$ i $B = \frac{1}{10}$, co implikuje

$$x_{s1} = \frac{1}{10}\sin 2t.$$

2) $b_2(t) = \sin 3t = e^{0t}(0\cos 3t + 1\sin 3t)$, $\alpha + \beta i = 3i$, $k = 1$.
Teraz przewidujemy

$$x_{s2} = t(A\cos 3t + B\sin 3t).$$

Wykonajmy różniczkowanie x_{s2}:

$$\begin{aligned} x'_{s2} &= A\cos 3t + B\sin 3t + t(-3A\sin 3t + 3B\cos 3t), \\ x''_{s2} &= -6A\sin 3t + 6B\cos 3t + t(-9A\cos 3t - 9B\sin 3t), \\ x'''_{s2} &= -27A\cos 3t - 27B\sin 3t + t(27A\sin 3t - 27B\cos 3t), \end{aligned}$$

następnie wstawmy te pochodne do RLN

$$x''' + 9x' = \sin 3t$$

i po uproszczeniu mamy równanie algebraiczne

$$-18A\cos 3t - 18B\sin 3t = \sin 3t.$$

W efekcie $A = 0$ i $B = -\frac{1}{18}$, a stąd

$$x_{s2} = -\frac{1}{18}t\sin 3t.$$

3) $b_3(t) = t\sin t = e^{0t}(0\cos t + t\sin t)$, $\alpha + \beta i = i$, $k = 0$.
Tym razem przewidujemy

$$x_{s3} = (At + B)\cos t + (Ct + D)\sin t.$$

Zróżniczkujmy x_{s3}:

$$\begin{aligned} x'_{s3} &= A\cos t - (At + B)\sin t + C\sin t + (Ct + D)\cos t, \\ x''_{s3} &= -2A\sin t - (At + B)\cos t + 2C\cos t - (Ct + D)\sin t, \\ x'''_{s3} &= -3A\cos t + (At + B)\sin t - 3C\sin t - (Ct + D)\cos t, \end{aligned}$$

wstawmy te pochodne do RLN

$$x''' + 9x' = t\sin t$$

i po uproszczeniu dochodzimy do równania algebraicznego

$$(6A+8D)\cos t+(-8B+6C)\sin t+8Ct\cos t-8At\sin t=t\sin t.$$

Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} 6A+8D=0 \\ -8B+6C=0 \\ 8C=0 \\ -8A=1 \end{cases},$$

mamy $A=-\frac{1}{8}$, $B=0$, $C=0$ i $D=\frac{3}{32}$, czyli

$$x_{s3}=-\frac{1}{8}t\cos t+\frac{3}{32}\sin t.$$

4) $b_4(t)=t^2+1=e^{0t}(t^2+1)$, $a=0$, $k=1$.
I znowu przewidujemy

$$x_{s4}=t(At^2+Bt+C).$$

Po zróżniczkowaniu x_{s4}:

$$\begin{aligned} x'_{s4} &= 3At^2+2Bt+C, \\ x''_{s4} &= 6At+2B, \\ x'''_{s4} &= 6A, \end{aligned}$$

wstawieniu pochodnych do RLN

$$x'''+9x'=t^2+1$$

i uproszczeniu otrzymujemy równanie algebraiczne

$$27At^2+18Bt+6A+9C=t^2+1.$$

Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} 27A=0 \\ 18B=0 \\ 6A+9C=1 \end{cases},$$

mamy $A=\frac{1}{27}$, $B=0$, $C=\frac{7}{81}$, a co za tym idzie

$$x_{s4}=\frac{1}{27}t^3+\frac{7}{81}t.$$

5) $b_5(t)=\frac{1}{\cos t}$.
Zastosujemy metodę uzmienniania stałych, tj. poszukamy

$$x_{s5}=C_1(t)+C_2(t)\cos 3t+C_3(t)\sin 3t.$$

Musimy rozwiązać układ równań

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos 3t & \sin 3t \\ 0 & -3\sin 3t & 3\cos 3t \\ 0 & -9\cos 3t & -9\sin 3t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C'_1(t) \\ C'_2(t) \\ C'_3(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\cos t} \end{bmatrix}.$$

Obliczamy wyznacznik główny

$$W(t)=\begin{vmatrix} 1 & \cos 3t & \sin 3t \\ 0 & -3\sin 3t & 3\cos 3t \\ 0 & -9\cos 3t & -9\sin 3t \end{vmatrix}=27$$

oraz trzy wyznaczniki:

$$W_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & \cos 3t & \sin 3t \\ 0 & -3\sin 3t & 3\cos 3t \\ \frac{1}{\cos t} & -9\cos 3t & -9\sin 3t \end{vmatrix} = \frac{3}{\cos t},$$

$$W_2(t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin 3t \\ 0 & 0 & 3\cos 3t \\ 0 & \frac{1}{\cos t} & -9\sin 3t \end{vmatrix} = -\frac{3\cos 3t}{\cos t},$$

$$W_3(t) = \begin{vmatrix} 1 & \cos 3t & 0 \\ 0 & -3\sin 3t & 0 \\ 0 & -9\cos 3t & \frac{1}{\cos t} \end{vmatrix} = -\frac{3\sin 3t}{\cos t}.$$

Ze wzorów Cramera otrzymujemy jedyne funkcje:

$$C_1'(t) = \frac{1}{9\cos t}, \quad C_2'(t) = -\frac{\cos 3t}{9\cos t}, \quad C_3'(t) = -\frac{\sin 3t}{9\cos t},$$

a po scałkowaniu możemy położyć:

$$C_1(t) = -\frac{1}{18}\ln\frac{1-\sin t}{1+\sin t},$$

$$C_2(t) = -\frac{2}{9}\sin 2t + \frac{1}{3}t,$$

$$C_3(t) = -\frac{1}{6}\ln(1+\operatorname{tg}^2 t) + \frac{4}{9}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} t) - \frac{4}{9}\frac{\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg}^2 t}.$$

Zatem

$$x_{s5} = -\frac{1}{18}\ln\frac{1-\sin t}{1+\sin t} + \Big(-\frac{2}{9}\sin 2t + \frac{1}{3}t\Big)\cos 3t + \Big(-\frac{1}{6}\ln(1+\operatorname{tg}^2 t) + \frac{4}{9}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} t) - \frac{4}{9}\frac{\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg}^2 t}\Big)\sin 3t.$$

Poszukiwane rozwiązanie szczególne RLN (5.27) ma więc postać

$$x_s(t) = x_{s1}(t) + x_{s2}(t) + x_{s3}(t) + x_{s4}(t) + x_{s5}(t),$$

a jego rozwiązanie ogólne dane jest wzorem

$$x(t) = C_1 + C_2\cos 3t + C_3\sin 3t + x_s(t), \quad C_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, 3.$$

5.3 Równania różniczkowe liniowe o współczynnikach zależnych od t

W poprzednim rozdziale skonstruowaliśmy układ fundamentalny $\{x_1, ..., x_n\}$ RLJ w przypadku, gdy współczynniki a_i, $i = 1, ..., n$ były stałe. Wykorzystaliśmy w tym celu pierwiastki równania charakterystycznego (5.22), w którym współczynnikami wielomianu charakterystycznego $\Delta(\lambda)$ były właśnie liczby a_i. Uogólnienie tego rozumowania na dowolne współczynniki funkcyjne $a_i(t)$, $i = 1, ..., n$ niestety nie jest możliwe właśnie ze względu na równanie charakterystyczne. Ale w szczególnym przypadku tzw. równań Cauchy'ego-Eulera da się to zrobić dość podobnie. W ogólności próbujemy obniżyć rząd równania lub znaleźć jakieś rozwiązanie szczególne i dopiero wtedy obniżyć rząd.

I Rozważmy równanie Cauchy'ego-Eulera drugiego rzędu

$$t^2x'' + atx' + bx = 0, \quad t > 0, \tag{5.29}$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ są dowolnymi stałymi. Poszukajmy rozwiązań tego równania (rzeczywistych lub zespolonych) w postaci

$$x = t^\lambda,$$

gdzie $\lambda \in \mathbb{C}$ jest stałą, którą trzeba znaleźć. Wstawiając do równania (5.29), otrzymujemy tożsamość

$$t^2\lambda(\lambda-1)t^{\lambda-2} + at\lambda t^{\lambda-1} + bt^\lambda = 0,$$

a po podzieleniu przez t^λ dostajemy równanie kwadratowe

$$\lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0. \tag{5.30}$$

Oczywiście jeśli λ jest pierwiastkiem rzeczywistym równania (5.30), to funkcja

$$x = t^\lambda$$

jest rozwiązaniem rzeczywistym równania (5.29), a jeśli $\lambda = \alpha + \beta i$ $(\beta \neq 0)$ jest pierwiastkiem zespolonym równania (5.30), to funkcja

$$x = t^{\alpha+\beta i} = t^\alpha t^{\beta i} = t^\alpha \left(e^{\ln t}\right)^{\beta i} = t^\alpha e^{(\beta \ln t)i} = t^\alpha \Big(\cos(\beta \ln t) + i \sin(\beta \ln t)\Big)$$

jest rozwiązaniem zespolonym równania (5.29). W przypadku rozwiązania zespolonego można zauważyć, rozumując analogicznie jak w poprzednim rozdziale, że jego części rzeczywista i urojona

$$x_1 = t^\alpha \cos(\beta \ln t), \quad x_2 = t^\alpha \sin(\beta \ln t)$$

też są rozwiązaniami tego równania.

1. Przypadek $\Delta > 0$. Pierwiastkami jednokrotnymi równania (5.30) są dwie różne liczby $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, zaś funkcje

$$x_1 = t^{\lambda_1}, \quad x_2 = t^{\lambda_2}$$

są rozwiązaniami równania (5.29). Obliczamy

$$W(t) = \begin{vmatrix} t^{\lambda_1} & t^{\lambda_2} \\ \lambda_1 t^{\lambda_1-1} & \lambda_2 t^{\lambda_2-1} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)t^{\lambda_1+\lambda_2-1} \neq 0,$$

skąd na podstawie twierdzenia 5.2 stwierdzamy, że zbiór $\{x_1, x_2\}$ jest układem fundamentalnym równania (5.29).

2. Przypadek $\Delta = 0$. Pierwiastkiem dwukrotnym równania (5.30) jest liczba $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, zaś funkcja

$$x_1 = t^{\lambda_1}$$

jest rozwiązaniem równania (5.29). Pokażemy, że funkcja

$$x_2 = t^{\lambda_1} \ln t$$

też jest rozwiązaniem tego równania. Uwzględniając jej pochodne:

$$x_2' = \lambda_1 t^{\lambda_1-1} \ln t + t^{\lambda_1-1} = t^{\lambda_1-1}[\lambda_1 \ln t + 1],$$

$$x_2'' = (\lambda_1-1)t^{\lambda_1-2}(\lambda_1 \ln t + 1) + \lambda_1 t^{\lambda_1-2} = t^{\lambda_1-2}[(\lambda_1-1)(\lambda_1 \ln t + 1) + \lambda_1],$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} & t^2x_2''+atx_2'+bx_2 \\ =& t^{\lambda_1}\Big[(\lambda_1-1)(\lambda_1\ln t+1)+\lambda_1\Big]+at^{\lambda_1}\Big[\lambda_1\ln t+1\Big]+bt^{\lambda_1}\ln t \\ =& t^{\lambda_1}\Big[(\lambda_1-1)(\lambda_1\ln t+1)+\lambda_1+a(\lambda_1\ln t+1)+b\ln t\Big] \\ =& t^{\lambda_1}\Big[(\underbrace{\lambda_1^2+(a-1)\lambda_1+b}_{0})\ln t+\underbrace{2\lambda_1-1+a}_{0}\Big]=0, \end{aligned}$$

gdyż $\lambda_1=\frac{1}{2}(1-a)$. Obliczamy

$$W(t)=\begin{vmatrix} t^{\lambda_1} & t^{\lambda_1}\ln t \\ \lambda_1 t^{\lambda_1-1} & \lambda_1 t^{\lambda_1-1}\ln t+t^{\lambda_1-1} \end{vmatrix}=t^{2\lambda_1-1}\neq 0$$

i znowu korzystając z twierdzenia 5.2, wnioskujemy, że zbiór $\{x_1,x_2\}$ jest układem fundamentalnym równania (5.29).

3. Przypadek $\Delta<0$. Pierwiastkami jednokrotnymi równania (5.30) są dwie różne liczby $\lambda_1=\alpha+\beta i$, $\overline{\lambda_1}=\alpha-\beta i\in\mathbb{C}$, $\beta\neq 0$ zaś funkcje

$$x_1=t^\alpha\cos(\beta\ln t),\quad x_2=t^\alpha\sin(\beta\ln t)$$

są rozwiązaniami równania (5.29). Obliczamy

$$\begin{aligned} W(t)=&\begin{vmatrix} t^\alpha\cos(\beta\ln t) & t^\alpha\sin(\beta\ln t) \\ \alpha t^{\alpha-1}\cos(\beta\ln t)-\beta t^{\alpha-1}\sin(\beta\ln t) & \alpha t^{\alpha-1}\sin(\beta\ln t)+\beta t^{\alpha-1}\cos(\beta\ln t) \end{vmatrix} \\ =&\ \beta t^{2\alpha-1}\neq 0 \end{aligned}$$

i analogicznie jak wyżej, dochodzimy do wniosku, że zbiór $\{x_1,x_2\}$ jest układem fundamentalnym równania (5.29).

Przykład 5.4. Rozwiązania ogólne równań Cauchy'ego-Eulera:

$$t^2x''+tx'-x=0,\quad t>0, \tag{5.31}$$

$$t^2x''+3tx'+x=0,\quad t>0, \tag{5.32}$$

$$t^2x''-tx'+2x=0,\quad t>0 \tag{5.33}$$

dane są odpowiednio wzorami:

$$x=C_1t+C_2t^{-1},\quad C_1,C_2\in\mathbb{R},$$

$$x=C_1t^{-1}+C_2t^{-1}\ln t,\quad C_1,C_2\in\mathbb{R},$$

$$x=C_1t\cos(\ln t)+C_2t\sin(\ln t),\quad C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

II Zwróćmy teraz uwagę na następujący fakt. Równanie RLJ jest jednorodne względem $x,x^{(1)},...,x^{(n)}$ stopnia $m=1$, ponieważ

$$F(t,ru_1,...,ru_{n+1})=rF(t,u_1,...,u_{n+1}),\quad r\in\mathbb{R},$$

gdzie

$$F(t,u_1,...,u_{n+1})=u_{n+1}+a_1(t)u_n+...+a_n(t)u_1$$

(porównaj definicję 2.3). Przeprowadzając analogiczne rozumowanie jak w rozdziale 2.10, możemy przez podstawienie

$$x'=xy\quad (y=y(t))$$

obniżyć rząd tego równania o jeden, ale powstałe równanie będzie nieliniowe. W przypadku RLJ drugiego rzędu

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0 \tag{5.34}$$

otrzymamy równanie Riccatiego. Rzeczywiście, po zróżniczkowaniu

$$x'' = x'y + xy' = xy^2 + xy',$$

wstawieniu do równania (5.34) i podzieleniu przez x dochodzimy do równania

$$y' = -y^2 - a_1(t)y - a_2(t). \tag{5.35}$$

Przykład 5.5. Rozwiązać równanie

$$t^4x'' + x = 0, \quad t > 0. \tag{5.36}$$

Odpowiadające mu równanie Riccatiego, otrzymane zgodnie z podstawieniem zaproponowanym powyżej, dane jest wzorem

$$y' = -y^2 - \frac{1}{t^4}.$$

Podstawiając

$$u = -y \quad (u = u(t)),$$

przekształcamy je do postaci

$$u' = u^2 + \frac{1}{t^4}.$$

A to równanie potrafimy efektywnie rozwiązać i rozwiązanie dane jest wzorem

$$u = \frac{1}{t^2}\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{t} + C_1\right) - \frac{1}{t}$$

(zobacz przykład 2.17). W konsekwencji

$$x = C_2 e^{-\int u(t)\,dt}, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Podstawiamy

$$z = \frac{1}{t} + C_1 \quad (z = z(t))$$

i obliczamy:

$$dz = -\frac{1}{t^2}dt,$$

$$\int \frac{1}{t^2}\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{t} + C_1\right)dt = -\int \operatorname{ctg} z\,dz = -\ln|\sin z| + C = -\ln\left|\sin\left(\frac{1}{t} + C_1\right)\right| + C.$$

Ostatecznie:

$$x = C_2 e^{\ln\left|\sin\left(\frac{1}{t}+C_1\right)\right| + \ln t},$$

$$x = C_2 t \sin\left(\frac{1}{t} + C_1\right).$$

III W przypadku, gdy znamy jedno niezerowe rozwiązanie szczególne x_1 RLJ, to możemy przez podstawienie

$$x = x_1 y, \quad z = y' \quad (y = y(t),\ z = z(t))$$

obniżyć rząd tego równania o jeden i powstałe równanie też będzie RLJ. W ten sam sposób możemy obniżyć rząd RLN o jeden, gdy znamy jedno niezerowe rozwiązanie szczególne x_1 RLJ z nim skojarzonego i powstałe równanie też będzie RLN. Przyjrzyjmy się temu na przykładzie RLN drugiego rzędu

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = b(t). \tag{5.37}$$

Różniczkujemy:

$$x' = x_1'y + x_1y', \quad x'' = x_1''y + 2x_1'y' + x_1y'',$$

wstawiamy do równania (5.37) i po pogrupowaniu otrzymujemy

$$x_1y'' + \Big(2x_1' + a_1(t)x_1\Big)y' + \Big(\underbrace{x_1'' + a_1(t)x_1' + a_2(t)x_1}_{0}\Big)y = b(t).$$

Finalnie

$$x_1z' + \Big(2x_1' + a_1(t)x_1\Big)z = b(t). \tag{5.38}$$

Ponadto jeśli znamy dwa różne rozwiązania szczególne x_1, x_2 RLN, to ich różnica $x_1 - x_2$ jest rozwiązaniem szczególnym skojarzonego RLJ, wskutek czego rząd tego równania możemy obniżyć o jeden.

Przykład 5.6. Rozwiązać równanie

$$tx'' - x' + 4t^3x = 0, \quad t > 0, \tag{5.39}$$

wiedząc, że $x_1 = \sin t^2$ jest jego rozwiązaniem szczególnym. Po podstawieniu

$$x = (\sin t^2)y, \quad z = y' \quad (y = y(t),\ z = z(t))$$

równanie (5.39) ma postać

$$(\sin t^2)z' + \Big(4t\cos t^2 - \frac{\sin t^2}{t}\Big)z = 0,$$

a po normalizacji

$$z' = \Big(\frac{1}{t} - 4t\operatorname{ctg} t^2\Big)z.$$

Rozwiązaniem ogólnym tego RLJ jest funkcja

$$z = C\frac{t}{\sin^2 t^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Dalej mamy równanie

$$y' = C\frac{t}{\sin^2 t^2},$$

którego rozwiązaniem jest

$$y = -\frac{1}{2}C\operatorname{ctg} t^2 + \frac{1}{2}CD, \quad C, D \in \mathbb{R}.$$

W konsekwencji

$$x = -\frac{1}{2}C\cos t^2 + \frac{1}{2}CD\sin t^2,$$

czyli zapisując prościej

$$x = C_1\cos t^2 + C_2\sin t^2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

IV Jeśli współczynniki są dowolnymi wielomianami, to warto spróbować poszukać rozwiązań RLJ, proponując jakieś podstawienie (np. wielomianowe lub wykładnicze), które wygeneruje związek

$$\Delta_\lambda(t) \equiv 0, \quad t \in I,$$

gdzie $\Delta_\lambda(t)$ jest wielomianem zmiennej t z parametrem λ. Czasami przynosi to efekt nawet w bardziej ogólnej sytuacji. Taka dość sztuczna metoda może doprowadzić do wyznaczenia układu fundamentalnego lub znalezienia chociażby jednego rozwiązania, co pozwoli obniżyć rząd równania, zachowując jego liniowość.

Przykład 5.7. Rozwiązać RLJ

$$(2t - t^2)x'' + (t^2 - 2)x' + 2(1 - t)x = 0, \quad t > 2. \tag{5.40}$$

Poszukajmy najpierw rozwiązania postaci

$$x_1 = e^{\lambda t}.$$

Obliczając pochodne:

$$x_1' = \lambda e^{\lambda t}, \quad x_1'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

i wstawiając do równania, otrzymujemy tożsamość

$$\lambda(1 - \lambda)t^2 + 2(\lambda^2 - 1)t + 2(1 - \lambda) = 0.$$

A to prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \lambda(1 - \lambda) = 0 \\ 2(\lambda^2 - 1) = 0 \\ 2(1 - \lambda) = 0 \end{cases},$$

którego rozwiązaniem jest $\lambda = 1$.

Teraz poszukajmy rozwiązania postaci

$$x_2 = t^\lambda.$$

Po obliczeniu pochodnych:

$$x_2' = \lambda t^{\lambda - 1}, \quad x_2'' = \lambda(\lambda - 1)t^{\lambda - 2}$$

i wstawieniu do równania, mamy tożsamość

$$(\lambda - 2)t^2 + (-\lambda^2 + \lambda + 2)t + 2\lambda(\lambda - 2) = 0.$$

Rozwiązaniem powstałego układu równań

$$\begin{cases} \lambda - 2 = 0 \\ -\lambda^2 + \lambda + 2 = 0 \\ 2\lambda(\lambda - 2) = 0 \end{cases}$$

jest $\lambda = 2$.

W efekcie otrzymaliśmy dwa rozwiązania:

$$x_1 = e^t, \quad x_2 = t^2,$$

które są liniowo niezależne, gdyż

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^t & t^2 \\ e^t & 2t \end{vmatrix} = e^t t(2 - t) \neq 0.$$

Zatem rozwiązanie ogólne dane jest wzorem

$$x = C_1 e^t + C_2 t^2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

5.4 Zadania

1. Rozwiązać równania:

   1.1. $x^{(iv)} + x''' - x'' - x' = 0$,

   1.2. $x''' + 3x'' + x' - 5x = 0$,

   1.3. $x'' + 4x = e^t + \sin 2t$,

   1.4. $x'' + 9x = 4\sin 2t + \cos 3t$,

   1.5. $x'' - 2x' + x = e^{3t} + \sin 2t + t$,

   1.6. $x'' - 4x' + 4x = e^{2t} + \sin t$,

   1.7. $x''' - x'' + 4x' - 4x = 3e^{2t}$,

   1.8. $x''' + x'' = t^2 + \cos 4t$,

   1.9. $x'' - x' = \frac{1}{1+e^t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2$,

   1.10. $x'' + 3x' + 2x = \sqrt{1-e^t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$,

   1.11. $x'' - 2x' + x = \frac{e^t}{\sqrt{4-t^2}}$,

   1.12. $x'' - 2x' + x = \frac{e^t}{t^2}$,

   1.13. $x'' + x = \frac{1}{\sin^2 t}$,

   1.14. $x'' + 4x' + 4x = e^{-2t}\ln t$,

   1.15. $x'' + x = \frac{-1}{\sin 2t\sqrt{\sin 2t}}$.

2. Rozwiązać równania:

   2.1. $t^2x'' + 6tx' + 4x = 0, \quad t > 0$,

   2.2. $t^2x'' + 7tx' + 5x = t, \quad t > 0$,

   2.3. $t^2x'' - 6x = 5\ln t$,

   2.4. $t^2x'' - tx' + x = 1, \quad t > 0$,

   2.5. $t^2x'' - tx' + 5x = 0, \quad t > 0$,

   2.6. $t^2x'' + 4tx' + 2x = t, \quad t > 0$.

3. Rozwiązać równania, wiedząc, że wskazane funkcje są ich rozwiązaniami szczególnymi:

   3.1. $t(t-1)^2x'' + t(t-1)x' - x = 0, \quad x_1 = \frac{t}{1-t}$,

   3.2. $t(2-t)x'' + 2(t-1)x' - 2x = 0, \quad x_1 = t - 1$,

   3.3. $tx'' - (t+1)x' + x = 0, \quad x_1 = t + 1$ (uwaga: pojawi się całka nieelementarna).

4. Rozważmy RLN rzędu n postaci

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + ..., +a_{n-1}(t)x^{(1)} + a_n(t)x = b(t).$$

   Udowodnić, że jeśli znane jest jedno niezerowe rozwiązanie szczególne x_1 RLJ skojarzonego z tym równaniem i jedno jego rozwiązanie szczególne x_2, to można je sprowadzić do RLJ rzędu $(n-1)$ przez podstawienie $x = x_1y + x_2$, $z = y'$ (wskazówka: wystarczy rozważyć $n = 2$).

5. Rozwiązać równanie

$$(2t - t^2)x'' + 2(t-1)x' - 2x = -2,$$

   wiedząc, że $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t$ są jego rozwiązaniami szczególnymi.

6. Uzasadnić, że zbiór funkcji $\{x_1, x_2\}$, gdzie $x_1(t) = \arcsin t$, $x_2(t) = \arccos t$, jest układem fundamentalnym równania liniowego
$$(t^2 - 1)x'' + tx' = 0, \quad t \in (-1, 1).$$
Znaleźć układ fundamentalny tego równania w przypadku, gdy $t > 1$. W obu przypadkach rozwiązać równanie
$$(t^2 - 1)x'' + tx' = \frac{\pi}{2}.$$

7. Rozwiązać równania:

   7.1. $x'' - \frac{1}{t}x' + \frac{1}{t^2}x = 0$,

   7.2. $x'' + \frac{1}{4t^2}x = 0$.

8. Równanie Riccatiego
$$x' = x^2 + t$$
sprowadzić przez odpowiednie podstawienie do liniowego jednorodnego równania różniczkowego drugiego rzędu.

9. Rozwiązać równania Riccatiego:

   9.1. $x' = -x^2 + \frac{1}{t}x + \frac{1}{t^2}$,

   9.2. $x' = -x^2 - \frac{1}{t}x - \frac{1}{t^2}$,

   9.3. $x' = x^2 - \frac{1}{t}x + \frac{1}{t^2}$.

10. Znaleźć liniowe jednorodne równanie różniczkowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach, którego układem fundamentalnym jest zbiór:

    10.1. $\{e^t, e^{-4t}\}$,

    10.2. $\{e^t, te^t\}$,

    10.3. $\{e^t \cos 2t, e^t \sin 2t\}$.

11. Dana jest całka szczególna $x_1 = e^{3t}$ pewnego liniowego jednorodnego równania różniczkowego drugiego rzędu o stałych współczynnikach. Odpowiednie równanie charakterystyczne ma pierwiastek podwójny. Znaleźć rozwiązanie tego równania spełniające warunek początkowy
$$x(0) = x'(0) = 1.$$

12. Dane jest równanie
$$x'' + a_0 x = 0,$$
gdzie $a_0 = \text{const} \in \mathbb{R}$. Sprawdzić dla jakiego współczynnika a_0 istnieją niezerowe rozwiązania tego równania zmierzające do zera, gdy $t \to +\infty$.

13. Dane jest równanie
$$x'' + a_1 x' + a_0 x = 0,$$
gdzie $a_0, a_1 = \text{const} \in \mathbb{R}$. Sprawdzić dla jakich współczynników a_0, a_1 wszystkie rozwiązania tego równania są:

    13.1. ograniczone dla $t \geqslant 0$,

    13.2. zmierzają do zera, gdy $t \to +\infty$, 13.3. okresowe.

14. Zbadać istnienie rozwiązań okresowych równań:

14.1. $x'' + 4x = \sin^2 t$,

14.2. $x'' + 2x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^4}$,

14.3. $x'' + x = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^2}$.

Rozdział 6

Układy równań różniczkowych liniowych pierwszego rzędu

6.1 Teoria układów równań różniczkowych liniowych

Układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + ... + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + ... + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{cases}, \tag{6.1}$$

gdzie funkcje $a_{ij}, b_i : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, ..., n$ są dane, nazywamy układem równań liniowych pierwszego rzędu. Gdy $b_i(t) \equiv 0$, $t \in I$, $i = 1, ..., n$, to mówimy, że (6.1) jest układem liniowym jednorodnym (ULJ)

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + ... + a_{1n}(t)x_n) \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + ... + a_{nn}(t)x_n \end{cases}, \tag{6.2}$$

w przeciwnym razie - układem liniowym niejednorodnym (ULN). Jeśli (6.1) jest układem niejednorodnym (ULN), to (6.2) nazywamy układem jednorodnym (ULJ) z nim skojarzonym. Powyższe układy możemy zapisać odpowiednio w równoważnej postaci macierzowej

$$x' = A(t)x + b(t), \tag{6.3}$$

$$x' = A(t)x, \tag{6.4}$$

gdzie

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad b(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Postać macierzowa jest wygodna zarówno ze względu na badania teoretyczne, jak i praktyczne rozwiązywanie.

Uwaga 6.1. Jeśli funkcje $a_{ij}, b_i : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, ..., n$ są ciągłe, to zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \tag{6.5}$$

gdzie $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, ma jedyne rozwiązanie określone na I. W przypadku jeśli przedział I jest domknięty, wynika to wprost z uwagi 3.9 i twierdzenia 3.9 zastosowanych do funkcji $F : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ określonej wzorem

$$F(t, x) = A(t)x + b(t).$$

Funkcja ta jest ciągła, a ponadto spełnia warunek Lipschitza względem x, bo dla dowolnych (t, x), $(t, \overline{x}) \in I \times \mathbb{R}^n$ mamy

$$\|F(t, x) - F(t, \overline{x})\|_E \leqslant \Big(\sum_{j=1}^{n} \|a_{1j}\| + ... + \sum_{j=1}^{n} \|a_{nj}\|\Big)\|x - \overline{x}\|_E,$$

gdzie symbole $\| \ \|$ i $\| \ \|_E$ oznaczają odpowiednio normę maksimum w przestrzeni funkcji ciągłych $C(I, \mathbb{R})$ i normę euklidesową w $\mathbb{R}^n$. Jeśli zaś przedział I nie jest domknięty, to możemy powyższe rozumowanie przeprowadzić do każdego przedziału domkniętego $t_0 \ni \tilde{I} \subset I$, co implikuje tezę.

Zanim przejdziemy do dalszej analizy układów równań (6.1) i (6.2), najpierw sformułujemy i omówimy pojęcie wrońskianu układu funkcji wektorowych, wygodnego narzędzia do sprawdzania liniowej niezależności układów takich funkcji.

Definicja 6.1. Wrońskianem zbioru n funkcji wektorowych $\{x^1, ..., x^n\}$, $x^k : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}^n$, $x^k = \big(x_1^k, ..., x_n^k\big)$, $k = 1, ..., n$ nazywamy wyznacznik

$$W(x^1, ..., x^n)(t) = \begin{vmatrix} x_1^1(t) & \cdots & x_1^n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^1(t) & \cdots & x_n^n(t) \end{vmatrix}. \tag{6.6}$$

W skrócie, o ile to będzie oczywiste, będziemy pisać $W(t)$.

Twierdzenie 6.1. *Jeśli $W(t_0) \neq 0$ dla pewnego $t_0 \in I$, to funkcje wektorowe $x^1, ..., x^n : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}^n$ są liniowo niezależne.*

Dowód. Przypuśćmy, że $W(t_0) \neq 0$ dla pewnego $t_0 \in I$. Rozważmy zerową liniową kombinację

$$\alpha_1 x^1(t) + \alpha_2 x^2(t) + ... + \alpha_n x^n(t) = 0, \quad t \in I.$$

Dla punktu t_0 zapiszmy ją w postaci jednorodnego układu równań algebraicznych

$$\begin{bmatrix} x_1^1(t_0) & \cdots & x_1^n(t_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^1(t_0) & \cdots & x_n^n(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $W(t_0) \neq 0$, więc układ ten ma jedyne rozwiązanie $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)^T = (0, 0, ..., 0)^T$, co implikuje liniową niezależność funkcji wektorowych $x^1, ..., x^n$.

Uwaga 6.2. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, tzn. z liniowej niezależności funkcji wektorowych $x^1, ..., x^n : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}^n$ nie musi wynikać, że $W(t_0) \neq 0$ w jakimś punkcie $t_0 \in I$. Rozważmy bowiem dwie funkcje wektorowe

$$x^1(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x^2(t) = \begin{bmatrix} |t| \\ \mathrm{sgn}(t) \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Funkcje te są liniowo niezależne, zaś $W(t) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Definicja 6.2. Dowolny zbiór $\{x^1, ..., x^n\}$ liniowo niezależnych rozwiązań ULJ określonych w przedziale $\tilde{I} \subset I$ nazywamy układem fundamentalnym (podstawowym) tego układu w przedziale $\tilde{I}$, zaś macierz $X = [x_i^k]_{i,k=1}^n$, której kolumnami są rozwiązania x^k z układu fundamentalnego, nazywamy jego macierzą fundamentalną (podstawową) w tym przedziale.

Uwaga 6.3. Jeśli funkcje $a_{ij} : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, ..., n$ są ciągłe, to układ fundamentalny ULJ w przedziale I istnieje. Istotnie, możemy rozważyć funkcje $x^k : I \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, ..., n$, które są rozwiązaniami ULJ z warunkami początkowymi

$$x_j^k(t_0) = \delta_{kj}, \quad k, j = 1, ..., n,$$

gdzie $t_0 \in I$ jest dowolnie ustalone; symbol δ_{ki} oznacza deltę Kroneckera. Takie rozwiązania istnieją i dane są jednoznacznie na mocy uwagi 6.1. Wówczas

$$W(t_0) = |I| = 1 \neq 0.$$

Z twierdzenia 6.1 wynika, że zbiór $\{x^1, ..., x^n\}$ jest układem fundamentalnym ULJ w przedziale I. Nie ma jednak ogólnego sposobu znajdowania takich rozwiązań. Metody efektywnego wyznaczania układu fundamentalnego w pewnych przypadkach omówimy w dalszej części.

W uwadze 6.2 zauważyliśmy, że twierdzenie 6.1 działa w ogólności tylko w jedną stronę. Ale jeśli funkcje $x^1, ..., x^n$ są rozwiązaniami ULJ o ciągłych współczynnikach, to działa ono również w drugą stronę, a nawet w drugą stronę jest mocniejsze.

Twierdzenie 6.2. *Niech funkcje wektorowe $x^1, ..., x^n : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}^n$ będą rozwiązaniami ULJ o ciągłych współczynnikach a_{ij}, $i, j = 1, ..., n$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

1. *Zbiór $\{x^1, ..., x^n\}$ jest układem fundamentalnym ULJ w przedziale I,*
2. *istnieje $t_0 \in I$ takie, że $W(t_0) \neq 0$,*
3. *dla każdego $t \in I$ $W(t) \neq 0$.*

Dowód. Z punktu 3. wynika wprost punkt 2., zaś z punktu 2 wynika punkt 1. na podstawie twierdzenia 6.1.

Pokażemy teraz, że punkt 1. implikuje punkt 3.. Zrobimy to przez zaprzeczenie, tzn. pokażemy, że z zerowania się wrońskianu w jakimś punkcie wynika liniowa zależność funkcji $x^1, ..., x^n$. Załóżmy, że istnieje $t_0 \in I$ takie, że $W(t_0) = 0$. Oznacza to, że wektory $x^1(t_0), ..., x^n(t_0)$ są liniowo zależne. Rozważmy zerową kombinację liniową

$$\alpha_1 x^1(t_0) + ... + \alpha_n x^n(t_0) = 0 \tag{6.7}$$

o nie wszystkich stałych $\alpha_1, ..., \alpha_n$ równych zeru. Zdefiniujmy funkcję

$$x(t) = \alpha_1 x^1(t) + ... + \alpha_n x^n(t), \quad t \in I$$

z tak dobranymi stałymi. Oczywiście x jest rozwiązaniem problemu początkowego

$$\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(t_0) = 0 \end{cases},$$

bo kombinacja liniowa rozwiązań ULJ jest rozwiązaniem ULJ, a warunek początkowy jest spełniony na podstawie (6.7). Ponieważ zgodnie z uwagą 6.1, zagadnienie to ma jedyne rozwiązanie zerowe określone na I, więc $x(t) \equiv 0$, $t \in I$. Wobec tego

$$\alpha_1 x^1(t) + ... + \alpha_n x^n(t) = 0, \quad t \in I,$$

a to oznacza, że funkcje $x^1, ..., x^n$ są liniowo zależne.

Przykład 6.1. Rozważmy dwie funkcje wektorowe

$$x^1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}, \quad x^2(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sprawdzić, czy istnieją ciągłe funkcje $a_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2$ takie, że x^1, x^2 są rozwiązaniami układu równań

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{6.8}$$

Odpowiedź jest negatywna. Zauważmy bowiem, że x^1, x^2 są różniczkowalne, a ponadto na podstawie twierdzenia 6.1 są liniowo niezależne, gdyż $W(0) = 1 \neq 0$. Gdyby x^1, x^2 rozwiązywały układ (6.8), to tworzyłyby jego układ fundamentalny. Biorąc pod uwagę twierdzenie 6.2, jest to niemożliwe, bo $W(1) = 0$.

Uwaga 6.4. Wprost z twierdzeń 6.1 i 6.2 wynika, że jeśli współczynniki a_{ij}, $i, j = 1, ..., n$ są ciągłe, to rzeczywista macierz $X = [x_i^k]_{i,k=1}^n$, gdzie $x_i^k : I \to \mathbb{R}$, $i, k = 1, ..., n$, jest macierzą fundamentalną ULJ w przedziale I wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $t_0 \in I$ takie, że $W(x^1, ..., x^n)(t_0) \neq 0$ i X spełnia równanie macierzowe

$$X' = A(t)X, \quad t \in I. \tag{6.9}$$

Ponadto, przy tym założeniu, jeśli X jest macierzą fundamentalną ULJ w przedziale I, to macierz $X(t)$ jest nieosobliwa dla każdego $t \in I$.

Twierdzenie 6.3 (Abel). *Niech funkcje $a_{ij} : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, ..., n$ będą ciągłe. Jeśli funkcje $x^1, ..., x^n$ są rozwiązaniami ULJ w przedziale I, to*

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t \mathrm{Tr}A(s)\,ds}, \quad t \in I, \tag{6.10}$$

gdzie $t_0 \in I$ jest dowolnie ustalone; $\mathrm{Tr}A(t) := \sum_{i=1}^n a_{ii}(t)$ jest śladem macierzy $A(t)$.

Dowód. W celu skupienia uwagi, dowód bez straty ogólności przeprowadzimy dla $n = 2$. Obliczmy pochodną wrońskianu

$$W'(t) = \begin{vmatrix} (x_1^1)'(t) & (x_1^2)'(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) \\ (x_2^1)'(t) & (x_2^2)'(t) \end{vmatrix} =: I_1(t) + I_2(t).$$

Zastępując pierwszy wiersz w macierzy $I_1(t)$ wyrażeniami

$$(x_1^1)'(t) = a_{11}(t)x_1^1(t) + a_{12}(t)x_2^1(t), \quad (x_1^2)'(t) = a_{11}(t)x_1^2(t) + a_{12}(t)x_2^2(t),$$

a następnie monożąc drugi wiersz przez $-a_{12}(t)$ i dodając do wiersza pierwszego, dochodzimy do związku

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \begin{vmatrix} a_{11}(t)x_1^1(t) + a_{12}(t)x_2^1(t) & a_{11}(t)x_1^2(t) + a_{12}(t)x_2^2(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11}(t)x_1^1(t) & a_{11}(t)x_1^2(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(t)\begin{vmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(t)W(t). \end{aligned}$$

Analogicznie obliczamy

$$I_2(t) = a_{22}(t)W(t).$$

Po dodaniu otrzymujemy równanie różniczkowe pierwszego rzędu

$$W' = \mathrm{Tr}A(t)W.$$

W konsekwencji

$$W(t) = Ce^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}A(s)\,ds}, \quad t \in I.$$

Obliczamy $C = W(t_0)$.

Wniosek 6.1. Jeśli funkcje $a_{ij} : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, ..., n$ są ciągłe i funkcje $x^1, ..., x^n$ są rozwiązaniami ULJ w przedziale I, to wrońskian albo jest identycznie równy zeru w przedziale I, albo jest różny od zera w każdym punkcie tego przedziału.

Twierdzenie 6.4. *Jeśli funkcje $a_{ij} : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, ..., n$ są ciągłe, to rozwiązanie ogólne ULJ dane jest wzorem*

$$x(t) = C_1 x^1(t) + ... + C_n x^n(t), \quad t \in I, \tag{6.11}$$

gdzie zbiór $\{x^1, ..., x^n\}$ jest układem fundamentalnym ULJ w przedziale I, $C_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$, i są to wszystkie rozwiązania tego układu na I. W zapisie macierzowym

$$x(t) = X(t)C, \quad t \in I, \tag{6.12}$$

gdzie $X = [x_i^k]_{i,k=1}^n$ jest macierzą fundamentalną ULJ w przedziale I, zaś $C = (C_1, ..., C_n)^T \in \mathbb{R}^n$.

Dowód. Idea dowodu powyższego twierdzenia jest taka sama, jak w dowodzie twierdzenia 5.4. Przy czym teraz zamiast z twierdzenia Liouville'a trzeba skorzystać z twierdzenia Abela.

Wniosek 6.2. Jeśli współczynniki $a_{ij} : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, ..., n$ są ciągłe, to zbiór rozwiązań ULJ z działaniem dodawania funkcji wektorowych i mnożenia ich przez liczby rzeczywsite jest n wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Twierdzenie 6.5. *Jeśli x_j jest rozwiązaniem ogólnym ULJ skojarzonego z ULN określonym na przedziale $\tilde{I} \subset I$, zaś x_s jest rozwiązaniem szczególnym ULN określonym na $\tilde{I}$, to rozwiązanie ogólne ULN na $\tilde{I}$ dane jest wzorem*

$$x = x_j + x_s, \tag{6.13}$$

i są to wszystkie rozwiązania tego układu na $\tilde{I}$.

Dowód. Uzasadnienie powyższego twierdzenia jest analogiczne, jak dowód twierdzenia 2.2.

Podobnie jak w przypadku jednego równania liniowego, postawmy naturalne pytanie: Jak wyznaczyć rozwiązanie szczególne x_s ULN? Jak nietrudno się domyśleć, efektywnym sposobem jest **metoda uzmienniania stałych**. Załóżmy, że $a_{ij}, b_i : I \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, ..., n$ są ciągłe. Niech X będzie macierzą fundamentalną ULJ skojarzonego z ULN w przedziale I. W świetle twierdzenia 6.4, rozwiązanie ogólne ULJ jest postaci

$$x_j(t) = X(t)C, \quad t \in I. \tag{6.14}$$

Zaproponujmy

$$x_s(t) = X(t)C(t), \quad t \in I, \tag{6.15}$$

gdzie $C(t) = \Big(C_1(t), ..., C_n(t)\Big)^T \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem funkcji klasy C^1. Zróżniczkujmy

$$x_s'(t) = X'(t)C(t) + X(t)C'(t), \quad t \in I$$

i wstawmy do ULN:

$$X'(t)C(t) + X(t)C'(t) = A(t)X(t)C(t) + b(t), \quad t \in I.$$

Na podstawie uwagi 6.4 mamy

$$X'(t) = A(t)X(t), \quad t \in I.$$

W konsekwencji

$$X(t)C'(t) = b(t), \quad t \in I.$$

Z uwagi 6.4 wnioskujemy dalej, że macierz $X(t)$ jest nieosobliwa dla każdego $t \in I$. Stąd

$$C'(t) = X^{-1}(t)b(t), \quad t \in I,$$

gdzie $X^{-1}(t)$ oznacza macierz odwrotną do macierzy $X(t)$, a po scałkowaniu

$$C(t) = \int X^{-1}(t)b(t)dt, \quad t \in I.$$

Regularność funkcji wektorowej $C(t)$ wynika z ciągłości macierzy X^{-1} i funkcji b. Szukane rozwiązanie szczególne ULN dane jest więc wzorem

$$x_s(t) = X(t)\int X^{-1}(t)b(t)dt, \quad t \in I.$$

Uwaga 6.5. Przypuśćmy, że znamy twierdzenie Abela dla ULJ i na jego podstawie chcemy udowodnić twierdzenie Liouville'a dla RLJ. Przyjmując

$$x_1 = x,\ x_2 = x^{(1)}, ..., x_n = x^{(n-1)},$$

możemy RLJ

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(t)x^{(1)} + a_n(t)x = 0 \tag{6.16}$$

zapisać w postaci równoważnego ULJ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \cdots & \cdots & -a_1(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{6.17}$$

Zauważmy, że wrońskian $W(x^1, ..., x^n)(t)$ zbioru rozwiązań $\{x^1, ..., x^n\}$ układu (6.17) jest równy wrońskianowi $W(x_1, ..., x_n)(t)$ zbioru rozwiązań $\{x_1, ..., x_n\}$ równania (6.16), gdzie $x_1 = x_1^1, ..., x_n = x_1^n$, tj.

$$W(x^1, ..., x^n)(t) = \begin{vmatrix} x_1^1(t) & \cdots & x_1^n(t) \\ x_2^1(t) & \cdots & x_2^n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^1(t) & \cdots & x_n^n(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1^{(1)}(t) & \cdots & x_n^{(1)}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} = W(x_1, ..., x_n)(t),$$

a ponadto $TrA(t) = -a_1(t)$, gdzie $A(t)$ jest macierzą układu (6.17). Zatem

$$W(x_1, ..., x_n)(t) = W(x^1, ..., x^n)(t) = W(x^1, ..., x^n)(t_0)e^{\int_{t_0}^t TrA(s)\,ds} = W(x_1, ..., x_n)(t_0)e^{-\int_{t_0}^t a_1(s)\,ds},$$

czyli udowodniliśmy twierdzenie Liouville'a dla RLJ.

6.2 Układy równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach

Rozważmy odpowiednio ULN i ULJ

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n + b_1(t) \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n + b_n(t) \end{cases}, \tag{6.18}$$

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n \end{cases}, \tag{6.19}$$

gdzie stałe współczynniki $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, ..., n$ i ciągłe funkcje $b_i : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ są dane, które są szczególnymi przypadkami odpowiednio układów (6.1) i (6.2). A więc, żeby wyznaczyć rozwiązanie ogólne układu (6.19) wystarczy znaleźć jakiś jego układ fundamentalny, zaś żeby wyznaczyć rozwiązanie ogólne układu (6.18), trzeba wyznaczyć wpomniany układ fundamentalny układu (6.19) z nim skojarzonego i dodatkowo znaleźć jakiekolwiek rozwiązanie szczególne układu (6.18).

Efektywne wyznaczenie układu fundamentalnego ULJ o stałych współczynnikach jest o wiele trudniejsze niż to miało miejsce w poprzednim rozdziale dla RLJ o stałych współczynnikach. Procedurę zaczynamy trochę podobnie, tj. od zdefiniowania równania charakterystycznego i wielomianu charakterystycznego. Postawmy sobie pytanie, do czego prowadzi próba znalezienia rozwiązań (rzeczywistych lub zespolonych) ULJ w postaci

$$x = e^{\lambda t} w,$$

gdzie stałą $\lambda \in \mathbb{C}$ i wektor $w = (w_1, ..., w_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ trzeba znaleźć. Po wstawieniu do układu (6.19) mamy:

$$Aw = \lambda w,$$

$$(A - \lambda I)w = 0.$$

Widzimy, że poszukiwana para (λ, w) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy wyznacznik

$$|A - \lambda I| = 0. \tag{6.20}$$

Jest to tzw. równanie charakterystyczne macierzy A. Wielomian

$$\Delta(\lambda) = |A - \lambda I|$$

nazywamy wielomianem charakterystycznym macierzy A. Na podstawie podstawowego twierdzenia algebry równanie charakterystyczne ma łącznie z krotnościami dokładnie n pierwiastków. Liczbę λ nazywamy wartością własną macierzy A, a odpowiadajacy jej wektor w - wektorem własnym macierzy A. Zbiór

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \Delta(\lambda) = 0\} \tag{6.21}$$

wszystkich wartości własnych macierzy A nazywamy widmem tej macierzy. Wartości własne charakteryzują dwie liczby: krotność algebraiczna i krotność geometryczna.

Definicja 6.3. Krotnością algebraiczną (w skrócie krotnością) $k_a(\lambda)$ wartości własnej $\lambda \in \sigma(A)$ nazywamy jej krotność jako pierwiastka równania charakterystycznego $\Delta(\lambda) = 0$. Krotnością geometryczną wartości własnej $\lambda \in \sigma(A)$ nazywamy liczbę

$$k_g(\lambda) = dim\ Ker(A - \lambda I).$$

Dobrze znane jest następujace twierdzenie z algebry.

Twierdzenie 6.6. *Jeśli $\lambda \in \sigma(A)$, to*

$$1 \leqslant k_g(\lambda) \leqslant k_a(\lambda) \leqslant n.$$

W przypadku, gdy $k_g(\lambda) = k_a(\lambda)$ dla wszystkich wartości własnych $\lambda \in \sigma(\lambda)$, to wyznaczenie układu fundamentalnego jest stosunkowo proste. W przypadku, gdy $k_g(\lambda) < k_a(\lambda)$ dla chociażby jednej wartości własnej $\lambda \in \sigma(\lambda)$ jest to bardziej złożone. Znanych jest wiele metod algorytmicznych pozwalających wyznaczyć układ fundamentalny w obydwóch przypadkach. Zaczniemy od zaproponowania układu fundamentalnego w postaci funkcji macierzowej

$$X(t) = e^{tA}, \quad t \in \mathbb{R},$$

gdzie

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Zbiór macierzy kwadratowych $M^n(\mathbb{C})$ z działaniami dodawania macierzy i mnożenia macierzy przez liczby zespolone jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{C}$. Symbolem $\| \ \|$ oznaczmy normę w tej przestrzeni określoną wzorem

$$\|A\| = \Big(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}, \quad A = [a_{ij}]_{ij=1}^{n} \in M^n(\mathbb{C}).$$

Nietrudno sprawdzić, że norma ta ma własność submultyplikatywności

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \|B\|, \quad A, B \in M^n(\mathbb{C}).$$

Przestrzeń unormowana $(M^n(\mathbb{C}), \| \ \|)$ jest przestrzenią Banacha.

Rozważmy jeszcze przestrzeń wektorową ciągłych funkcji macierzowych $C([-a,a], M^n(\mathbb{C}))$, gdzie $a > 0$ jest dowolnie ustalone, z działaniami dodawania funkcji i mnożenia funkcji przez liczby zespolone. Przestrzeń unormowana $\Big(C([-a,a], M^n(\mathbb{C})), \| \ \|_0\Big)$ z normą

$$\|f\|_0 = \max_{t \in [-a,a]} \|f(t)\|, \quad f \in C([-a,a], M^n(\mathbb{C}))$$

również jest przestrzenią Banacha.

Symbolem $\mathbb{N}_0$ będziemy oznaczać zbiór liczb naturalnych wraz z zerem.

Lemat 6.1. *Niech $A, B \in M^n(\mathbb{C})$. Wówczas:*

1. *szereg macierzowy $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$ jest bezwzględnie (normowo) zbieżny dla każdego $t \in \mathbb{R}$ i jednostajnie zbieżny na każdym przedziale $[-a,a]$, $a > 0$;*

2. $(e^{tA})' = Ae^{tA}, \quad t \in \mathbb{R}$;

3. $Ae^{tA} = e^{tA}A, \quad t \in \mathbb{R}$;

4. $e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA}, \quad s, t \in \mathbb{R}$;

5. $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}, \quad t \in \mathbb{R}$;

6. *jeśli $AB = BA$, to $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}, \quad t \in \mathbb{R}$.*

Dowód.

1. Rozważmy ciąg sum cząstkowych (s_m) zdefiniowany wzorem

$$s_m(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(tA)^k}{k!}, \quad t \in [-a, a],\ m \in \mathbb{N}_0. \tag{6.22}$$

Sprawdźmy, że (s_m) jest ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni Banacha $\big(C([-a, a], M^n(\mathbb{C})), \| \, \|_0\big)$, tzn. że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $m_0 \in \mathbb{N}_0$ takie, że dla dowolnych $\mathbb{N}_0 \ni i, j \geqslant m_0$

$$\|s_i - s_j\|_0 < \varepsilon.$$

Powyższa nierówność wynika z następujących oszacowań

$$\begin{aligned} \|s_i(t) - s_j(t)\| &= \left\| \sum_{k=j+1}^{i} \frac{(tA)^k}{k!} \right\| \leqslant \sum_{k=j+1}^{i} \frac{\|(tA)^k\|}{k!} \leqslant \sum_{k=j+1}^{i} \frac{\|(tA)\|^k}{k!} \\ &= \sum_{k=j+1}^{i} \frac{(|t|\|A\|)^k}{k!} \leqslant \sum_{k=j+1}^{i} \frac{(a\|A\|)^k}{k!} < \varepsilon, \quad t \in [-a, a] \end{aligned}$$

dla pewnego $m_0 \in \mathbb{N}_0$ i dowolnych $\mathbb{N}_0 \ni i, j \geqslant m_0$, $i > j$, przy czym ostatnia nierówność jest efektem zbieżności szeregu liczbowego $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a\|A\|)^k}{k!}$ na podstawie kryterium d'Alemberta. Zatem (s_m), a więc i szereg $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$, jest zbieżny jednostajnie na każdym przedziale $[-a, a]$, a co za tym idzie jest on też zbieżny dla każdego $t \in \mathbb{R}$.

Aby uzasadnić bezwzględną zbieżność szeregu $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$, wystarczy przeprowadzić podobne rozumowanie jak wyżej dla liczbowego ciągu sum cząstkowych $(\tilde{s}_m(t))$ danego wzorem

$$\tilde{s}_m(t) = \sum_{k=0}^{m} \left\| \frac{(tA)^k}{k!} \right\|, \quad m \in \mathbb{N}_0,$$

gdzie $t \in \mathbb{R}$ jest dowolnie ustalone.

2. Udowodniliśmy w punkcie 1., że ciąg sum cząstkowych (s_m) określony formułą (6.22) jest zbieżny niemal jednostajnie na $\mathbb{R}$ do funkcji e^{tA}. Funkcje $s_m(t)$ są oczywiście różniczkowalne i widać, że

$$s_m'(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{A(tA)^{k-1}}{(k-1)!} = A \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(tA)^k}{k!} = As_{m-1}(t), \quad t \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N}_0.$$

A stąd ciąg (s_m') jest zbieżny niemal jednostajnie na $\mathbb{R}$ do funkcji Ae^{tA}. Znane twierdzenie z analizy matematycznej mówi, że zbieżność niemal jednostajna ciągu funkcji i ciągu jej pochodnych gwarantuje różniczkowalność funkcji granicznej, przy czym jej pochodna jest granicą ciągu pochodnych. W naszym przypadku daje to tezę.

3. Każda suma cząstkowa $s_m(t)$ szeregu definiującego e^{tA} komutuje z A. W konsekwencji przechodzimy z m do ∞.

4. Ustalmy $s \in \mathbb{R}$, wektor $C = (C_1, ..., C_n)^T \in \mathbb{R}^n$ i zdefiniujmy funkcję

$$x(t) = e^{(s+t)A}C, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Funkcja ta jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$x' = Ax, \quad x(0) = e^{sA}C, \tag{6.23}$$

gdyż na podstawie punktu 2. mamy:

$$x'(t) = Ae^{(s+t)A}C = Ax(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$x(0) = e^{sA}C.$$

Ale funkcja

$$y(t) = e^{sA}e^{tA}C, \quad t \in \mathbb{R}$$

również rozwiązuje problem (6.23), bo biorąc pod uwagę punkty 2. i 3., możemy napisać:

$$y'(t) = e^{sA}Ae^{tA}C = Ae^{sA}e^{tA}C = Ay(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$y(0) = e^{sA}C.$$

Z jednoznaczności rozwiązania problemu Cauchy'ego (6.23) (zobacz uwagę 6.1) wynika, że $x = y$, czyli

$$e^{(s+t)A}C = e^{sA}e^{tA}C, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Otrzymaliśmy więc, że w szczególności dla dowolnie ustalonych $s, t \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$e^{(s+t)A}C = e^{sA}e^{tA}C, \quad C \in \mathbb{R}^n,$$

co kończy dowód tego punktu.

5. Punkt 4. implikuje równości:

$$e^{tA}e^{-tA} = e^{(t-t)A} = e^{0A} = I,$$

$$e^{-tA}e^{tA} = e^{(-t+t)A} = e^{0A} = I.$$

6. Ponieważ każda suma cząstkowa $s_m(t)$ szeregu definiującego e^{tA} komutuje z B, po przejściu z m do ∞ otrzymujemy

$$e^{tA}B = Be^{tA}.$$

Ustalmy wektor $C = (C_1, ..., C_n)^T \in \mathbb{R}^n$ i zdefiniujmy funkcję

$$x(t) = e^{t(A+B)}C, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Funkcja ta jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$x' = (A + B)x, \quad x(0) = C, \tag{6.24}$$

bo:

$$x'(t) = (A + B)e^{t(A+B)}C = (A + B)x(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$x(0) = C.$$

Z kolei funkcja

$$y(t) = e^{tA}e^{tB}C, \quad t \in \mathbb{R}$$

też rozwiązuje problem (6.24), gdyż:

$$y'(t) = Ae^{tA}e^{tB}C+e^{tA}Be^{tB}C = Ae^{tA}e^{tB}C+Be^{tA}e^{tB}C = (A+B)e^{tA}e^{tA}C = (A+B)y(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$y(0) = C.$$

Z jednoznaczności rozwiązania problemu Cauchy'ego (6.23) (zobacz uwagę 6.1) wnioskujemy, że $x = y$, a więc

$$e^{t(A+B)}C = e^{tA}e^{tB}C, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Otrzymaliśmy, że w szczególności dla dowolnie ustalonego $t \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$e^{t(A+B)}C = e^{tA}e^{tB}C, \quad C \in \mathbb{R}^n$$

i dowód jest skończony.

Twierdzenie 6.7. *Macierz $X(t) = e^{tA}$, $t \in \mathbb{R}$, $A \in M^n(\mathbb{R})$ jest macierzą fundamentalną ULJ*

$$x' = Ax. \tag{6.25}$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że macierz $X(t) = e^{tA}$, $t \in \mathbb{R}$ jest rzeczywista i spełnia równanie macierzowe (6.9), gdyż

$$(e^{tA})' = Ae^{tA}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dalej rozważmy wrońskian

$$W(t) = \left|e^{tA}\right|, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ponieważ

$$W(0) = |I| = 1 \neq 0,$$

więc na podstawie uwagi 6.4 e^{tA} jest macierzą fundamentalną układu (6.25).

6.2.1 Metoda wielomianu minimalnego

W tym rozdziale zajmiemy się efektywnym wyznaczaniem macierzy e^{tA} z wykorzystaniem wielomianu minimalnego. Niech $A \in M^n(\mathbb{C})$ będzie zadaną macierzą.

Definicja 6.4. Jeśli

$$w(\lambda) = a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + ... + a_m, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

jest wielomianem skalarnym o współczynnikach $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, ..., m$, to macierz

$$w(A) = a_0A^m + a_1A^{m-1} + ... + a_mI$$

nazywamy wielomianem macierzy A.

Definicja 6.5. Wielomianem anulującym macierzy A nazywamy wielomian skalarny

$$w(\lambda) = a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + ... + a_m, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

gdzie $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, ..., m$, taki, że

$$w(A) = 0.$$

Twierdzenie 6.8 (Cayley-Hamilton)**.** *Wielomian charakterystyczny $\Delta(\lambda)$ macierzy A jest wielomianem anulującym tej macierzy, tzn. że*

$$\Delta(A) = 0.$$

Definicja 6.6. Wielomianem minimalnym macierzy A nazywamy wielomian $m(\lambda)$ anulujący tej macierzy, najniższego stopnia o współczynniku 1 przy najwyższej potędze.

Twierdzenie 6.9. *Istnieje dokładnie jeden wielomian minimalny $m(\lambda)$ macierzy A.*

Dowód. Wielomian minimalny $m(\lambda)$ macierzy A istnieje, bo na podstawie twierdzenia Cayley'a-Hamiltona kandydatem jest znormalizowany wielomian charakterystyczny $\Delta(\lambda)$ tej macierzy, tj. wielomian $\Delta(\lambda)$ podzielony przez współczynnik przy najwyższej potędze.

Gdyby istniały dwa wielomiany minimalne $m_1(\lambda)$ i $m_2(\lambda)$ macierzy A (tego samego stopnia, ale $m_1(\lambda) \neq m_2(\lambda)$), to wtedy mamy $m_1(A) = 0$ i $m_2(A) = 0$, a co za tym idzie $m_1(A) - m_2(A) = 0$. A to oznacza, że znormalizowany wielomian $m_1(\lambda) - m_2(\lambda)$, który jest stopnia niższego niż stopień wielomianów $m_1(\lambda)$ i $m_2(\lambda)$ jest wielomianem anulującym macierzy A, co jest sprzeczne z definicją wielomianu minimalnego. Zatem $m_1(\lambda) = m_2(\lambda)$.

Uwaga 6.6. Z definicji 6.5 i 6.6 wynika, że jedynym stałym wielomianem $w(\lambda) = a_0$ anulującym macierzy A jest $w(\lambda) \equiv 0$, zaś wielomian minimalny $m(\lambda)$ macierzy A jest stopnia większego lub równego 1.

Twierdzenie 6.10. *Wielomian minimalny $m(\lambda)$ macierzy A jest dzielnikiem każdego wielomianu $w(\lambda)$ anulującego macierzy A.*

Dowód. Niech $w(\lambda)$ będzie wielomianem anulującym macierzy A. Można go przedstawić jednoznacznie w postaci

$$w(\lambda) = q(\lambda)m(\lambda) + r(\lambda),$$

gdzie $q(\lambda)$, $r(\lambda)$ są wielomianami i stopień wielomianu $r(\lambda)$ jest niższy od stopnia wielomianu $m(\lambda)$. Podstawiając za λ macierz A, mamy

$$w(A) = q(A)m(A) + r(A).$$

Z założenia $w(A) = 0$, $m(A) = 0$, a więc $r(A) = 0$. Gdyby $r(\lambda) \not\equiv 0$, to znormalizowany $r(\lambda)$ byłby wielomianem anulującym macierzy A i stopnia niższego od stopnia wielomianu $m(\lambda)$, co jest sprzeczne z definicją wielomianu minimalnego. Wobec tego $r(\lambda) = 0$.

Twierdzenie 6.11. *Niech*

$$\Delta(\lambda) = a_0(\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{k_s} \tag{6.26}$$

będzie wielomianem charakterystycznym macierzy A, gdzie liczby k_i są krotnościami różnych wartości własnych λ_i, $i = 1, ..., s$ tej macierzy, $k_1 + ... + k_s = n$. Wielomian minimalny $m(\lambda)$ macierzy A można wyrazić wzorem

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{l_s}, \tag{6.27}$$

przy czym liczby

$$1 \leqslant l_i \leqslant k_i, \quad i = 1, ..., s$$

dane są jednoznacznie.

Dowód. Na podstawie twierdzenia Cayley'a-Hamiltona wielomian $\Delta(\lambda)$ jest wielomianem anulującym macierzy A. Zgodnie z twierdzeniem 6.10 wielomian $m(\lambda)$ jest dzielnikiem wielomianu $\Delta(\lambda)$, co uzasadnia jego postać (6.27). Jedyność tej reprezentacji wynika z twierdzenia 6.9.

Wielomian minimalny $m(\lambda)$ macierzy A można też wyrazić wzorem

$$m(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}, \tag{6.28}$$

gdzie wielomian $D_{n-1}(\lambda)$ jest największym wspólnym dzielnikiem elementów macierzy $(A - \lambda I)^D$ dopełnień algebraicznych elementów macierzy $(A - \lambda I)$ (zobacz twierdzenie 7.3.1 w [1]).

W przypadku gdy wymiar n macierzy A jest mały, to w praktyce wygodniejsze jest wyznaczanie wielomianu minimalnego w postaci (6.27), metodą elementarnego znajdowania wykładników l_i, $i = 1, ..., s$. Najpierw proponujemy

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_s).$$

Jeśli $m(A) = 0$, to taki $m(\lambda)$ jest wielomianem minimalnym. W przeciwnym razie zwiększamy wykładniki w proponowanym $m(\lambda)$ dotąd, aż $m(A) = 0$.

Zdefiniujemy teraz funkcję od macierzy $f(A)$, mając zadaną funkcję argumentu skalarnego $f(\lambda)$, która niekoniecznie jest wielomianem. Następnie podamy praktyczny sposób jej wyznaczania. Pozwoli nam to w szczególności dość łatwo znajdować $f(A) = e^{tA}$, gdzie t traktujemy jako parametr. A jak już wiemy, taka macierz jest układem fundamentalnym ULJ.

W dalszym ciągu $A \in M^n(\mathbb{C})$ jest zadaną macierzą. Rozważmy funkcję $f(\lambda)$ i wielomian minimalny $m(\lambda)$ macierzy A w postaci (6.27). Zbiór liczb

$$f(\sigma(A)) = \left\{ f(\lambda_i), f^{(1)}(\lambda_i), ..., f^{(l_i-1)}(\lambda_i) : \ i = 1, ..., s \right\}$$

nazywamy zbiorem wartości funkcji $f(\lambda)$ na widmie $\sigma(A)$. Funkcja $f(\lambda)$ jest określona na widmie $\sigma(A)$, gdy zbiór $f(\sigma(A))$ ma sens. Mówimy, że dwie funkcje $f(\lambda)$ i $g(\lambda)$ określone na widmie $\sigma(A)$ przyjmują na tym widmie te same wartości, gdy

$$f^{(j-1)}(\lambda_i) = g^{(j-1)}(\lambda_i), \quad j = 1, ..., l_i, \ i = 1, ..., s,$$

co symbolicznie zapisujemy $f(\sigma(A)) = g(\sigma(A))$.

Twierdzenie 6.12. *Jeśli $w(\lambda)$ i $v(\lambda)$ są dowolnymi wielomianami takimi, że $w(\sigma(A)) = v(\sigma(A))$, to $w(A) = v(A)$.*

Dowód. Załóżmy, że $w(\sigma(A)) = v(\sigma(A))$. Zdefiniujmy wielomian

$$d(\lambda) = w(\lambda) - v(\lambda).$$

Skoro

$$w^{(j-1)}(\lambda_i) = v^{(j-1)}(\lambda_i), \quad j = 1, ..., l_i, \ i = 1, ..., s,$$

to

$$d^{(j-1)}(\lambda_i) = 0, \quad j = 1, ..., l_i, \ i = 1, ..., s.$$

A to oznacza, że każda liczba λ_i jest co najmniej l_i-krotnym pierwiastkiem wielomianu $d(\lambda)$. Wnioskujemy stąd, że wielomian $d(\lambda)$ jest podzielny przez wielomian minimalny $m(\lambda)$, co możemy zapisać

$$d(\lambda) = m(\lambda)q(\lambda),$$

gdzie $q(\lambda)$ jest pewnym wielomianem. W konsekwencji

$$d(A) = m(A)q(A) = 0\, q(A) = 0,$$

czyli

$$w(A) = v(A).$$

Definicja 6.7. Załóżmy, że funkcja $f(\lambda)$ jest określona na widmie $\sigma(A)$. Definiujemy

$$f(A) = w(A),$$

gdzie $w(\lambda)$ jest dowolnym wielomianem przyjmującym te same wartości na widmie $\sigma(A)$ co $f(\lambda)$, tzn. że $f(\sigma(A)) = w(\sigma(A))$.

Twierdzenie 6.13. *Istnieje dokładnie jeden wielomian $r(\lambda)$ stopnia mniejszego od stopnia $l = l_1 + ... + l_s$ wielomianu minimalnego $m(\lambda)$ macierzy A taki, że $r(\sigma(A)) = f(\sigma(A))$. Wielomian $r(\lambda)$ wyznacza się, rozwiązując zagadnienie interpolacyjne*

$$r^{(j-1)}(\lambda_i) = f^{(j-1)}(\lambda_i), \quad j = 1, ..., l_i, \ i = 1, ..., s, \tag{6.29}$$

i nosi on nazwę wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a-Sylwestra dla funkcji $f(\lambda)$ na widmie $\sigma(A)$. Ponadto:

1. jeśli $m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_n)$, *to*

$$r(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\lambda - \lambda_1) \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_{i-1})(\lambda - \lambda_{i+1}) \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_n)}{(\lambda_i - \lambda_1) \cdot ... \cdot (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \cdot ... \cdot (\lambda_i - \lambda_n)} f(\lambda_i), \tag{6.30}$$

$$f(A) = r(A) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(A - \lambda_1 I) \cdot ... \cdot (A - \lambda_{i-1} I)(A - \lambda_{i+1} I) \cdot ... \cdot (A - \lambda_n I)}{(\lambda_i - \lambda_1) \cdot ... \cdot (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \cdot ... \cdot (\lambda_i - \lambda_n)} f(\lambda_i); \tag{6.31}$$

2. jeśli $m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_s)$, $s < n$, *to*

$$r(\lambda) = \sum_{i=1}^{s} \frac{(\lambda - \lambda_1) \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_{i-1})(\lambda - \lambda_{i+1}) \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_s)}{(\lambda_i - \lambda_1) \cdot ... \cdot (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \cdot ... \cdot (\lambda_i - \lambda_s)} f(\lambda_i), \tag{6.32}$$

$$f(A) = r(A) = \sum_{i=1}^{s} \frac{(A - \lambda_1 I) \cdot ... \cdot (A - \lambda_{i-1} I)(A - \lambda_{i+1} I) \cdot ... \cdot (A - \lambda_s I)}{(\lambda_i - \lambda_1) \cdot ... \cdot (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \cdot ... \cdot (\lambda_i - \lambda_s)} f(\lambda_i); \tag{6.33}$$

3. jeśli $m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1} \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_s)^{l_s}$, $s \leqslant n$, *to*

$$r(\lambda) = \sum_{i=1}^{s} \Big[a_{i1} + a_{i2}(\lambda - \lambda_i) + ... + a_{il_i}(\lambda - \lambda_i)^{l_i - 1}\Big] m_i(\lambda), \tag{6.34}$$

$$f(A) = r(A) = \sum_{i=1}^{s} \Big[a_{i1} I + a_{i2}(A - \lambda_i I) + ... + a_{il_i}(A - \lambda_i I)^{l_i - 1}\Big] m_i(A), \tag{6.35}$$

gdzie:

$$a_{ij} = \frac{1}{(j-1)!} \left(\frac{f}{m_i}\right)^{(j-1)} (\lambda_i), \tag{6.36}$$

$$m_i(\lambda) = \frac{m(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)^{l_i}}, \quad j = 1, ..., l_i, \ i = 1, ..., s. \tag{6.37}$$

Dowód. Wielomiany (6.30), (6.32) i (6.34) są oczywiście stopnia co najwyżej $l - 1$.

Sprawdzenie, że wielomiany (6.30) i (6.32) spełniają warunki (6.29) z $l_i = 1$ jest trywialne. Uzasadnimy wzór (6.34). Dzieląc obustronnie (6.34) przez $m(\lambda)$, otrzymujemy

$$\frac{r(\lambda)}{m(\lambda)} = \sum_{i=1}^{s} \Big[\frac{a_{i1}}{(\lambda - \lambda_i)^{l_i}} + \frac{a_{i2}}{(\lambda - \lambda_i)^{l_i - 1}} + ... + \frac{a_{il_i}}{\lambda - \lambda_i}\Big]. \tag{6.38}$$

Tożsamość tę mnożymy obustronnie przez $(\lambda - \lambda_i)^{l_i}$, $i = 1, ..., s$ i mamy

$$\frac{r(\lambda)}{m_i(\lambda)} = a_{i1} + a_{i2}(\lambda - \lambda_i) + ... + a_{il_i}(\lambda - \lambda_i)^{l_i - 1} + (\lambda - \lambda_i)^{l_i} \varrho_i(\lambda), \tag{6.39}$$

gdzie $\varrho_i(\lambda)$ jest funkcją wymierną, określoną wraz z pochodnymi w pewnym otoczeniu punktu λ_i. W ostatniej równości, podstawiając $\lambda = \lambda_i$, otrzymujemy

$$0! \ a_{i1} = \frac{r(\lambda_i)}{m_i(\lambda_i)} = \left(\frac{f}{m_i}\right)(\lambda_i).$$

Następnie różniczkując równość (6.39) stronami j razy, otrzymujemy

$$(j-1)! \ a_{ij} = \left(\frac{r}{m_i}\right)^{(j-1)} (\lambda_i) = \left(\frac{f}{m_i}\right)^{(j-1)} (\lambda_i), \quad j = 1, ..., l_i,$$

a w efekcie wzór na współczynniki (6.36). Znając a_{ij}, mnożmy (6.38) przez $m(\lambda)$, co daje nam formułę (6.34).

Jednoznaczność wynika stąd, że różnica dwóch wielomianów spełniających warunki (6.29) byłaby wielomianem stopnia co najwyżej $l-1$, mającym łącznie z krotnościami l miejsc zerowych, a to znaczy, że ta różnica byłaby wielomianem identycznie równym zeru.

Zauważmy, że prawe strony wzorów (6.31), (6.33) i (6.35) zależą wyłącznie od macierzy A i jej wartości własnych albo lepiej od wielomianu minimalnego oraz wartości funkcji $f(\lambda)$ na widmie macierzy A. Wzory (6.30)–(6.33) można zapisać odpowiednio w postaci:

$$r(\lambda) = \varphi_1(\lambda)f(\lambda_1) + ... + \varphi_n(\lambda)f(\lambda_n), \tag{6.40}$$

$$f(A) = f(\lambda_1)B_1 + ... + f(\lambda_n)B_n, \tag{6.41}$$

gdzie

$$\varphi_i(\lambda) = \frac{(\lambda-\lambda_1)\cdot ... \cdot(\lambda-\lambda_{i-1})(\lambda-\lambda_{i+1})\cdot ... \cdot(\lambda-\lambda_n)}{(\lambda_i-\lambda_1)\cdot ... \cdot(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\cdot ... \cdot(\lambda_i-\lambda_n)},$$

$$B_i = \varphi_i(A), \quad i = 1, ..., n;$$

$$r(\lambda) = \varphi_1(\lambda)f(\lambda_1) + ... + \varphi_s(\lambda)f(\lambda_s), \tag{6.42}$$

$$f(A) = f(\lambda_1)B_1 + ... + f(\lambda_s)B_s, \tag{6.43}$$

gdzie

$$\varphi_i(\lambda) = \frac{(\lambda-\lambda_1)\cdot ... \cdot(\lambda-\lambda_{i-1})(\lambda-\lambda_{i+1})\cdot ... \cdot(\lambda-\lambda_s)}{(\lambda_i-\lambda_1)\cdot ... \cdot(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\cdot ... \cdot(\lambda_i-\lambda_s)},$$

$$B_i = \varphi_i(A), \quad i = 1, ..., s.$$

Jak widzimy wielomiany $\varphi_i(\lambda)$ są stopnia mniejszego od l, zaś macierze B_i nie zależą od funkcji $f(\lambda)$. Analogicznie wzory (6.34) i (6.35), po uwzględnieniu (6.36) i (6.37), można zapisać w postaci:

$$r(\lambda) = \sum_{i=1}^{s}\Big[\varphi_{i1}(\lambda)f(\lambda_i) + \varphi_{i2}(\lambda)f^{(1)}(\lambda_i) + ... + \varphi_{il_i}(\lambda)f^{(l_i-1)}(\lambda_i)\Big], \tag{6.44}$$

$$f(A) = \sum_{i=1}^{s}\Big[f(\lambda_i)B_{i1} + f^{(1)}(\lambda_i)B_{i2} + ... + f^{(l_i-1)}(\lambda_i)B_{il_i}\Big], \tag{6.45}$$

gdzie $\varphi_{ij}(\lambda)$ są odpowiednimi wielomianami stopnia mniejszego od l, zaś

$$B_{ij} = \varphi_{ij}(A), \quad j = 1, ..., l_i, \; i = 1, ..., s$$

macierzami nie zależącymi of funkcji $f(\lambda)$. Macierze B_i we wzorach (6.41), (6.43) i macierze B_{ij} we wzorze (6.45) nazywamy składowymi macierzy A.

Przykład 6.2. Obliczyć $\sqrt{A}$, gdy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny macierzy A dany jest wzorem

$$\Delta(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-5).$$

Równanie charakterystyczne macierzy A

$$(\lambda-1)(\lambda-5) = 0$$

ma dwa pierwiastki jednokrotne

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 5.$$

A więc bez sprawdzania widzimy, że

$$m(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 5)$$

jest wielomianem minimalnym macierzy A. Wielomian interpolacyjny Lagrange'a-Sylwestra dla funkcji

$$f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$$

(pierwiastek arytmetyczny, $\lambda \in \mathbb{R}_+$), która oczywiście na widmie $\sigma(A)$ jest określona, ma postać

$$r(\lambda) = \varphi_1(\lambda) + \varphi_2(\lambda)\sqrt{5},$$

gdzie

$$\varphi_1(\lambda) = -\frac{1}{4}(\lambda - 5), \quad \varphi_2(\lambda) = \frac{1}{4}(\lambda - 1).$$

Zatem korzystając ze wzoru (6.41), mamy

$$f(A) = \sqrt{A} = B_1 + \sqrt{5}B_2,$$

gdzie

$$B_1 = \varphi_1(A) = -\frac{1}{4}(A - 5I) = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \varphi_2(A) = \frac{1}{4}(A - I) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

Finalnie

$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{4} & \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \\ \frac{-3+3\sqrt{5}}{4} & \frac{1+3\sqrt{5}}{4} \end{bmatrix}.$$

Przykład 6.3. Obliczyć e^{tA}, gdy

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}.$$

Zmienna $t \in \mathbb{R}$ pełni tutaj rolę parametru. Wielomian charakterystyczny macierzy A dany jest wzorem

$$\Delta(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 1 & -6-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 7)(\lambda + 4).$$

Równanie charakterystyczne macierzy A

$$(\lambda + 7)(\lambda + 4) = 0$$

ma dwa pierwiastki jednokrotne

$$\lambda_1 = -7, \quad \lambda_2 = -4.$$

A więc

$$m(\lambda) = (\lambda + 7)(\lambda + 4)$$

jest wielomianem minimalnym macierzy A. Wielomian interpolacyjny Lagrange'a-Sylwestra dla funkcji

$$f(\lambda) = e^{\lambda t},$$

która na widmie $\sigma(A)$ jest określona, ma postać

$$r(\lambda) = \varphi_1(\lambda)e^{-7t} + \varphi_2(\lambda)e^{-4t},$$

gdzie

$$\varphi_1(\lambda) = -\frac{1}{3}(\lambda+4), \quad \varphi_2(\lambda) = \frac{1}{3}(\lambda+7).$$

Zatem korzystając ze wzoru (6.41), możemy napisać

$$f(A) = e^{tA} = e^{-7t}B_1 + e^{-4t}B_2,$$

gdzie

$$B_1 = \varphi_1(A) = -\frac{1}{3}(A+4I) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \varphi_2(A) = \frac{1}{3}(A+7I) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Ostatecznie

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}e^{-7t} + \frac{2}{3}e^{-4t} & -\frac{2}{3}e^{-7t} + \frac{2}{3}e^{-4t} \\ -\frac{1}{3}e^{-7t} + \frac{1}{3}e^{-4t} & \frac{2}{3}e^{-7t} + \frac{1}{3}e^{-4t} \end{bmatrix}.$$

Uwaga 6.7. Warto zwrócić uwagę, że $\sqrt{A}$ dla macierzy A w przykładzie 6.3 nie jest definiowalny, gdyż funkcja $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$ nie jest określona na widmie $\sigma(A)$. Po prostu arytmetyczne pierwiastki kwadratowe z liczb ujemnych $\lambda_1 = -7$ i $\lambda_2 = -4$ nie istnieją.

Nietrudno zauważyć, że wzory (6.30)–(6.33) są odpowiednio szczególnymi przypadkami wzorów (6.34) i (6.35). Dalsze rozważania ograniczymy więc do tych ostatnich.

Twierdzenie 6.14. *Składowe B_{ij}, $j = 1, ..., l_i$, $i = 1, ..., s$ macierzy A są liniowo niezależne.*

Dowód. Rozważmy zerową kombinację liniową

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{l_i} \alpha_{ij}B_{ij} = 0.$$

Wyznaczmy wielomian interpolacyjny $\tilde{r}(\lambda)$ stopnia mniejszego od l taki, że

$$\tilde{r}^{(j-1)}(\lambda_i) = \alpha_{ij}, \quad j = 1, ..., l_i, \; i = 1, ..., s.$$

Rozumując analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 6.13, znajdujemy

$$\tilde{r}(\lambda) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{l_i} \varphi_{ij}(\lambda)\alpha_{ij}.$$

W konsekwencji

$$\tilde{r}(A) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{l_i} \varphi_{ij}(A)\alpha_{ij} = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{l_i} \alpha_{ij}B_{ij} = 0.$$

Gdyby $\tilde{r}(\lambda) \not\equiv 0$, to znormalizowany $\tilde{r}(\lambda)$ byłby wielomianem anulującym macierzy A i stopnia mniejszego od stopnia wielomianu minimalnego $m(\lambda)$, co jest sprzeczne z definicją wielomianu minimalnego. Zatem

$$\tilde{r}(\lambda) \equiv 0.$$

A to oznacza, że

$$\alpha_{ij} = 0, \quad j = 1, ..., l_i, \; i = 1, ..., s,$$

co kończy dowód.

W dalszej części przydadzą nam się pewne dodatkowe informacje z teorii macierzy. Rozważmy prostokątną macierz blokową

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{st} \end{bmatrix}$$

złożoną z st macierzy A_{ij}, $i = 1, ..., s$, $j = 1, ..., t$.

Lemat 6.2 (Schur). *Jeśli $s = t = 2$, macierze A_{ij}, $i, j = 1, 2$ są kwadratowe i tego samego wymiaru oraz*

$$A_{11}A_{21} = A_{21}A_{11},$$

to

$$|A| = |A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}|.$$

Przypuśćmy, że macierz A_{11} jest kwadratowa i nieosobliwa. Wówczas stosując uogólnioną metodę eliminacji Gaussa dla macierzy blokowych, możemy mnożąc lewostronnie pierwszy wiersz przez $-A_{i1}A_{11}^{-1}$ i dodając do wiersza i-tego, $i = 2, ..., s$, sprowadzić macierz A do macierzy blokowej

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1t} \\ 0 & A_{22}^{(1)} & \dots & A_{2t}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & A_{s2}^{(1)} & \dots & A_{st}^{(1)} \end{bmatrix},$$

gdzie $A_{ij}^{(1)} = -A_{i1}A_{11}^{-1}A_{1j} + A_{ij}$, $i = 2, ..., s$, $j = 2, ..., t$.

Lemat 6.3. *Jeśli macierz A jest kwadratowa oraz macierz A_{11} jest kwadratowa i nieosobliwa, to*

$$|A| = |A^{(1)}| = |A_{11}| \begin{vmatrix} A_{22}^{(1)} & \dots & A_{2t}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s2}^{(1)} & \dots & A_{st}^{(1)} \end{vmatrix}.$$

Powyższe lematy są dobrze znane w teorii macierzy (zobacz F.R. Gantmacher, Matrix Theory). W szczególności lemat 6.3 pozwala sprowadzać obliczanie wyznacznika macierzy złożonej z st bloków do obliczania wyznacznika macierzy złożonej z $(s-1)(t-1)$ bloków.

Omówimy teraz chyba najwygodniejszą metodę wyznaczania składowych B_{ij} macierzy A. Polega ona na rozwiązaniu odpowiedniego układu równań macierzowych, który otrzymujemy ze wzoru (6.45), przyjmując za $f(\lambda)$ l dowolnych liniowo niezależnych wielomianów $f_k(\lambda)$ stopnia mniejszego od l. Przykładowo mogą to być wielomiany odpowiednio stopnia $0, 1, ..., l-1$.

Przypuśćmy, że we wzorze (6.45) nie znamy macierzy B_{ij}. Rozważmy dowolne wielomiany skalarne $f_1(\lambda), ..., f_l(\lambda)$. Wstawmy w miejsce macierzy $f(A)$ macierze $f_k(A)$:

$$f_k(A) = \sum_{i=1}^{s} \Big[f_k(\lambda_i)B_{i1} + f_k^{(1)}(\lambda_i)B_{i2} + ... + f_k^{(l_i-1)}(\lambda_i)B_{il_i} \Big], \quad k = 1, ..., l. \tag{6.46}$$

Jeśli z układu (6.46) potrafimy obliczyć B_{ij} jednoznacznie, to wstawimy je do wzoru (6.45) i $B_{ij} = \varphi_{ij}(A)$. Spróbujmy znaleźć warunki, które powinny spełniać wielomiany $f_k(\lambda)$, żeby to było możliwe. Okazuje się, że warunkiem koniecznym i wystarczającym jest $\Delta \neq 0$, gdzie

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_1(\lambda_1) & \cdots & f_1^{(l_1-1)}(\lambda_1) & \cdots & f_1(\lambda_s) & \cdots & f_1^{(l_s-1)}(\lambda_s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_l(\lambda_1) & \cdots & f_l^{(l_1-1)}(\lambda_1) & \cdots & f_l(\lambda_s) & \cdots & f_l^{(l_s-1)}(\lambda_s) \end{vmatrix}.$$

Wyjaśnijmy to, rozważając prostszy przypadek wielomianu minimalnego

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \tag{6.47}$$

z $l = 2$. Układ (6.46) ma postać

$$\begin{cases} f_1(A) = f_1(\lambda_1)B_1 + f_1(\lambda_2)B_2 \\ f_2(A) = f_2(\lambda_1)B_1 + f_2(\lambda_2)B_2 \end{cases}$$

(dla uproszczenia zapisu przyjęliśmy notację odpowiednio B_1, B_2 zamiast B_{11}, B_{21}). Wykorzystując macierz blokową, możemy go przedstawić w następujący sposób

$$\begin{bmatrix} f_1(\lambda_1)\, I & f_1(\lambda_2)\, I \\ f_2(\lambda_1)\, I & f_2(\lambda_2)\, I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(A) \\ f_2(A) \end{bmatrix},$$

gdzie $I, B_i, f_i(A) \in M^n$, $i = 1, 2$. Ponieważ

$$(f_1(\lambda_1)I)(f_2(\lambda_1)I) = (f_2(\lambda_1)I)(f_1(\lambda_1)I),$$

więc na podstawie lematu 6.2 mamy

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} f_1(\lambda_1)\, I & f_1(\lambda_2)\, I \\ f_2(\lambda_1)\, I & f_2(\lambda_2)\, I \end{vmatrix} &= \Big|(f_1(\lambda_1)\, I)(f_2(\lambda_2)\, I) - (f_2(\lambda_1)\, I)(f_1(\lambda_2)\, I)\Big| \\ &= \Big|\Big(f_1(\lambda_1)f_2(\lambda_2) - f_2(\lambda_1)f_1(\lambda_2)\Big)I\Big| = \Delta^n, \end{aligned}$$

gdzie

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_1(\lambda_1) & f_1(\lambda_2) \\ f_2(\lambda_1) & f_2(\lambda_2) \end{vmatrix}.$$

A to oznacza, że $\tilde{\Delta} \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta \neq 0$. W konsekwencji macierze B_1, B_2 znajdziemy jednoznacznie tylko wtedy, gdy $\Delta \neq 0$, zgodnie z formułą

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\lambda_1)\, I & f_1(\lambda_2)\, I \\ f_2(\lambda_1)\, I & f_2(\lambda_2)\, I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1(A) \\ f_2(A) \end{bmatrix}.$$

Związek

$$\tilde{\Delta} = \Delta^n$$

prawdziwy jest też w ogólności, co można uzasadnić, postępując podobnie jak wyżej z zastosowaniem lematów 6.2, 6.3.

Wykażemy teraz, że jeśli wielomiany $f_1(\lambda)$,...,$f_l(\lambda)$ są liniowo niezależne i ich stopnie są mniejsze od l, to $\Delta \neq 0$. Znowu rozważmy prostszy wielomian minimalny (6.47) z $l = 2$. Niech wielomiany $f_1(\lambda)$ i $f_2(\lambda)$ stopnia mniejszego od l będą liniowo niezależne. Przypuśćmy, że $\Delta = 0$. Rozważmy układ równań

$$\begin{cases} \alpha_1 f_1(\lambda_1) + \alpha_2 f_2(\lambda_1) = 0 \\ \alpha_1 f_1(\lambda_2) + \alpha_2 f_2(\lambda_2) = 0 \end{cases},$$

co można zapisać macierzowo

$$\begin{bmatrix} f_1(\lambda_1) & f_2(\lambda_1) \\ f_1(\lambda_2) & f_2(\lambda_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_1(\lambda_1) & f_1(\lambda_2) \\ f_2(\lambda_1) & f_2(\lambda_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1(\lambda_1) & f_2(\lambda_1) \\ f_1(\lambda_2) & f_2(\lambda_2) \end{vmatrix} = 0,$$

więc układ ten ma rozwiązanie niezerowe $(\alpha_1, \alpha_2)^T \neq (0,0)^T$. Zdefiniujmy wielomian

$$g(\lambda) = \alpha_1 f_1(\lambda) + \alpha_2 f_2(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

z tak dobranymi α_1, α_2. Wielomian ten jest stopnia mniejszego od $l = 2$ i ma dwa miejsca zerowe λ_1, λ_2. Stąd wnioskujemy, że

$$g(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

czyli

$$\alpha_1 f_1(\lambda) + \alpha_2 f_2(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Z liniowej niezależności wielomianów $f_1(\lambda)$ i $f_2(\lambda)$ mamy $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, co daje nam sprzeczność.

Konkludując, w celu wyznaczenia macierzy B_{ij}, bez wykorzystywania skomplikowanych wzorów na wielomiany $\varphi_{ij}(\lambda)$, najlepiej zaproponować jakiekolwiek l liniowo niezależnych wielomianów $f_k(\lambda)$ stopnia mniejszego od l i rozwiązać układ równań macierzowych (6.46). Mogą to być na przykład wielomiany odpowiednio stopnia $0, 1, ..., l-1$.

Zamiast rozwiązywać układ równań macierzowych (6.46) można, korzystając z rozwinięcia Laplace'a wzdłuż pierwszego wiersza, rozwiązać równanie skalarne

$$\begin{vmatrix} w(\lambda) & f(\lambda_1) & \cdots & f^{(l_1-1)}(\lambda_1) & \cdots & f(\lambda_s) & \cdots & f^{(l_s-1)}(\lambda_s) \\ f_1(\lambda) & f_1(\lambda_1) & \cdots & f_1^{(l_1-1)}(\lambda_1) & \cdots & f_1(\lambda_s) & \cdots & f_1^{(l_s-1)}(\lambda_s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_l(\lambda) & f_l(\lambda_1) & \cdots & f_l^{(l_1-1)}(\lambda_1) & \cdots & f_l(\lambda_s) & \cdots & f_l^{(l_s-1)}(\lambda_s) \end{vmatrix} = 0,$$

w którym niewiadomą jest wielomian $w(\lambda)$. Nietrudno sprawdzić, że jeśli $\Delta \neq 0$, to istnieje dokładnie jeden $w(\lambda)$ i

$$f(\sigma(A)) = w(\sigma(A)),$$

a stąd

$$f(A) = w(A).$$

Metoda ta jest wygodna dla dużych l.

Przykład 6.4. Rozwiązać układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} x' = -5x + 2y \\ y' = x - 6y \end{cases} . \tag{6.48}$$

Macierz tego układu ma postać

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny macierzy A dany jest wzorem

$$\Delta(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 1 & -6-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+7)(\lambda+4).$$

Równanie charakterystyczne macierzy A

$$(\lambda+7)(\lambda+4) = 0$$

ma dwa pierwiastki jednokrotne

$$\lambda_1 = -7, \quad \lambda_2 = -4.$$

Wprost ze wzoru (6.27) wnioskujemy bez sprawdzania, że

$$m(\lambda) = (\lambda + 7)(\lambda + 4)$$

jest wielomianem minimalnym macierzy A. Korzystamy ze wzoru (6.41) i mamy

$$f(A) = f(-7)B_1 + f(-4)B_2.$$

Przyjmując

$$f_1(\lambda) = \lambda + 7, \quad f_2(\lambda) = \lambda + 4,$$

możemy napisać

$$f_1(A) = A + 7I, \quad f_2(A) = A + 4I,$$

a w konsekwencji otrzymujemy układ równań macierzowych (zdegenerowany)

$$\begin{cases} A + 7I = 3B_2 \\ A + 4I = -3B_1 \end{cases}.$$

Stąd

$$B_1 = -\frac{1}{3}(A + 4I) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \frac{1}{3}(A + 7I) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Kładąc teraz

$$f(\lambda) = e^{\lambda t},$$

znajdujemy macierz

$$f(A) = e^{tA} = e^{-7t}B_1 + e^{-4t}B_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}e^{-7t} + \frac{2}{3}e^{-4t} & -\frac{2}{3}e^{-7t} + \frac{2}{3}e^{-4t} \\ -\frac{1}{3}e^{-7t} + \frac{1}{3}e^{-4t} & \frac{2}{3}e^{-7t} + \frac{1}{3}e^{-4t} \end{bmatrix}$$

(zobacz przykład 6.3). Wobec tego rozwiązanie ogólne układu równań różniczkowych (6.48) ma postać

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3}e^{-7t} + \frac{2}{3}e^{-4t} & -\frac{2}{3}e^{-7t} + \frac{2}{3}e^{-4t} \\ -\frac{1}{3}e^{-7t} + \frac{1}{3}e^{-4t} & \frac{2}{3}e^{-7t} + \frac{1}{3}e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\frac{1}{3}e^{-7t} + \frac{2}{3}e^{-4t})C_1 + (-\frac{2}{3}e^{-7t} + \frac{2}{3}e^{-4t})C_2 \\ (-\frac{1}{3}e^{-7t} + \frac{1}{3}e^{-4t})C_1 + (\frac{2}{3}e^{-7t} + \frac{1}{3}e^{-4t})C_2 \end{bmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Przykład 6.5. Rozwiązać układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} x' = -7x + y \\ y' = -2x - 5y \end{cases}. \tag{6.49}$$

Macierz tego układu ma postać

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny macierzy A dany jest wzorem

$$\Delta(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -7 - \lambda & 1 \\ -2 & -5 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 6 - i)(\lambda + 6 + i).$$

Równanie charakterystyczne macierzy A

$$(\lambda + 6 - i)(\lambda + 6 + i) = 0$$

ma dwa zespolone pierwiastki jednokrotne

$$\lambda_1 = -6 + i, \quad \lambda_2 = -6 - i.$$

Zatem

$$m(\lambda) = (\lambda + 6 - i)(\lambda + 6 + i)$$

jest wielomianem minimalnym macierzy A, zaś

$$f(A) = f(-6 + i)B_1 + f(-6 - i)B_2.$$

Niech

$$f_1(\lambda) = \lambda + 6 - i, \quad f_2(\lambda) = \lambda + 6 + i.$$

Mamy więc

$$f_1(A) = A + (6 - i)I, \quad f_2(A) = A + (6 + i)I.$$

A to prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} A + (6 - i)I = -2iB_2 \\ A + (6 + i)I = 2iB_1 \end{cases},$$

którego rozwiązaniem są macierze

$$B_1 = \frac{1}{2i}(A + (6 + i)I) = -\frac{1}{2}i \begin{bmatrix} -1 + i & 1 \\ -2 & 1 + i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + i & -i \\ 2i & 1 - i \end{bmatrix},$$

$$B_2 = -\frac{1}{2i}(A + (6 - i)I) = \frac{1}{2}i \begin{bmatrix} -1 - i & 1 \\ -2 & 1 - i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - i & i \\ -2i & 1 + i \end{bmatrix}.$$

Dla punkcji

$$f(\lambda) = e^{\lambda t}$$

obliczamy macierz

$$\begin{aligned} f(A) = e^{tA} &= e^{(-6+i)t}B_1 + e^{(-6-i)t}B_2 = e^{-6t}(\cos t + i \sin t)B_1 + e^{-6t}(\cos t - i \sin t)B_2 \\ &= \frac{1}{2}e^{-6t}(\cos t + i \sin t) \begin{bmatrix} 1 + i & -i \\ 2i & 1 - i \end{bmatrix} + \frac{1}{2}e^{-6t}(\cos t - i \sin t) \begin{bmatrix} 1 - i & i \\ -2i & 1 + i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-6t}(\cos t - \sin t) & e^{-6t} \sin t \\ -2e^{-6t} \sin t & e^{-6t}(\cos t + \sin t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie ogólne układu równań różniczkowych (6.49) ma postać

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^{-6t}(\cos t - \sin t) & e^{-6t} \sin t \\ -2e^{-6t} \sin t & e^{-6t}(\cos t + \sin t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-6t}(\cos t - \sin t)C_1 + e^{-6t}(\sin t)C_2 \\ -2e^{-6t}(\sin t)C_1 + e^{-6t}(\cos t + \sin t)C_2 \end{bmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Przykład 6.6. Rozwiązać układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z \\ y' = 10x - 5y + 7z \\ z' = 4x - 2y + 2z \end{cases}. \tag{6.50}$$

Macierz tego układu ma postać

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny macierzy A dany jest wzorem

$$\Delta(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 10 & -5-\lambda & 7 \\ 4 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2(\lambda+1).$$

Rozwiązaniami równania charakterystycznego macierzy A

$$-\lambda^2(\lambda+1) = 0$$

są liczby

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1,$$

przy czym λ_1 jest pierwiastkiem dwukrotnym, a λ_2 - jednokrotnym. Proponujemy

$$m(\lambda) = \lambda(\lambda+1),$$

ale niestety

$$m(A) = A(A+I) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 8 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0.$$

A stąd wielomianem minimalnym macierzy A jest

$$m(\lambda) = \lambda^2(\lambda+1).$$

Uwzględniając wzór (6.45), mamy

$$f(A) = f(0)B_1 + f'(0)B_2 + f(-1)B_3$$

(dla uproszczenia zapisu przyjęliśmy notację odpowiednio B_1, B_2, B_3 zamiast B_{11}, B_{12}, B_{21}). Połóżmy

$$f_1(\lambda) = 1, \quad f_2(\lambda) = \lambda, \quad f_3(\lambda) = \lambda^2.$$

Zatem

$$f_1'(\lambda) = 0, \quad f_2'(\lambda) = 1, \quad f_3'(\lambda) = 2\lambda,$$
$$f_1(A) = I, \quad f_2(A) = A, \quad f_3(A) = A^2,$$

co generuje układ równań macierzowych

$$\begin{cases} I = B_1 + B_3 \\ A = B_2 - B_3 \\ A^2 = B_3 \end{cases}.$$

Rozwiązaniem tego układu są macierze

$$B_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 8 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dalej dla funkcji

$$f(\lambda) = e^{\lambda t},$$

po obliczeniu jej pochodnej

$$f'(\lambda) = te^{\lambda t}$$

znajdujemy macierz

$$f(A) = e^{tA} = B_1 + tB_2 + e^{-t}B_3 = \begin{bmatrix} -1+4t+2e^{-t} & 1-2t-e^{-t} & -1+3t+e^{-t} \\ 2+8t-2e^{-t} & -4t+e^{-t} & 1+6t-e^{-t} \\ 4-4e^{-t} & -2+2e^{-t} & 3-2e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie ogólne układu równań różniczkowych (6.50) dane jest wzorem

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+4t+2e^{-t} & 1-2t-e^{-t} & -1+3t+e^{-t} \\ 2+8t-2e^{-t} & -4t+e^{-t} & 1+6t-e^{-t} \\ 4-4e^{-t} & -2+2e^{-t} & 3-2e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (-1+4t+2e^{-t})C_1 + (1-2t-e^{-t})C_2 + (-1+3t+e^{-t})C_3 \\ (2+8t-2e^{-t})C_1 + (-4t+e^{-t})C_2 + (1+6t-e^{-t})C_3 \\ (4-4e^{-t})C_1 + (-2+2e^{-t})C_2 + (3-2e^{-t})C_3 \end{bmatrix}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Przykład 6.7. Rozwiązać układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} x' = -2x + 2y - 3z \\ y' = 2x + y - 6z \\ z' = -x - 2y \end{cases}. \tag{6.51}$$

Macierz tego układu ma postać

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny macierzy A dany jest wzorem

$$\Delta(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1-\lambda & -6 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+3)^2(\lambda-5).$$

Rozwiązaniami równania charakterystycznego macierzy A

$$-(\lambda+3)^2(\lambda-5) = 0$$

są liczby

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 5,$$

przy czym λ_1 jest pierwiastkiem dwukrotnym, a λ_2 - jednokrotnym. Proponujemy

$$m(\lambda) = (\lambda+3)(\lambda-5)$$

i sprawdzamy, że istotnie

$$m(A) = (A+3I)(A-5I) = 0.$$

A więc jest to wielomian minimalny macierzy A. Biorąc pod uwagę wzór (6.43), widzimy, że

$$f(A) = f(-3)B_1 + f(5)B_2.$$

Kładąc

$$f_1(\lambda) = \lambda + 3, \quad f_2(\lambda) = \lambda - 5,$$

mamy

$$f_1(A) = A + 3I, \quad f_2(A) = A - 5I,$$

a w efekcie otrzymujemy układ równań macierzowych (zdegenerowany)

$$\begin{cases} A + 3I = 8B_2 \\ A - 5I = -8B_1 \end{cases}.$$

Stąd

$$B_1 = -\frac{1}{8}(A - 5I) = \begin{bmatrix} \frac{7}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \frac{1}{8}(A + 3I) = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}.$$

Zatem dla funkcji

$$f(\lambda) = e^{\lambda t}$$

znajdujemy macierz

$$f(A) = e^{tA} = e^{-3t}B_1 + e^{5t}B_2 = \begin{bmatrix} \frac{7}{8}e^{-3t} + \frac{1}{8}e^{5t} & -\frac{1}{4}e^{-3t} + \frac{1}{4}e^{5t} & \frac{3}{8}e^{-3t} - \frac{3}{8}e^{5t} \\ -\frac{1}{4}e^{-3t} + \frac{1}{4}e^{5t} & \frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{5t} & \frac{3}{4}e^{-3t} - \frac{3}{4}e^{5t} \\ -\frac{1}{8}e^{-3t} - \frac{1}{8}e^{5t} & \frac{1}{4}e^{-3t} - \frac{1}{4}e^{5t} & \frac{5}{8}e^{-3t} + \frac{3}{8}e^{5t} \end{bmatrix}$$

i rozwiązanie ogólne układu równań różniczkowych (6.51) dane jest wzorem

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{7}{8}e^{-3t} + \frac{1}{8}e^{5t} & -\frac{1}{4}e^{-3t} + \frac{1}{4}e^{5t} & \frac{3}{8}e^{-3t} - \frac{3}{8}e^{5t} \\ -\frac{1}{4}e^{-3t} + \frac{1}{4}e^{5t} & \frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{5t} & \frac{3}{4}e^{-3t} - \frac{3}{4}e^{5t} \\ -\frac{1}{8}e^{-3t} - \frac{1}{8}e^{5t} & \frac{1}{4}e^{-3t} - \frac{1}{4}e^{5t} & \frac{5}{8}e^{-3t} + \frac{3}{8}e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\frac{7}{8}e^{-3t} + \frac{1}{8}e^{5t})C_1 + (-\frac{1}{4}e^{-3t} + \frac{1}{4}e^{5t})C_2 + (\frac{3}{8}e^{-3t} - \frac{3}{8}e^{5t})C_3 \\ (-\frac{1}{4}e^{-3t} + \frac{1}{4}e^{5t})C_1 + (\frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{5t})C_2 + (\frac{3}{4}e^{-3t} - \frac{3}{4}e^{5t})C_3 \\ (-\frac{1}{8}e^{-3t} - \frac{1}{8}e^{5t})C_1 + (\frac{1}{4}e^{-3t} - \frac{1}{4}e^{5t})C_2 + (\frac{5}{8}e^{-3t} + \frac{3}{8}e^{5t})C_3 \end{bmatrix}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Przykład 6.8. Rozwiązać układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = -x + 5y + e^{3t} \end{cases}. \tag{6.52}$$

Macierz tego układu i jego prawa strona mają odpowiednio postać

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Najpierw znajdziemy rozwiązanie ogólne skojarzonego układu jednorodnego

$$\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = -x + 5y \end{cases}. \tag{6.53}$$

Wielomian charakterystyczny macierzy A dany jest wzorem

$$\Delta(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 4 \\ -1 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)^2.$$

Równanie charakterystyczne macierzy A

$$(\lambda - 3)^2 = 0$$

ma jeden pierwiastek dwukrotny

$$\lambda_1 = 3.$$

Sprawdzamy, że

$$m(\lambda) = \lambda - 3$$

nie jest wielomianem minimalnym macierzy A, gdyż

$$m(A) = A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Zatem wielomianem minimalnym tej macierzy jest

$$m(\lambda) = (\lambda - 3)^2.$$

Zgodnie ze wzorem (6.45)

$$f(A) = f(3)B_1 + f'(3)B_2$$

(dla uproszczenia zapisu przyjęliśmy notację odpowiednio B_1, B_2 zamiast B_{11}, B_{12}). Rozważmy wielomiany

$$f_1(\lambda) = 1, \quad f_2(\lambda) = \lambda - 3,$$

a więc

$$f_1'(\lambda) = 0, \quad f_2'(\lambda) = 1,$$

$$f_1(A) = I, \quad f_2(A) = A - 3I.$$

Obliczamy

$$\begin{cases} I = B_1 \\ A - 3I = B_2 \end{cases},$$

czyli

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dla funkcji

$$f(\lambda) = e^{\lambda t}$$

mamy

$$f'(\lambda) = te^{\lambda t},$$

$$f(A) = e^{tA} = e^{3t}B_1 + te^{3t}B_2 = \begin{bmatrix} (1-2t)e^{3t} & 4te^{3t} \\ -te^{3t} & (1+2t)e^{3t} \end{bmatrix}$$

i rozwiązanie ogólne równania (6.53) ma postać

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} (1-2t)e^{3t} & 4te^{3t} \\ -te^{3t} & (1+2t)e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Teraz poszukamy rozwiązania szczególnego układu (6.52) metodą uzmiennniania stałych. Dla funkcji

$$f(\lambda) = e^{-\lambda t}$$

obliczamy

$$f'(\lambda) = -te^{-\lambda t},$$

$$f(A) = e^{-tA} = e^{-3t}B_1 - te^{-3t}B_2 = \begin{bmatrix} (1+2t)e^{-3t} & -4te^{-3t} \\ te^{-3t} & (1-2t)e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie szczególne będzie mieć postać

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_s = e^{tA} \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix},$$

gdzie szukana funkcja wektorowa $[C_1'(t), C_2'(t)]^T$ spełnia równanie

$$e^{tA} \begin{bmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{bmatrix} = b(t)$$

(zobacz rozdział 5.1). Dalej rozwiązujemy to równanie

$$\begin{bmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{bmatrix} = e^{-tA} b(t) = \begin{bmatrix} (1+2t)e^{-3t} & -4te^{-3t} \\ te^{-3t} & (1-2t)e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4t \\ 1-2t \end{bmatrix}$$

(zobacz twierdzenie 6.1) i całkując, obliczamy jedną funkcję wektorową

$$\begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \int e^{-tA} b(t)\, dt = \int \begin{bmatrix} -4t \\ 1-2t \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} -2t^2 \\ t-t^2 \end{bmatrix}.$$

Wobec tego rozwiązanie szczególne układu (6.52) dane jest wzorem

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} (1-2t)e^{3t} & 4te^{3t} \\ -te^{3t} & (1+2t)e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2t^2 \\ t-t^2 \end{bmatrix},$$

a jego rozwiązanie ogólne ma postać

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (1-2t)e^{3t} & 4te^{3t} \\ -te^{3t} & (1+2t)e^{3t} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2t^2 \\ t-t^2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \big((1-2t)(C_1-2t^2) + 4t(C_2+t-t^2)\big)e^{3t} \\ \big(-t(C_1-2t^2) + (1+2t)(C_2+t-t^2)\big)e^{3t} \end{bmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Przykład 6.9. Rozwiązać układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} x' = -4x + y + z + e^{-2t} \\ y' = x - y - 2z \\ z' = -2x + y - z \end{cases}. \tag{6.54}$$

Macierz tego układu i jego prawą stronę można zapisać odpowiednio w postaci

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zacznijmy od znalezienia rozwiązania ogólnego skojarzonego układu jednorodnego

$$\begin{cases} x' = -4x + y + z \\ y' = x - y - 2z \\ z' = -2x + y - z \end{cases}. \tag{6.55}$$

Wielomian charakterystyczny macierzy A dany jest wzorem

$$\Delta(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & -2 \\ -2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)^3.$$

Rozwiązaniem równania charakterystycznego macierzy A

$$-(\lambda+2)^3=0$$

jest pierwiastek trzykrotny

$$\lambda_1=-2.$$

Sprawdzamy, że ani

$$m(\lambda)=\lambda+2,$$

ani

$$m(\lambda)=(\lambda+2)^2$$

nie jest wielomianem minimalnym macierzy A, gdyż

$$m(A)=A+2I=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2\\ -2 & 1 & 1\end{bmatrix}\neq 0$$

oraz

$$m(A)=(A+2I)^2=\begin{bmatrix}3 & 0 & -3\\ 3 & 0 & -3\\ 3 & 0 & -3\end{bmatrix}\neq 0.$$

Stąd wnioskujemy, że wielomianem minimalnym tej macierzy jest

$$m(\lambda)=(\lambda+2)^3.$$

Zgodnie ze wzorem (6.45)

$$f(A)=f(-2)B_1+f'(-2)B_2+f''(-2)B_3$$

(dla uproszczenia zapisu przyjęliśmy notację odpowiednio B_1, B_2, B_3 zamiast B_{11}, B_{12}, B_{13}). Zaproponujmy wielomiany

$$f_1(\lambda)=1,\quad f_2(\lambda)=\lambda+2,\quad f_3(\lambda)=(\lambda+2)^2,$$

a więc

$$f_1'(\lambda)=0,\quad f_2'(\lambda)=1,\quad f_3'(\lambda)=2(\lambda+2),$$

$$f_1''(\lambda)=0,\quad f_2''(\lambda)=0,\quad f_3''(\lambda)=2,$$

$$f_1(A)=I,\quad f_2(A)=A+2I,\quad f_3(A)=(A+2I)^2.$$

Rozwiązaniem układu

$$\begin{cases} I=B_1\\ A+2I=B_2\\ (A+2I)^2=2B_3\end{cases}$$

są macierze

$$B_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2\\ -2 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad B_3=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2}\end{bmatrix}.$$

Dla funkcji

$$f(\lambda)=e^{\lambda t}$$

mamy

$$f'(\lambda) = te^{\lambda t}, \quad f''(\lambda) = t^2 e^{\lambda t},$$

$$f(A) = e^{tA} = e^{-2t}B_1 + te^{-2t}B_2 + t^2e^{-2t}B_3 = \begin{bmatrix} (1-2t+\frac{3}{2}t^2)e^{-2t} & te^{-2t} & (t-\frac{3}{2}t^2)e^{-2t} \\ (t+\frac{3}{2}t^2)e^{-2t} & (1+t)e^{-2t} & (-2t-\frac{3}{2}t^2)e^{-2t} \\ (-2t+\frac{3}{2}t^2)e^{-2t} & te^{-2t} & (1+t-\frac{3}{2}t^2)e^{-2t} \end{bmatrix}$$

i rozwiązanie ogólne równania (6.55) ma postać

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} (1-2t+\frac{3}{2}t^2)e^{-2t} & te^{-2t} & (t-\frac{3}{2}t^2)e^{-2t} \\ (t+\frac{3}{2}t^2)e^{-2t} & (1+t)e^{-2t} & (-2t-\frac{3}{2}t^2)e^{-2t} \\ (-2t+\frac{3}{2}t^2)e^{-2t} & te^{-2t} & (1+t-\frac{3}{2}t^2)e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, rozwiązania szczególnego układu (6.54) poszukamy metodą uzmienniania stałych. Dla funkcji

$$f(\lambda) = e^{-\lambda t}$$

obliczamy

$$f'(\lambda) = -te^{-\lambda t}, \quad f''(\lambda) = t^2 e^{-\lambda t},$$

$$f(A) = e^{-tA} = e^{2t}B_1 - te^{2t}B_2 + t^2e^{2t}B_3 = \begin{bmatrix} (1+2t+\frac{3}{2}t^2)e^{2t} & -te^{2t} & (-t-\frac{3}{2}t^2)e^{2t} \\ (-t+\frac{3}{2}t^2)e^{2t} & (1-t)e^{2t} & (2t-\frac{3}{2}t^2)e^{2t} \\ (2t+\frac{3}{2}t^2)e^{2t} & -te^{2t} & (1-t-\frac{3}{2}t^2)e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie szczególne tego układu będzie mieć postać

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_s = e^{tA} \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \\ C_3(t) \end{bmatrix},$$

gdzie szukana funkcja wektorowa $[C_1'(t), C_2'(t), C_3(t)]^T$ spełnia równanie

$$e^{tA} \begin{bmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \\ C_3'(t) \end{bmatrix} = b(t).$$

Rozwiązujemy to równanie

$$\begin{bmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \\ C_3'(t) \end{bmatrix} = e^{-tA}b(t) = \begin{bmatrix} (1+2t+\frac{3}{2}t^2)e^{2t} & -te^{2t} & (-t-\frac{3}{2}t^2)e^{2t} \\ (-t+\frac{3}{2}t^2)e^{2t} & (1-t)e^{2t} & (2t-\frac{3}{2}t^2)e^{2t} \\ (2t+\frac{3}{2}t^2)e^{2t} & -te^{2t} & (1-t-\frac{3}{2}t^2)e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+2t+\frac{3}{2}t^2 \\ -t+\frac{3}{2}t^2 \\ 2t+\frac{3}{2}t^2 \end{bmatrix}$$

i obliczamy jedną funkcję wektorową

$$\begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \\ C_3(t) \end{bmatrix} = \int e^{-tA}b(t)\,dt = \int \begin{bmatrix} 1+2t+\frac{3}{2}t^2 \\ -t+\frac{3}{2}t^2 \\ 2t+\frac{3}{2}t^2 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} t+t^2+\frac{1}{2}t^3 \\ -\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t^3 \\ t^2+\frac{1}{2}t^3 \end{bmatrix}.$$

A stąd rozwiązanie szczególne układu (6.54) dane jest wzorem

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} (1-2t+\frac{3}{2}t^2)e^{-2t} & te^{-2t} & (t-\frac{3}{2}t^2)e^{-2t} \\ (t+\frac{3}{2}t^2)e^{-2t} & (1+t)e^{-2t} & (-2t-\frac{3}{2}t^2)e^{-2t} \\ (-2t+\frac{3}{2}t^2)e^{-2t} & te^{-2t} & (1+t-\frac{3}{2}t^2)e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t+t^2+\frac{1}{2}t^3 \\ -\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t^3 \\ t^2+\frac{1}{2}t^3 \end{bmatrix},$$

zaś jego rozwiązanie ogólne przyjmuje formę

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-2t+\frac{3}{2}t^2)e^{-2t} & te^{-2t} & (t-\frac{3}{2}t^2)e^{-2t} \\ (t+\frac{3}{2}t^2)e^{-2t} & (1+t)e^{-2t} & (-2t-\frac{3}{2}t^2)e^{-2t} \\ (-2t+\frac{3}{2}t^2)e^{-2t} & te^{-2t} & (1+t-\frac{3}{2}t^2)e^{-2t} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t+t^2+\frac{1}{2}t^3 \\ -\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t^3 \\ t^2+\frac{1}{2}t^3 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} \Big((1-2t+\frac{3}{2}t^2)(C_1+t+t^2+\frac{1}{2}t^3)+t(C_2-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t^3)+(t-\frac{3}{2}t^2)(C_3+t^2+\frac{1}{2}t^3)\Big)e^{-2t} \\ \Big((t+\frac{3}{2}t^2)(C_1+t+t^2+\frac{1}{2}t^3)+(1+t)(C_2-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t^3)+(-2t-\frac{3}{2}t^2)(C_3+t^2+\frac{1}{2}t^3)\Big)e^{-2t} \\ \Big((-2t+\frac{3}{2}t^2)(C_1+t+t^2+\frac{1}{2}t^3)+t(C_2-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t^3)+(1+t-\frac{3}{2}t^2)(C_3+t^2+\frac{1}{2}t^3)\Big)e^{-2t} \end{bmatrix},$$

$$C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

6.2.2 Metoda Putzera

W tym rozdziale opiszemy algorytmiczną metodę Putzera konstrukcji macierzy fundamentalnej e^{tA}, $A \in M^n(\mathbb{R})$ ULJ.

Twierdzenie 6.15. *Niech $\lambda_1, ..., \lambda_n$ będą wartościami własnymi macierzy $A \in M^n(\mathbb{R})$ (dopuszczamy wartości wielokrotne). Wówczas*

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{n-1} u_{j+1}(t) P_j, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{6.56}$$

gdzie

$$P_0 = I, \quad P_j = \prod_{k=1}^{j} (A - \lambda_k I), \quad j = 1, ..., n-1,$$

a funkcje $u_1, ..., u_n$ są rozwiązaniami zagadnień początkowych dla skalarnych liniowych równań różniczkowych danych wzorami rekurencyjnymi:

$$u_1' = \lambda_1 u_1, \quad u_1(0) = 1,$$

$$u_j' = \lambda_j u_j + u_{j-1}, \quad u_j(0) = 0, \ j = 2, ..., n.$$

Dowód. Dowód, że prawa strona we wzorze (6.56), tj. $X(t) = \sum_{j=0}^{n-1} u_{j+1}(t) P_j$ jest macierzą fundamentalną ULJ $x' = Ax$ podany jest w [Myjak, str. 80]. Trzeba jeszcze zauważyć, że e^{tA} podobnie jak $X(t)$ jest rozwiązaniem macierzowego problemu Cauchy'ego

$$X' = AX, \quad X(0) = I$$

i że problem ten ma jedyne rozwiązanie.

Postawmy sobie pytanie, jak wyznaczyć metodą Putzera macierz e^{-tA}, mając już macierz e^{tA}? Zauważmy, że λ jest wartością własną macierzy A wtedy i tylko wtedy, gdy $-\lambda$ jest wartością własną macierzy $-A$. Wynika to z prostej obserwacji

$$Aw = \lambda w \Longleftrightarrow (-A)w = (-\lambda)w.$$

Ponadto

$$(-A) + \lambda_k I = -(A - \lambda_k I).$$

A to prowadzi do wzoru

$$e^{-tA} = \sum_{j=0}^{n-1} v_{j+1}(t)(-1)^j P_j, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{6.57}$$

gdzie funkcje $v_1, ..., v_n$ są rozwiązaniami zagadnień początkowych dla skalarnych liniowych równań różniczkowych danych wzorami rekurencyjnymi:

$$v_1' = -\lambda_1 v_1, \quad v_1(0) = 1,$$

$$v_j' = -\lambda_j v_j + v_{j-1}, \quad v_j(0) = 0, \; j = 2, ..., n.$$

Niestety, jak widać, trzeba znowu rozwiązać n problemów początkowych. Metoda wielomianu minimalnego jest tutaj wygodniejsza (zobacz przykłady 6.8, 6.9).

Przykład 6.10. Rozwiązać układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} x' = -5x + 2y \\ y' = x - 6y \end{cases}. \tag{6.58}$$

Macierz tego układu ma postać

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}.$$

I sposób. Jak już obliczyliśmy w przykładach 6.3 i 6.4, równanie chrakterystyczne tej macierzy ma dwa pierwiastki jednokrotne

$$\lambda_1 = -7, \quad \lambda_2 = -4.$$

Obliczamy

$$P_0 = I, \quad P_1 = A + 7I = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązaniem problemu początkowego

$$u_1' = -7u_1, \quad u_1(0) = 1$$

jest funkcja

$$u_1 = e^{-7t},$$

zaś rozwiązaniem problemu początkowego

$$u_2' = -4u_2 + e^{-7t}, \quad u_2(0) = 0$$

jest funkcja

$$u_2 = \frac{1}{3}e^{-4t} - \frac{1}{3}e^{-7t}.$$

Na podstawie wzoru (6.56) mamy

$$e^{tA} = e^{-7t}P_0 + \Big(\frac{1}{3}e^{-4t} - \frac{1}{3}e^{-7t}\Big)P_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}e^{-7t} + \frac{2}{3}e^{-4t} & -\frac{2}{3}e^{-7t} + \frac{2}{3}e^{-4t} \\ -\frac{1}{3}e^{-7t} + \frac{1}{3}e^{-4t} & \frac{2}{3}e^{-7t} + \frac{1}{3}e^{-4t} \end{bmatrix}$$

(zobacz przykłady 6.4 i 6.3). Wobec tego rozwiązanie ogólne układu równań różniczkowych (6.58) ma postać

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3}e^{-7t} + \frac{2}{3}e^{-4t} & -\frac{2}{3}e^{-7t} + \frac{2}{3}e^{-4t} \\ -\frac{1}{3}e^{-7t} + \frac{1}{3}e^{-4t} & \frac{2}{3}e^{-7t} + \frac{1}{3}e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\frac{1}{3}e^{-7t} + \frac{2}{3}e^{-4t})C_1 + (-\frac{2}{3}e^{-7t} + \frac{2}{3}e^{-4t})C_2 \\ (-\frac{1}{3}e^{-7t} + \frac{1}{3}e^{-4t})C_1 + (\frac{2}{3}e^{-7t} + \frac{1}{3}e^{-4t})C_2 \end{bmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

II sposób. Zmieńmy teraz numerację pierwiastków równania charakterystycznego

$$\lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = -7.$$

Obliczamy

$$P_0 = I, \quad P_1 = A + 4I = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązaniem problemu początkowego

$$u_1' = -4u_1, \quad u_1(0) = 1$$

jest funkcja

$$u_1 = e^{-4t},$$

zaś rozwiązaniem problemu początkowego

$$u_2' = -7u_2 + e^{-4t}, \quad u_2(0) = 0$$

jest funkcja

$$u_2 = -\frac{1}{3}e^{-7t} + \frac{1}{3}e^{-4t}.$$

Zgodnie z formułą (6.56)

$$e^{tA} = e^{-4t}P_0 + \Big(-\frac{1}{3}e^{-7t} + \frac{1}{3}e^{-4t}\Big)P_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}e^{-7t} + \frac{2}{3}e^{-4t} & -\frac{2}{3}e^{-7t} + \frac{2}{3}e^{-4t} \\ -\frac{1}{3}e^{-7t} + \frac{1}{3}e^{-4t} & \frac{2}{3}e^{-7t} + \frac{1}{3}e^{-4t} \end{bmatrix}$$

i rozwiązanie układu różniczkowego (6.58) znajdujemy tak jak sposobem I.

6.2.3 Metoda Jordana

Poniżej zaproponujemy metodę wyznaczania macierzy fundamentalnej e^{tA} i pewnej innej macierzy fundamentalnej ULJ o stałych współczynnikach przy pomocy macierzy Jordana.

Twierdzenie 6.16. *Jeśli $B \in M^n(\mathbb{C})$ i $P \in M^n(\mathbb{C})$ jest nieosobliwa, to*

$$e^{t(PBP^{-1})} = Pe^{tB}P^{-1}.$$

Dowód. Rozważmy ciąg sum cząstkowych (s_m) szeregu macierzowego $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tPBP^{-1})^k}{k!}$ określony wzorem

$$s_m(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(tPBP^{-1})^k}{k!}, \quad t \in \mathbb{R}, \ m \in \mathbb{N}_0.$$

Obliczmy kilka pierwszych jego elementów:

$$\begin{aligned} s_0(t) &= I, \\ s_1(t) &= I + \frac{tPBP^{-1}}{1!} = I + P\frac{tB}{1!}P^{-1}, \\ s_2(t) &= I + \frac{tPBP^{-1}}{1!} + \frac{t^2(PBP^{-1})^2}{2!} = I + P\frac{tB}{1!}P^{-1} + \frac{t^2PBP^{-1}PBP^{-1}}{2!} \\ &= I + P\frac{tB}{1!}P^{-1} + P\frac{(tB)^2}{2!}P^{-1}. \end{aligned}$$

Widzimy, że m-ty wyraz tego ciągu można zapisać w postaci

$$s_m(t) = P\Big(\sum_{k=0}^{m} \frac{(tB)^k}{k!}\Big)P^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}, \ m \in \mathbb{N}_0.$$

Dalej przechodzimy z m do ∞.

Definicja 6.8. Macierze $A, B \in M^n(\mathbb{C})$ są podobne, gdy istnieje nieosobliwa macierz $P \in M^n(\mathbb{C})$ taka, że
$$A = PBP^{-1}.$$

Twierdzenie 6.17. *Macierze podobne $A, B \in M^n(\mathbb{C})$ mają te same wartości własne.*

Twierdzenie 6.18. *Każda macierz $A \in M^n(\mathbb{C})$ jest podobna do swojej macierzy Jordana, tzn. że istnieje nieosobliwa macierz $P \in M^n(\mathbb{C})$ taka, że*
$$A = PJP^{-1}.$$

Twierdzenie 6.19. *Jeśli $A \in M^n(\mathbb{C})$, $P \in M^n(\mathbb{C})$ jest nieosobliwa i $A = PJP^{-1}$, to*
$$e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1}.$$

Dowód. Kładziemy $B = J$ i korzystamy wprost z dwóch ostatnich twierdzeń.

Definicja 6.9. Macierz $A \in M^n(\mathbb{C})$ jest diagonalizowalna, gdy jej macierz Jordana
$$J = diag\{\lambda_1, ..., \lambda_n\},$$
gdzie $\lambda_i \in \sigma(A),\ i = 1, ..., n$ (λ_i mogą sie powtarzać).

Twierdzenie 6.20. *Macierz $A \in M^n(\mathbb{C})$ jest diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej $\lambda_i \in \sigma(A)$*
$$k_g(\lambda_i) = k_a(\lambda_i).$$

Zajmiemy się teraz dalszą analizą prostszego przypadku, gdy macierz $A \in M^n(\mathbb{C})$ jest diagonalizowalna.

Twierdzenie 6.21. *Jeśli macierz $A \in M^n(\mathbb{C})$ jest diagonalizowalna, to*
$$e^{tJ} = diag\{e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t}\},$$
gdzie J jest jej macierzą Jordana oraz $\lambda_i \in \sigma(A)$, $i = 1, ..., n$.

Dowód. Rozważmy ciąg sum cząstkowych (s_m) szeregu macierzowego $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tJ)^k}{k!}$ określony wzorem
$$s_m(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(tJ)^k}{k!}, \quad t \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N}_0.$$
Rozpisujemy wzór na m-ty wyraz tego ciągu
$$s_m(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} \lambda_1 t & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n t \end{bmatrix}^k = \sum_{k=0}^{m} \begin{bmatrix} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{(\lambda_n t)^k}{k!} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{m} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{k=0}^{m} \frac{(\lambda_n t)^k}{k!} \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$
Przechodzimy z m do ∞ i otrzymujemy tezę.

Twierdzenie 6.22. *Jeśli $A \in M^n(\mathbb{C})$ jest diagonalizowalna, $P \in M^n(\mathbb{C})$ jest nieosobliwa i $A = PJP^{-1}$, to każda j-ta kolumna macierzy P jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ_j. Przy czym jeśli λ_j jest krotna, to odpowiednie wektory własne są liniowo niezależne.*

Dowód. Widzimy, że
$$AP = PJ.$$
Mamy więc następującą równość elementów macierzy AP i PJ:
$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}p_{kj} = p_{ij}\lambda_j, \quad i,j = 1,...,n. \tag{6.59}$$
Ustalmy indeks $j \in \{1,...,n\}$. Niech $w = (w_1,...,w_n)^T$, $w_i := p_{ij}$, $i = 1,...,n$ będzie j-tą kolumną macierzy P. Równość (6.59) możemy teraz zapisać w postaci
$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}w_k = w_i\lambda_j, \quad i = 1,...,n, \tag{6.60}$$
co oznacza, że
$$Aw = \lambda_j w.$$
Pokazaliśmy tym samym, że w jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ_j.

Druga część tezy wynika wprost z nieosobliwości macierzy P.

Poniżej sformułujemy twierdzenie, które pozwala skonstruować macierz fundamentalną ULJ bez konieczności wyznaczania macierzy odwrotnej P^{-1}.

Twierdzenie 6.23. *Załóżmy, że macierz $A \in M(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna. Definiujemy zbiór $\{x^1,...,x^n\}$ w następujący sposób:*

1. jeżeli $\lambda \in \mathbb{R}$ jest k-krotną wartością własną macierzy A, to w skład zbioru $\{x^1,...,x^n\}$ włączamy k funkcji
$$e^{\lambda t}w^1,\ e^{\lambda t}w^2,...,\ e^{\lambda t}w^k$$
gdzie $w^1,...,w^k$ są liniowo niezależnymi wektorami własnymi odpowiadającymi λ;

2. jeżeli $\lambda = \alpha + \beta i$, $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i \in \mathbb{C}$ $(\beta \neq 0)$ są k-krotnymi wartościami własnymi macierzy A, to w skład zbioru $\{x^1,...,x^n\}$ włączamy $2k$ funkcji
$$Re\Big(e^{\lambda t}w^1\Big),\ Re\Big(e^{\lambda t}w^2\Big),...,\ Re\Big(e^{\lambda t}w^k\Big),$$
$$Im\Big(e^{\lambda t}w^1\Big),\ Im\Big(e^{\lambda t}w^2\Big),...,\ Im\Big(e^{\lambda t}w^k\Big),$$
gdzie $w^1,...,w^k$ są liniowo niezależnymi wektorami własnymi odpowiadającymi λ.

Wówczas macierz $X = [x_i^k]_{i,k=1}^n$ jest macierzą fundamentalną ULJ
$$x' = Ax \tag{6.61}$$

Dowód. Rozważmy przypadek $n = 2$, ponieważ dla $n > 2$ uzasadnienie jest analogiczne.

Niech $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ (w szczególności mogą być równe). Oznacza to, że kolumnami macierzy Pe^{tJ} są funkcje rzeczywiste x^1, x^2, a więc $X(t) = Pe^{tJ}$, $t \in \mathbb{R}$. Macierz ta spełnia równanie (6.9), bo
$$(Pe^{tJ})' = PJe^{tJ} = A(Pe^{tJ}), \quad t \in \mathbb{R}.$$
Ponadto jest ona nieosobliwa jako iloczyn dwóch macierzy nieosobliwych. Wobec tego X jest macierzą fundamentalną ULJ.

Niech teraz $\lambda \in \mathbb{C}$. W tym przypadku kolumnami macierzy Pe^{tJ} są funkcje zespolone $y^1(t) = e^{\lambda t}w^1$, $y^2(t) = e^{\bar{\lambda} t}\overline{w^1}$. Podobnie jak wyżej macierz Pe^{tJ} jest rozwiązaniem (zespolonym) równania macierzowego (6.9) i jest nieosobliwa. A stąd funkcje
$$x_1(t) = Re\Big(e^{\lambda t}w^1\Big) = Re(y^1(t)) = \frac{1}{2}\Big(y_1(t) + \overline{y_1}(t)\Big) = \frac{1}{2}\Big(y_1(t) + y_2(t)\Big), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$x_2(t) = Im\Big(e^{\lambda t}w^1\Big) = Im(y^1(t)) = \frac{1}{2i}\Big(y_1(t) - \overline{y_1}(t)\Big) = \frac{1}{2i}\Big(y_1(t) - y_2(t)\Big), \quad t \in \mathbb{R}$$

są rozwiązaniami rzeczywistymi ULJ i nietrudno sprawdzić, że są liniowo niezależne. Zatem X jest macierzą fundamentalną ULJ.

Przykład 6.11. Rozwiązać układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} x' = -5x + 2y \\ y' = x - 6y \end{cases}. \tag{6.62}$$

Macierz tego układu ma postać

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}.$$

Jak już obliczyliśmy w przykładach 6.3 i 6.4, równanie chrakterystyczne tej macierzy ma dwa pierwiastki jednokrotne (krotność algebraiczna)

$$\lambda_1 = -7, \quad \lambda_2 = -4.$$

A stąd ich krotność geometryczna również wynosi jeden. Znajdujemy wektory własne odpowiadające λ_1 i λ_2, rozwiązując odpowiednio układy równań

$$(A + 4I)w^1 = 0, \quad (A + 7I)w^2 = 0,$$

które możemy zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1^1 \\ w_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1^2 \\ w_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczamy wektory własne np. $w^1 = (2, 1)^T$ i $w^2 = (1, -1)^T$. Wypisujemy macierz fundamentalną

$$X(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-4t} & e^{-7t} \\ e^{-4t} & -e^{-7t} \end{bmatrix},$$

w której kolumnami są liniowo niezależne rozwiązania (6.62)

$$x^1(t) = e^{-4t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x^2(t) = e^{-7t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Wobec tego rozwiązanie ogólne układu równań różniczkowych (6.62) ma postać

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-4t} & e^{-7t} \\ e^{-4t} & -e^{-7t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-4t}C_1 + e^{-7t}C_2 \\ e^{-4t}C_1 - e^{-7t}C_2 \end{bmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

(porównaj przykład 6.4).

Przejdźmy do analizy trudniejszego przypadku, gdy macierz $A \in M^n(\mathbb{C})$ jest niediagonalizowalna. Teraz macierz Jordana J jest blokową macierzą diagonalną

$$J = diag\Big(J_{\lambda_1,k_1}, ..., J_{\lambda_r,k_r}\Big),$$

gdzie $r < n$ oznacza liczbę klatek Jordana tworzących J, a klatka $J_{\lambda_i,k_i} \in M^{k_i}(\mathbb{C})$ jest macierzą postaci

$$J_{\lambda_i,k_i} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda_i & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 6.24. *Jeśli macierz $A \in M^n(\mathbb{C})$ jest niediagonalizowalna, to*

$$e^{tJ} = diag\Big(e^{tJ_{\lambda_1,k_1}}, ..., e^{tJ_{\lambda_r,k_r}}\Big),$$

gdzie J jest macierzą Jordana oraz $\lambda_i \in \sigma(A)$, $i = 1, ..., n$, $r < n$ (λ_i mogą się powtarzać).

Dowód. Oznaczmy przez (s_m) ciąg sum cząstkowych szeregu macierzowego $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tJ)^k}{k!}$ określony wzorem

$$s_m(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(tJ)^k}{k!}, \quad t \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N}_0.$$

Rozpisujemy wzór na m-ty wyraz tego ciągu

$$s_m(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} tJ_{\lambda_1,k_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & tJ_{\lambda_r,k_r} \end{bmatrix}^k = \sum_{k=0}^{m} \begin{bmatrix} \frac{(tJ_{\lambda_1,k_1})^k}{k!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{(tJ_{\lambda_r,k_r})^k}{k!} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{m} \frac{(tJ_{\lambda_1,k_1})^k}{k!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{k=0}^{m} \frac{(tJ_{\lambda_r,k_r})^k}{k!} \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Przechodzimy z m do ∞ i otrzymujemy tezę.

Poszukajmy przepisu na macierz $e^{tJ_{\lambda_i,k_i}}$. W tym celu macierz J_{λ_i,k_i} przedstawiamy w postaci $J_{\lambda_i,k_i} = \lambda_i I_{k_i} + R_{k_i}$, gdzie

$$R_{k_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nietrudno sprawdzić, że kolejne potęgi macierzy R_{k_i} przesuwają systematycznie nadprzekątną zawierającą 1 w kierunku prawego górnego rogu, aby dla potęg $k \geqslant k_i$ zwracać ostatecznie macierz zerową. Przeanalizujmy to na przykładzie $k_i = 4$,

$$R_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obliczamy kolejno:

$$R_4^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_4^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_4^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A stąd

$$e^{tJ_{\lambda_i,k_i}} = e^{\lambda_i t I_{k_i} + tR_{k_i}} = e^{\lambda_i t I_{k_i}} e^{tR_{k_i}} = e^{\lambda_i t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tR_{k_i})^k}{k!} = e^{\lambda_i t} \sum_{k=0}^{k_i - 1} \frac{(tR_{k_i})^k}{k!}$$

i ostatecznie

$$e^{J_{\lambda_i,k_i}} = e^{\lambda_i t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{k_i-1}}{(k_i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dalej w celu konstrukcji macierzy e^{tA} postępujemy podobnie, jak w przypadku macierzy diagonalizowalnej, przy czym kolumny macierzy P to wektory główne macierzy A (wypisane w kolejności zgodnej z zasadami tworzenia macierzy Jordana J i odpowiadającej jej macierzy przejścia P).

Podobnie jak to miało miejsce w przypadku macierzy diagonalizowalnej, sformułujemy twierdzenie, które pozwala skonstruować macierz fundamentalną ULJ bez konieczności wyznaczania macierzy odwrotnej P^{-1}.

Twierdzenie 6.25. *Załóżmy, że macierz $A \in M(\mathbb{R})$ jest niediagonalizowalna. Definiujemy zbiór $\{x^1, ..., x^n\}$ w następujący sposób:*

1. jeżeli $J_{\lambda,k}$ jest rzeczywistą klatką Jordana stopnia k macierzy A, to w skład zbioru $\{x^1, ..., x^n\}$ włączamy k funkcji

$$\begin{aligned} &e^{\lambda t}v^1, \\ &e^{\lambda t}\Big(v^2 + tv^1\Big), \\ &\cdots \\ &e^{\lambda t}\Big(v^k + tv^{k-1} + ... + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}v^1\Big), \end{aligned}$$

gdzie $v^1, ..., v^k$ są liniowo niezależnymi wektorami głównymi kolejno rzędu $1, 2, ..., k$ odpowiadającymi parze własnej (λ, w), $v^1 = w$, tzn. że

$$(A - \lambda I)v^{i+1} = v^i, \quad i = 1, ..., k-1;$$

2. jeżeli $J_{\lambda,k}$, $J_{\overline{\lambda},k}$, $\lambda = \alpha + \beta i$, $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i \in \mathbb{C}$ $(\beta \neq 0)$, są zespolonymi klatkami Jordana stopnia k macierzy A, to w skład zbioru $\{x^1, ..., x^n\}$ włączamy $2k$ funkcji

$$\begin{aligned} &Re\Big(e^{\lambda t}v^1\Big), \\ &Re\Big(e^{\lambda t}\Big(v^2 + tv^1\Big)\Big), \\ &\cdots \\ &Re\Big(e^{\lambda t}\Big(v^k + tv^{k-1} + ... + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}v^1\Big)\Big), \\ \\ &Im\Big(e^{\lambda t}v^1\Big), \\ &Im\Big(e^{\lambda t}\Big(v^2 + tv^1\Big)\Big), \\ &\cdots \\ &Im\Big(e^{\lambda t}\Big(v^k + tv^{k-1} + ... + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}v^1\Big)\Big), \end{aligned}$$

gdzie $v^1, ..., v^k$ definiujemy tak jak w punkcie 1. dla pary własnej (λ, w).

Wówczas macierz $X = [x_i^k]_{i,k=1}^n$ jest macierzą fundamentalną ULJ

$$x' = Ax \tag{6.63}$$

Dowód. Twierdzenie to dowodzi się analogicznie jak twierdzenie 6.23.

Przykład 6.12. Rozwiązać układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z \\ y' = 10x - 5y + 7z \\ z' = 4x - 2y + 2z \end{cases} . \tag{6.64}$$

Macierz tego układu ma postać

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

W przykładzie 6.6 obliczyliśmy dwa pierwiastki równania charakterystycznego:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1$$

o krotnościach algebraicznych $k_a(0) = 2$ i $k_a(-1) = 1$. Zatem krotność geometryczna $k_g(-1) = 1$. Krotność geometryczna $k_g(0) = 1$, bo

$$rz(A - 0I) = rz \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} = rz \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 2. \tag{6.65}$$

Obliczamy wektor własny (wektor główny rzędu 1) odpowiadający λ_1, rozwiązując układ równań

$$(A - 0I)w^1 = 0,$$

który można zapisać w formie

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^1 \\ w_2^1 \\ w_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Mamy $w^1 = (1, 2, 0)^T$. Kładziemy $v^1 := w^1$ i obliczamy wektor główny rzędu 2 odpowiadający λ_1, rozwiązując układ równań

$$(A - 0I)v^2 = v^1,$$

tj. uklad

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \\ v_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Otrzymujemy $v^2 = (0, 1, 1)^T$. Znajdujemy jeszcze wektor własny odpowiadający λ_2, rozwiązując układ równań

$$(A + 1I)w^2 = 0,$$

czyli

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 10 & -4 & 7 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^2 \\ w_2^2 \\ w_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A stąd $w^2 = (-1, 1, 2)^T$. Wypisujemy macierz fundamentalną

$$X(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & -e^{-t} \\ 2 & 1 + 2t & e^{-t} \\ 0 & 1 & 2e^{-t} \end{bmatrix},$$

w której kolumnami są liniowo niezależne rozwiązania (6.64)

$$x^1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x^2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x^3(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie ogólne układu równań różniczkowych (6.64) dane jest wzorem

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t & -e^{-t} \\ 2 & 1+2t & e^{-t} \\ 0 & 1 & 2e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 + tC_2 - e^{-t}C_3 \\ 2C_1 + (1+2t)C_2 + e^{-t}C_3 \\ C_2 + 2e^{-t}C_3 \end{bmatrix}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

(porównaj przykład 6.6).

Warto podkreślić, że wprawdzie w twierdzeniach 6.23 i 6.25 można było wyznaczyć układ fundamentalny ULJ bez obliczania macierzy odwrotnej P^{-1}, ale chcąc rozwiązać ULN i tak trzeba obliczyć macierz odwrotną $X^{-1}(t)$. A to jest zdecydowanie prostsze, wręcz natychmiastowe dla układu fundamentalnego e^{tA}, który znajdziemy metodą wielomianu minimalnego (zobacz przykład 6.8), czy też nawet metodą Putzera.

6.3 Zadania

1. Rozwiązać jednorodne układy liniowych równań różniczkowych:

   1.1. $x' = -4x - y, \quad y' = 5x + 2y,$

   1.2. $x' = x + 2y, \quad y' = -x + 3y,$

   1.3. $x' = x - 2y + 2z, \quad y' = -2x + y + 2z, \quad z' = 2x + 2y + z,$

   1.4. $x' = 4x - z, \quad y' = x + y, \quad z' = 3x - y + z,$

   1.5. $x' = -x + y, \quad y' = -y + z - u, \quad z' = -z + 3u, \quad u' = 2u,$

   1.6. $x' = x, \quad y' = x + y, \quad z' = x + y + z, \quad u' = 3u + v, \quad v' = -4u - v.$

2. Rozwiązać niejednorodne układy liniowych równań różniczkowych:

   2.1. $x' = x - y + e^{2t}\sin t, \quad y' = x + y + e^{2t}\cos t,$

   2.2. $x' = x + 3y, \quad y' = x - y + 8\sin 2t,$

   2.3. $x' = x + z, \quad y' = x + 2y + e^{2t}, \quad z' = -x + 3z,$

   2.4. $x' = -2x + 2y - 3z + e^{-3t}, \quad y' = 2x + y - 6z, \quad z' = -x - 2y.$

3. Rozwiązać problemy początkowe:

   3.1. ... ,

   3.2. $x' = 2x + y - z, \quad y' = -3x - y + z + t, \quad z' = 9x + 3y - 4z,$
   $x(0) = 0, \quad y(0) = 3, \quad z(0) = 1.$

Rozdział 7

Stabilność rozwiązań układów równań różniczkowych

Niech U będzie zbiorem otwartym i niech funkcja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^n$ będzie dana. Rozważmy układ równań

$$x' = f(t, x) \tag{7.1}$$

i niech $\varphi : (a, \infty) \to \mathbb{R}^n$ będzie ustalonym rozwiązaniem tego układu.

Definicja 7.1. Mówimy, że rozwiązanie φ układu (7.1) jest stabilne w sensie Lapunowa, gdy

$$\forall t_0 \in (a, \infty)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x - \text{rozwiązanie (7.1)}$$
$$\|x(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta \Longrightarrow \|x(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon,\ t \geqslant t_0.$$

Definicja 7.2. Mówimy, że rozwiązanie φ układu (7.1) jest asymptotycznie stabilne w sensie Lapunowa, gdy jest stabilne w sensie Lapunowa oraz

$$\forall t_0 \in (a, \infty)\ \exists \delta > 0\ \forall x - \text{rozwiązanie (7.1)}$$
$$\|x(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} \|x(t) - \varphi(t)\| = 0.$$

Przykład 7.1. Rozwiązanie $\varphi(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$ równania

$$x' = 2t \tag{7.2}$$

jest stabilne. Wystarczy dla ustalonego $t_0 \in \mathbb{R}$ i zadanego $\varepsilon > 0$ przyjąć $\delta = \varepsilon$, ponieważ dla każdego rozwiązania $x(t) = t^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$, $t \geqslant t_0$ mamy równość

$$|x(t) - \varphi(t)| = |C| = |x(t_0) - \varphi(t_0)|.$$

Zauważmy, że rozwiązanie φ nie jest asymptotycznie stabilne.

Przykład 7.2. Rozwiązanie $\varphi(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$ równania

$$x' = -x \tag{7.3}$$

jest asymptotycznie stabilne. Zwróćmy uwagę, że $x(t) = Ce^{-t}$, $C \in \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem ogólnym tego równania. Aby wykazać stabilność φ, rozumujemy analogicznie jak w przykładzie 7.1 z $\delta = \varepsilon$, dzięki nierówności

$$|x(t) - \varphi(t)| = |C|e^{-t} \leqslant |C|e^{-t_0} = |x(t_0) - \varphi(t_0)|, \quad t \geqslant t_0.$$

Asymptotyczna stabilność φ wynika z równości

$$\lim_{t\to\infty} |x(t) - \varphi(t)| = \lim_{t\to\infty} |C|e^{-t} = 0.$$

Przykład 7.3. Rozwiązanie $\varphi(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$ równania

$$x' = x \tag{7.4}$$

jest niestabilne. Jest to konsekwencją postaci rozwiązania ogólnego tego równania $x(t) = Ce^t$, $C \in \mathbb{R}$ i nierówności

$$|x(t) - \varphi(t)| = |C|e^t \geqslant |C|e^{t_0} = |x(t_0) - \varphi(t_0)|, \quad t \geqslant t_0.$$

Uwaga 7.1. Jeżeli funkcja f jest ciągła i jest lipschitzowska względem zmiennej x, to wystarczy zbadać stabilność lub asymptotyczną stabilność tylko dla jakiejś jednej chwili $t_0 \in (a, \infty)$.

W dalszej części będziemy zakładać, że $t \in I_a = (a, \infty)$.

Definicja 7.3. Układ (7.1) jest stabilny (asymptotycznie stabilny), gdy każde jego rozwiązanie jest stabilne (asymptotycznie stabilne).

Niech $x : (a, \infty) \to \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym rozwiązaniem układu (7.1). Dokonajmy zamiany zmiennych

$$y(t) = x(t) - \varphi(t).$$

Różniczkując to podstawienie, mamy

$$y'(t) = x'(t) - \varphi'(t) = f(t, x(t)) - \varphi'(t) = f(t, y(t) + \varphi(t)) - \varphi'(t).$$

Widzimy, że φ jest rozwiązaniem układu (7.1) wtedy i tylko wtedy, gdy $\psi = 0$ jest rozwiązaniem układu

$$y' = f(t, y + \varphi(t)) - \varphi'(t). \tag{7.5}$$

W związku z tym prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7.1. *Rozwiązanie φ układu (7.1) jest stabilne (asymptotycznie stabilne) wtedy i tylko wtedy, gdy rozwiązanie $\psi = 0$ układu (7.5) jest stabilne (asymptotycznie stabilne).*

Dowód. Zauważmy najpierw, że każde rozwiązanie x układu (7.1) generuje rozwiązanie y układu (7.5) i na odwrót. Ponadto następujace implikacje są równoważne:

$$\|x(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta \Longrightarrow \|x(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon,\ t \geqslant t_0,$$

$$\|y(t_0) - 0\| < \delta \Longrightarrow \|y(t) - 0\| < \varepsilon,\ t \geqslant t_0.$$

Implikacje:

$$\|x(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} \|x(t) - \varphi(t)\| = 0,$$

$$\|y(t_0) - 0\| < \delta \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} \|y(t) - 0\| = 0,$$

też są równoważne, co kończy dowód.

W konsekwencji możemy sformułować odpowiednie twierdzenie dotyczące układów liniowych

$$x' = A(t)x + b(t), \tag{7.6}$$

gdzie $A(t) \in M^n(\mathbb{R})$, $t \in I_a$, $b : I_a \to \mathbb{R}^n$ są dane.

Twierdzenie 7.2. *Stabilność (asymptotyczna stabilność) układu (7.6) jest równoważna stabilności (asymptotycznej stabilności) rozwiązania zerowego układu skojarzonego*

$$x' = A(t)x. \tag{7.7}$$

Dowód. Ustalmy dowolne rozwiązanie $\varphi : I_a \to \mathbb{R}^n$ układu (7.6). Zdefiniujmy funkcję $f : I_a \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ określoną wzorem

$$f(t,x) = A(t)x + b(t), \quad (t,x) \in I_a \times \mathbb{R}^n.$$

Równanie (7.5) dla równania (7.6) będzie mieć postać (7.7). Rzeczywiście

$$y' = f(t, y + \varphi(t)) - \varphi'(t) = A(t)(y + \varphi(t)) + b(t) - \Big(A(t)\varphi(t) + b(t)\Big) = A(t)y. \tag{7.8}$$

Uwzględniając twierdzenie 7.1, dowód jest zakończony.

Wniosek 7.1. Wszystkie rozwiązania układu liniowego (7.6) są stabilne (asymptotycznie stabilne), albo żadne jego rozwiązanie nie jest stabilne (asymptotycznie stabilne).

Poniżej sformułujemy dwa lematy dotyczące stabilności układu jednorodnego (7.7), których dowody opierają się na analizie rozwiązania zerowego. Szczegóły można znaleźć w [B.P. Demidowicz, Matematyczna teoria stabilności, str. 93–96].

Lemat 7.1. *Niech $A \in C(I_a, M^n(\mathbb{R}))$. Układ (7.7) jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy każde jego rozwiązanie $x(t)$, $t \in [t_0, \infty)$, $t_0 \in I_a$ jest ograniczone na półosi $[t_0, \infty)$.*

Lemat 7.2. *Niech $A \in C(I_a, M^n(\mathbb{R}))$. Układ (7.7) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego rozwiązania $x(t)$ zmierzają do zera dla $t \to \infty$, tzn.*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

7.1 Stabilność układów liniowych o stałych współczynnikach

W tym rozdziale będziemy badać stabilność i asymptotyczną stabilność ULJ

$$x' = Ax, \tag{7.9}$$

gdzie $A \in M^n(\mathbb{R})$ jest macierzą o stałych współczynnikach.

Twierdzenie 7.3 (Lapunow)**.** .

1. $\forall \lambda \in \sigma(A)\ Re(\lambda) < 0 \iff$ *układ (7.9) jest asymptotycznie stabilny.*
2. $\Big[\Big(\forall \lambda \in \sigma(A)\ Re(\lambda) \leqslant 0\Big) \wedge \Big(\forall \lambda \in \sigma(A)\ Re(\lambda) = 0 \Longrightarrow k_g(\lambda) = k_a(\lambda)\Big)\Big] \iff$ *układ (7.9) jest stabilny.*
3. $\exists \lambda \in \sigma(A)\ Re(\lambda) > 0 \Longrightarrow$ *układ (7.9) jest niestabilny.*

Dowód. ...

Przykład 7.4. Wykazać, że liniowy układ równań

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \tag{7.10}$$

jest stabilny i nie jest asymptotycznie stabilny, zaś liniowy układ równań

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = 0 \end{cases} \tag{7.11}$$

jest niestabilny.

Fakt stabilności i braku asymptotycznej stabilności układu (7.10) można natychmiast wydedukować z postaci jego rozwiązania ogólnego

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

A jak uzyskać taką informację z twierdzenia Lapunowa? Otóż dla macierzy tego układu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mamy

$$\Delta(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 = 0,$$

$$\sigma(A) = \{0\}, \quad k_a(0) = 2.$$

Ponieważ rząd macierzy $A - 0I$ jest równy zeru, więc wymiar podprzestrzeni własnej odpowiadającej wartości własnej $\lambda_0 = 0$ jest równy dwa, czyli $k_g(0) = 2 = k_a(0)$. Odpowiedzią na nasze pytanie jest punkt 2. z twierdzenia Lapunowa.

Z kolei rozwiązanie ogólne układu (7.11) dane jest wzorem

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 t + C_2 \\ C_1 \end{bmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

A stąd układ ten jest niestabilny. Znowu chcemy zastosować twierdzenie Lapunowa. Teraz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

oraz

$$\Delta(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 = 0,$$

$$\sigma(A) = \{0\}, \quad k_a(0) = 2.$$

Rząd macierzy $A - 0I$ jest równy jeden, więc wymiar podprzestrzeni własnej odpowiadającej wartości własnej $\lambda_0 = 0$ też jest równy jeden, czyli $k_g(0) = 1 \neq k_a(0)$. Brak stabilności jest konsekwencją punktu 2. z twierdzenia Lapunowa.

7.2 Stabilność stacjonarnych rozwiązań nieliniowych układów autonomicznych

W tym rozdziale zajmiemy się stabilnością i asymptotyczną stabilnością rozwiązań stacjonarnych nieliniowych układów autonomicznych

$$x' = f(x), \tag{7.12}$$

gdzie $f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^n$ jest daną funkcją, U jest zbiorem otwartym. Fizycznie rozwiązania stacjonarne odpowiadają stanom równowagi zjawiska, którego modelem jest układ (7.12).

Definicja 7.4. Punkt $x_0 \in U$ taki, że $f(x_0) = 0$ nazywamy punktem stacjonarnym (albo krytycznym) układu (7.12). Funkcję stałą $x(t) = x_0$ nazywamy wtedy rozwiązaniem stacjonarnym układu (7.12).

Niech $f \in C^1(U)$ i $f(x_0) = 0$ dla pewnego $x_0 \in U$. Rozwińmy funkcję f według wzoru Taylora z resztą Peano o środku w punkcie x_0:

$$f(x) = f(x_0) + d_{x_0}f(x - x_0) + o(\|x - x_0\|).$$

Układ (7.12) możemy zapisać w postaci równoważnej, tzw. postaci zlinearyzowanej

$$x' = d_{x_0}f(x - x_0) + o(\|x - x_0\|).$$

A teraz przybliżmy ten układ układem liniowym

$$x' = d_{x_0}f(x - x_0),$$

lub równoważnie układem liniowym

$$(x - x_0)' = d_{x_0}f(x - x_0).$$

Rozważmy funkcję

$$x(t) = x_0 + x_\varepsilon(t),$$

którą można interpretować jako zaburzenie rozwiązania stacjonarnego $x(t) = x_0$ układu (7.12). Po wstawieniu tej funkcji do powyższego układu liniowego otrzymujemy układ liniowy na zaburzenie $x_\varepsilon(t)$

$$x_\varepsilon' = d_{x_0}f(x_\varepsilon).$$

Zauważmy, że macierzą współczynników tego układu jest macierz Jakobiego funkcji f w punkcie x_0

$$J(x_0) = d_{x_0}f.$$

Prawdziwe jest następujące twierdzenie o topologicznej równoważności układu (7.12) w otoczeniu punktu x_0 z układem liniowym

$$x_\varepsilon' = J(x_0)x_\varepsilon, \tag{7.13}$$

w szczególności w otoczeniu zera (tj. dla małych zaburzeń x_ε), o ile wszystkie wartości własne macierzy Jakobiego $J(x_0)$ funkcji f w punkcie x_0 mają części rzeczywiste ujemne lub istnieje wartość własna tej macierzy o części rzeczywistej dodatniej.

Twierdzenie 7.4 (Grobman-Hartman). *Niech $f \in C^1(U)$ i $f(x_0) = 0$, $x_0 \in U$.*

1. $\forall \lambda \in \sigma(J(x_0))$ $Re(\lambda) < 0 \Longrightarrow$ *rozwiązanie $x(t) = x_0$ układu (7.12) jest asymptotycznie stabilne.*

2. $\exists \lambda \in \sigma(J(x_0))$ $Re(\lambda) > 0 \Longrightarrow$ *rozwiązanie $x(t) = x_0$ układu (7.12) jest niestabilne.*

Przykład 7.5. Zbadać stabilność i asymptotyczną stabilność rozwiązań stacjonarnych układu równań

$$\begin{cases} x' = 1 - xy \\ y' = x - y^3 \end{cases}. \tag{7.14}$$

Punkty stacjonarne $(1, 1)$, $(-1, -1)$ układu (7.14) znajdujemy, rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} 1 - xy = 0 \\ x - y^3 = 0 \end{cases}.$$

Macierz Jakobiego prawej strony układu (7.14) w dowolnym punkcie (x, y) ma postać

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} -y & -x \\ 1 & -3y^2 \end{bmatrix}.$$

W przypadku $(x_0, y_0) = (1, 1)$ obliczamy

$$J(1,1) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},$$

$$\Delta(\lambda) = |J(1,1) - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2 = 0.$$

Ponieważ wartością własną macierzy $J(1,1)$ jest $\lambda_0 = -2$, więc rozwiązanie stacjonarne $(x(t), y(t)) = (1, 1)$ jest asymptotycznie stabilne.

W przypadku $(x_0, y_0) = (1, 1)$ mamy

$$J(-1,-1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},$$

$$\Delta(\lambda) = |J(-1,-1) - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 4 = 0.$$

Tym razem rozwiązanie stacjonarne $(x(t), y(t)) = (-1, -1)$ jest niestabilne, bo wartościami własnymi macierzy $J(-1,-1)$ są liczby $\lambda_1 = -1 - \sqrt{5}$ i $\lambda_2 = -1 + \sqrt{5}$.

Przykład 7.6. Zbadać stabilność i asymptotyczną stabilność rozwiązań stacjonarnych układu Volterry-Lotki

$$\begin{cases} x' = (by - a)x \\ y' = (c - dx)y \end{cases}, \tag{7.15}$$

gdzie $a, b, c, d > 0$ są pewnymi parametrami. Układ ten opisuje współistnienie dwóch gatunków zwierząt typu drapieżnik-ofiara. Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} (by - a)x = 0 \\ (c - dx)y = 0 \end{cases},$$

otrzymujemy punkty stacjonarne $(0, 0)$, $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ układu (7.15). Znajdujemy macierz Jakobiego

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} by - a & bx \\ -dy & c - dx \end{bmatrix}$$

prawej strony układu (7.15) w dowolnym punkcie (x, y).

Jeśli $(x_0, y_0) = (0, 0)$, to

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix},$$

$$\Delta(\lambda) = |J(0,0) - \lambda I| = \begin{vmatrix} -a-\lambda & 0 \\ 0 & c-\lambda \end{vmatrix} = -(a+\lambda)(c-\lambda) = 0.$$

Wartościami własnymi macierzy $J(0,0)$ są liczby $\lambda_1 = -a$, $\lambda_2 = c$, a zatem rozwiązanie stacjonarne $(x(t), y(t)) = (0, 0)$ jest niestabilne.

Jeśli $(x_0, y_0) = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$, to

$$J\Big(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\Big) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{bc}{d} \\ -\frac{ad}{b} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta(\lambda) = \Big|J\Big(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\Big) - \lambda I\Big| = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{bc}{d} \\ -\frac{ad}{b} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + ac = 0.$$

Wartościami własnymi macierzy $J\Big(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\Big)$ są liczby czysto urojone $\lambda_1 = -\sqrt{ac}\, i$, $\lambda_2 = \sqrt{ac}\, i$ i twierdzenie Grobmana-Hartmana niestety nie rozstrzyga kwestii stabilności rozwiązania stacjonarnego $(x(t), y(t)) = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$. Z punktu widzenia zastosowań właśnie to rozwiązanie jest interesujące.

Okazuje się, że w badaniu stabilności rozwiązań stacjonarnych wielu układów równań różniczkowych oprócz techniki linearyzacji pomocna jest teoria funkcji Lapunowa. Są to funkcje dodatnio określone, które odpowiednio się zachowują na wszystkich rozwiązaniach układu (7.12). Mankamentem tej metody jest fakt, że takie funkcje po prostu trzeba znaleźć, co często jest dość trudne. Nie ma ogólnej metody wyznaczania funkcji Lapunowa.

Sformułujemy teraz definicje trzech różnych funkcji Lapunowa i twierdzenia dotyczące ich związków ze stabilnością w wersji możliwie ogólnej i sugestywnej, a jednocześnie praktycznej.

Definicja 7.5. Funkcją Lapunowa pierwszego rodzaju dla układu (7.12) i punktu stacjonarnego $x_0 \in U$ w otwartym otoczeniu $U(x_0) \subset U$ nazywamy funkcję $V : U(x_0) \to \mathbb{R}$ klasy C^1 o własnościach:

1. $V(x_0) = 0, \quad V(x) > 0$ dla $x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$,
2. $\frac{d}{dt}V(\varphi(t)) \leqslant 0$ dla dowolnego rozwiązania φ układu (7.12).

Definicja 7.6. Funkcją Lapunowa drugiego rodzaju dla układu (7.12) i punktu stacjonarnego $x_0 \in U$ w otwartym otoczeniu $U(x_0) \subset U$ nazywamy funkcję $V : U(x_0) \to \mathbb{R}$ klasy C^1 o własnościach:

1. $V(x_0) = 0, \quad V(x) > 0$ dla $x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$,
2. $\frac{d}{dt}V(\varphi(t)) < 0$ dla dowolnego rozwiązania $\varphi(t) \not\equiv x_0$ układu (7.12).

Definicja 7.7. Funkcją Lapunowa trzeciego rodzaju dla układu (7.12) i punktu stacjonarnego $x_0 \in U$ w otwartym otoczeniu $U(x_0) \subset U$ nazywamy funkcję $V : U(x_0) \to \mathbb{R}$ klasy C^1 o własnościach:

1. $V(x_0) = 0$ oraz istnieje ciąg (x_m) elementów zbioru $U(x_0)\setminus\{x_0\}$ zbieżny do x_0 i $V(x_m) > 0$, $m \in \mathbb{N}$,
2. $\frac{d}{dt}V(\varphi(t)) > 0$ dla dowolnego rozwiązania $\varphi(t) \not\equiv x_0$ układu (7.12).

Oznaczmy symbolem $\langle\ ,\ \rangle$ iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$.

Uwaga 7.2. Jeśli:

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leqslant 0 \quad \text{dla} \quad x \in U(x_0),$$

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0 \quad \text{dla} \quad x \in U(x_0) \setminus \{x_0\},$$

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle > 0 \quad \text{dla} \quad x \in U(x_0) \setminus \{x_0\},$$

to zachodzi własność 2. odpowiednio w definicjach 7.5, 7.6 i 7.7. Wystarczy zauważyć, że dla V, $f = (f_1, ..., f_n)$ i $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ prawdziwe są tożsamości

$$\frac{d}{dt}V(\varphi(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\big(\varphi(t)\big)\frac{d\varphi_i(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\big(\varphi(t)\big)f_i(\varphi(t)) = \langle \nabla V(\varphi(t)), f(\varphi(t)) \rangle.$$

Wspomnianą własność możemy więc sprawdzać bez znajomości rozwiązań układu (7.12).

Twierdzenie 7.5 (pierwsze twierdzenie Lapunowa)**.** *Załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^n$ jest ciągła. Jeśli istnieje funkcja Lapunowa pierwszego rodzaju dla układu (7.12) i punktu stacjonarnego $x_0 \in U$ w otwartym otoczeniu $U(x_0) \subset U$, to rozwiązanie stacjonarne $x(t) = x_0$ jest stabilne.*

Dowód. Niech $t_0 \in (a, \infty)$ będzie dowolnie ustalone. Bez straty ogólności w rozumowaniu, rozważmy $\varepsilon > 0$ odpowiednio małe, tj. takie że kula otwarta $B(x_0, \varepsilon)$ zawiera się wraz ze swym brzegiem $\partial B(x_0, \varepsilon)$ (sferą) w otoczeniu $U(x_0)$. Ponieważ zbiór $\partial B(x_0, \varepsilon)$ jest zwarty, a funkcja Lapunowa pierwszego rodzaju jest na nim ciągła i dodatnia, więc na mocy twierdzenia Weierstrassa

$$0 < \alpha = \min \{V(x) : \ x \in \partial B(x_0, \varepsilon)\}.$$

Dobierzmy $0 < \delta \leqslant \varepsilon$ tak, aby

$$V(x) < \alpha \quad \text{dla} \quad x \in B(x_0, \delta).$$

Rozpatrzmy dowolne rozwiązanie x układu (7.12) niebędące tożsamościowo równe x_0, które spełnia warunek

$$\|x(t_0) - x_0\| < \delta. \tag{7.16}$$

Udowodnimy, że rozwiązanie to jest przedłużalne w prawo na przedział $[t_0, \infty)$, a jego wartości $x(t)$ pozostają w kuli $B(x_0, \varepsilon)$, tzn. że

$$\|x(t) - x_0\| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad t \geqslant t_0. \tag{7.17}$$

Rzeczywiście, dla $t = t_0$ mamy

$$\|x(t_0) - x_0\| < \delta \leqslant \varepsilon.$$

Dalej zauważmy, że funkcja f jest ciągła i ograniczona na kuli otwartej $B(x_0, \varepsilon)$, gdyż ma takie własności na kuli domkniętej $\overline{B}(x_0, \varepsilon)$. Według twierdzenia 3.14 rozwiązanie x osiąga brzeg $\partial B(x_0, \varepsilon)$ albo jest przedłużalne w prawo na przedział $[t_0, \infty)$. Przypuśćmy, że x osiąga brzeg $\partial B(x_0, \varepsilon)$ i niech

$$t_0 < t_* = \min \{t > t_0 : \ x(t) \in \partial B(x_0, \varepsilon)\}$$

będzie pierwszym punktem wartości rozwiązania $x(t)$ leżącym na tym brzegu. Zbadamy zachowanie się funkcji

$$v(t) = V(x(t)), \quad t \in [t_0, t_*]$$

wzdłuż rozwiązania x. Obliczamy

$$\begin{aligned} v(t_0) &= V(x(t_0)) < \alpha, \\ v(t_*) &= V(x(t_*)) \geqslant \alpha, \end{aligned}$$

bo $x(t_0) \in B(x_0, \delta)$ i $x(t_*) \in \partial B(x_0, \varepsilon)$. Ponieważ na mocy założenia twierdzenia

$$v'(t) = \frac{d}{dt} V(x(t)) \leqslant 0, \quad t \in [t_0, t_*],$$

więc funkcja v jest nierosnąca. Zatem

$$\alpha \leqslant v(t_*) \leqslant v(t_0) < \alpha,$$

co jest niemożliwe. A stąd rozwiązanie x jest przedłużalne na przedział $[t_0, \infty)$ i spełnia nierówność (7.17). Twierdzenie zostało udowodnione.

Twierdzenie 7.6 (drugie twierdzenie Lapunowa)**.** *Załóżmy, że funkcja* $f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^n$ *spełnia lokalny warunek Lipschitza. Jeśli istnieje funkcja Lapunowa drugiego rodzaju dla układu (7.12) i punktu stacjonarnego* $x_0 \in U$ *w otwartym otoczeniu* $U(x_0) \subset U$ *oraz dodatkowo*

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0 \quad \textit{dla} \quad x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}, \tag{7.18}$$

to rozwiązanie stacjonarne $x(t) = x_0$ *jest asymptotycznie stabilne.*

Dowód. Ponieważ założenia twierdzenia 7.6 są mocniejsze niż założenia twierdzenia 7.5, więc rozwiązanie $x(t) = x_0$ układu (7.12) jest stabilne.

Zadajmy dowolne $t_0 \in (a, \infty)$ i $\varepsilon > 0$ takie, że kula otwarta $B(x_0, \varepsilon)$ zawiera się wraz ze swym brzegiem $\partial B(x_0, \varepsilon)$ w otoczeniu $U(x_0)$. Zgodnie z definicją stabilności istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego rozwiązania x układu (7.12) jeśli $\|x(t_0) - x_0\| < \delta$, to $\|x(t) - x_0\| < \varepsilon$ dla $t \geqslant t_0$. Dobierzmy taką $\delta > 0$ i ustalmy dowolne rozwiązanie $x(t) \not\equiv x_0$ układu (7.12) o własności

$$\|x(t_0) - x_0\| < \delta. \tag{7.19}$$

Udowodnimy, że

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t) - x_0\| = 0. \tag{7.20}$$

Rozpatrzmy funkcję

$$v(t) = V(x(t)), \quad t \in [t_0, \infty)$$

i prześledźmy jej zachowanie wzdłuż rozwiązania x. Uwzględniając założenia twierdzenia,

$$v'(t) = \frac{d}{dt} V(x(t)) < 0, \quad t \in [t_0, \infty),$$

więc funkcja v jest malejąca, a będąc ograniczoną z dołu przez funkcję zerową, ma skończoną granicę

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \alpha \geqslant 0. \tag{7.21}$$

Wykażemy, że liczba α nie może być dodatnia. Istotnie przypuśćmy, że $\alpha > 0$. Wówczas istnieje $0 < \beta \leqslant \varepsilon$ taka, że nasze rozwiązanie $x(t) \not\equiv x_0$ spełnia nierówność

$$\|x(t) - x_0\| \geqslant \beta, \quad t \in [t_0, \infty). \tag{7.22}$$

W przeciwnym razie dla dowolnej $0 < \beta \leqslant \varepsilon$ istnieje $t \in [t_0, \infty)$ o własności

$$\|x(t) - x_0\| < \beta.$$

Niech $\beta = \frac{1}{n}$, $t = t_n$ dla $n \in \mathbb{N}$ tak dużych, że $\frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$. Wobec tego

$$\lim_{n\to\infty} x(t_n) = x_0.$$

Jeśli ciąg (t_n) jest ograniczony, to istnieje podciąg (t_{n_k}) zbieżny do granicy właściwej $t_* \in [t_0, \infty)$ i z ciągłości rozwiązania x mamy

$$x_0 = \lim_{k\to\infty} x(t_{n_k}) = x(t_*).$$

Stąd na mocy twierdzenia 3.6 o jednoznaczności rozwiązań otrzymujemy, że $x(t) \equiv x_0$, co jest sprzeczne z założeniem, że $x(t) \not\equiv x_0$. Zatem ciąg (t_n) jest nieograniczony, co pociąga istnienie podciągu (t_{n_k}) rozbieżnego do ∞. Ale to przy $\alpha > 0$ jest sprzeczne z (7.22), ponieważ skoro $\alpha = \lim_{t\to\infty} v(t)$, to

$$0 < \alpha = \lim_{k\to\infty} v(t_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} V(x(t_{n_k})) = V(x_0) = 0.$$

Czyli nierówność (7.22) jest prawdziwa, gdy $\alpha > 0$. Korzystając z ciągłości funkcji V, f i iloczynu skalarnego oraz założenia (7.18) i twierdzenia Weierstrassa, możemy zdefiniować liczbę

$$0 < \gamma = \min\left\{-\langle \nabla V(x), f(x)\rangle : \ \beta \leqslant \|x - x_0\| \leqslant \varepsilon\right\}.$$

Wówczas

$$\begin{aligned}
v(t) &= v(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt} V(x(\tau))\, d\tau \\
&= v(t_0) + \int_{t_0}^{t} \langle \nabla V(x(\tau)), x'(\tau) \rangle\, d\tau \\
&= v(t_0) + \int_{t_0}^{t} \langle \nabla V(x(\tau)), f(x(\tau)) \rangle\, d\tau \\
&\leqslant v(t_0) - \int_{t_0}^{t} \gamma\, d\tau \\
&= v(t_0) - \gamma(t - t_0), \quad t \in [t_0, \infty)
\end{aligned}$$

dzięki relacji (7.22). Z powyższej nierówności otrzymujemy, że dla dostatecznie dużego t

$$v(t) = V(x(t)) < 0,$$

co jest sprzeczne z tym, że $V(x) > 0$ dla $x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$. A stąd

$$\alpha = \lim_{t \to \infty} v(t) = 0. \tag{7.23}$$

Uzasadnimy teraz interesujący nas związek (7.20). Nie tracąc ogólności w rozumowaniu, ustalmy $\varepsilon_1 > 0$ takie, że $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon$ i niech

$$0 < l = \min\{V(x) :\ \varepsilon_1 \leqslant \|x - x_0\| \leqslant \varepsilon\}$$

na mocy twierdzenia Weierstrassa. Ze wzoru (7.23) wynika, że istnieje $t_1 \geqslant t_0$ takie, że

$$v(t_1) = V(x(t_1)) < l.$$

Stąd oraz z faktu, że funkcja v jest malejąca, otrzymujemy

$$v(t) < l, \quad t \geqslant t_1.$$

Wykażemy, że

$$\|x(t) - x_0\| < \varepsilon_1, \quad t \geqslant t_1. \tag{7.24}$$

Przypuśćmy, że dla pewnego $t_2 \geqslant t_1$ spełniona jest nierówność przeciwna

$$\|x(t_2) - x_0\| \geqslant \varepsilon_1.$$

Ale wtedy dla

$$v(t_2) = V(x(t_2))$$

mamy

$$l \leqslant v(t_2) < l,$$

a to daje nam sprzeczność. W konsekwencji nierówność (7.24) implikuje wzór (7.20), co kończy dowód twierdzenia.

Twierdzenie 7.7 (trzecie twierdzenie Lapunowa)**.** *Załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^n$ spełnia lokalny warunek Lipschitza. Jeśli istnieje funkcja Lapunowa trzeciego rodzaju dla układu (7.12) i punktu stacjonarnego $x_0 \in U$ w otwartym otoczeniu $U(x_0) \subset U$ oraz dodatkowo*

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle > 0 \quad \text{dla} \quad x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}, \tag{7.25}$$

to rozwiązanie stacjonarne $x(t) = x_0$ jest niestabilne.

Dowód. Trzeba pokazać, że istnieje $t_0 \in (a, \infty)$ i $\varepsilon > 0$ takie, że dla dowolnej $\delta > 0$ istnieje rozwiązanie x układu (7.12) o własnościach $\|x(t_0) - x_0\| < \delta$ i $\|x(t_1) - x_0\| \geqslant \varepsilon$ dla pewnego $t_1 > t_0$. Pokażemy nawet trochę więcej. Zadajmy dowolne $t_0 \in (a, \infty)$ i $\varepsilon > 0$ takie, że kula otwarta $B(x_0, \varepsilon)$ zawiera się wraz ze swym brzegiem $\partial B(x_0, \varepsilon)$ w otoczeniu $U(x_0)$. Funkcja V jest ograniczona na $\overline{B}(x_0, \varepsilon)$, gdyż jest ciągła:

$$\|V(x)\| \leqslant M \tag{7.26}$$

dla $\|x - x_0\| \leqslant \varepsilon$, gdzie M jest pewną liczbą dodatnią. Załóżmy, że $0 < \delta \leqslant \varepsilon$ (dobierana do ε) jest dowolnie mała. Na mocy założenia twierdzenia istnieje $m \in \mathbb{N}$ i punkt $x_m \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ oraz

$$V(x_m) = \alpha > 0.$$

Przyjmijmy

$$v(t) = V(x(t)), \quad t \in I,$$

gdzie x jest rozwiązaniem układu (7.12) z warunkiem początkowym $x(t_0) = x_m$ na pewnym przedziale $I = [t_0, \tilde{t})$. Oczywiście

$$\|x(t_0) - x_0\| < \delta, \tag{7.27}$$

a także $x(t) \not\equiv x_0$. Ponieważ funkcja v jest rosnąca, więc

$$v(t) = V(x(t)) > V(x(t_0)) = \alpha > 0, \quad t \in I.$$

Udowodnimy, że istnieje $t_1 > t_0$ takie, że

$$\|x(t_1) - x_0\| \geqslant \varepsilon. \tag{7.28}$$

Przypuśćmy, że tak nie jest, tzn.

$$\|x(t) - x_0\| < \varepsilon, \quad t \in I.$$

Zauważmy, że istnieje $\varepsilon_1 > \varepsilon$ takie, że $\overline{B}(x_0, \varepsilon) \subset \overline{B}(x_0, \varepsilon_1) \subset U(x_0)$. Funkcja f jest ciągła na $B(x_0, \varepsilon_1)$ i ograniczona. Uwzględniając ostatnią nierówność, rozwiązanie x układu (7.12) nie osiąga brzegu $\partial B(x_0, \varepsilon_1)$, czyli jest przedłużalne na przedział $[t_0, \infty)$ zgodnie w twierdzeniem 3.14, a jego wartości $x(t)$ pozostają w kuli $B(x_0, \varepsilon)$. Połóżmy $I = [t_0, \infty)$. Funkcja v jest rosnąca i ograniczona od góry, więc ma skończoną granicę

$$\alpha \leqslant \lim_{t\to\infty} v(t) < \infty.$$

Powtarzając rozumowanie z dowodu twierdzenia 7.6, dowodzimy, że istnieje $0 < \beta \leqslant \varepsilon$ taka, że nasze rozwiązanie $x(t) \not\equiv x_0$ spełnia nierówność

$$\|x(t) - x_0\| \geqslant \beta, \quad t \in [t_0, \infty). \tag{7.29}$$

Analogicznie jak we wspomnianym dowodzie, wykorzystując tym razem założenie (7.25), zdefiniujmy liczbę

$$0 < \gamma = \min \left\{ \langle \nabla V(x), f(x) \rangle : \ \beta \leqslant \|x - x_0\| \leqslant \varepsilon \right\}.$$

Obliczamy

$$\begin{aligned}
v(t) &= v(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt} V(x(\tau))\, d\tau \\
&= v(t_0) + \int_{t_0}^{t} \langle \nabla V(x(\tau)), x'(\tau) \rangle\, d\tau \\
&= v(t_0) + \int_{t_0}^{t} \langle \nabla V(x(\tau)), f(x(\tau)) \rangle\, d\tau \\
&\geqslant v(t_0) + \int_{t_0}^{t} \gamma\, d\tau \\
&= v(t_0) + \gamma(t - t_0), \quad t \in [t_0, \infty).
\end{aligned}$$

A to przeczy ograniczoności funkcji v.

Nierówności (7.27) i (7.28) kończą dowód twierdzenia.

Przykład 7.7. Uzasadnić, że rozwiązanie zerowe $x_0(t) = 0$ równania

$$x' = -x^3 \tag{7.30}$$

jest asymptotycznie stabilne. Oczywiście wynika to natychmiast z postaci rozwiązania ogólnego

$$x(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{2t + C}}.$$

Sprawdzenie tego faktu metodą linearyzacji z wykorzystaniem twierdzenia Grobmana-Hartmana nie jest możliwe, bo

$$J(x) = \begin{bmatrix} -3x^2 \end{bmatrix},$$

a więc

$$J(0) = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta(\lambda) = |J(0) - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda = 0$$

i wartością własną macierzy $J(0)$ jest $\lambda_0 = 0$.

Asymptotyczną stabilność rozwiązania zerowego można jednak wykazać metodą Lapunowa, korzystając z twierdzenia 7.6. Połóżmy

$$V(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tak określona funkcja V jest funkcją Lapunowa drugiego rodzaju dla punktu stacjonarnego $x_0 = 0$ i otoczenia $U(0) = \mathbb{R}$. Szybko sprawdzamy, że jest ona klasy C^1, $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ dla $x \in U(0) \setminus \{0\}$ oraz

$$\Big\langle \nabla V(x), -x^3 \Big\rangle = \Big\langle 2x, -x^3 \Big\rangle = -2x^4 < 0 \quad \text{dla} \quad x \in U(0) \setminus \{0\}.$$

Warto dodać, że rozwiązanie zerowe jest stabilne, ale nie jest asymptotycznie stabilne dla równania zlinearyzowanego

$$x' = 0$$

w punkcie $x_0 = 0$. Wynika to wprost z postaci jego rozwiązania ogólnego

$$x(t) = C,$$

jak również z twierdzenia Lapunowa.

Przykład 7.8. Sprawdzić metodą Lapunowa, że rozwiązanie stacjonarne $(x(t), y(t)) = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ układu Volterry-Lotki (7.15) jest stabilne. Przypominamy, że metodą linearyzacji nie byliśmy w stanie tego rozstrzygnąć w przykładzie 7.6. Wykażemy, że

$$V(x, y) = c \ln\frac{c}{d} - c + a \ln\frac{a}{b} - a - (c \ln x - dx + a \ln y - by), \quad x, y \in (0, \infty)$$

jest funkcją Lapunowa pierwszego rodzaju dla naszego punktu stacjonarnego $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$. Połóżmy $U(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}) = (0, \infty) \times (0, \infty)$. Widzimy, że V jest klasy C^1 na $U(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ oraz $V(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}) = 0$. Zdefiniujmy funkcję

$$F(x, y) = c \ln x - dx + a \ln y - by, \quad x, y \in (0, \infty).$$

Na mocy kryterium Sylwestera funcja F ma w punkcie $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ silne maksimum, a ponadto osiąga w tym punkcie wartość największą

$$F\Big(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\Big) = c \ln\frac{c}{d} - c + a \ln\frac{a}{b} - a.$$

A stąd $V(x, y) > 0$ dla $(x, y) \in U(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}) \setminus \{(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})\}$. Obliczamy jeszcze

$$\Big\langle \nabla V(x, y), \Big((by - a)x, (c - dx)y\Big)\Big\rangle = \Big\langle \Big(\frac{c - dx}{x}, \frac{a - by}{y}\Big), \Big((by - a)x, (c - dx)y\Big)\Big\rangle = 0$$

dla $(x, y) \in U\Big(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\Big)$. Twierdzenie 7.5 implikuje stabilność badanego rozwiązania stacjonarnego.

Przykład 7.9. Zbadać stabilność stałych rozwiązań równania Duffinga

$$x'' = x - x^3. \tag{7.31}$$

Równanie to opisuje drgania rdzenia sprężystego podwieszonego w silnym polu magnetycznym. Stałe rozwiązania

$$x_0(t) = 0, \quad x_0(t) = 1, \quad x_0(t) = -1$$

otrzymujemy, przyrównując prawą stronę do zera

$$x - x^3 = 0.$$

Teraz zamieniamy równanie drugiego rzędu (7.31) na układ dwóch równań pierwszego rzędu

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_1 - x_1^3 \end{cases} . \tag{7.32}$$

Jest zrozumiałe, że stabilność stałych rozwiązań x_0 równania (7.31) równoważna jest stabilności rozwiązań stacjonarnych odpowiednio

$$(x_{10}(t), x_{20}(t)) = (0, 0), \quad (x_{10}(t), x_{20}(t)) = (1, 0), \quad (x_{10}(t), x_{20}(t)) = (-1, 0)$$

układu (7.32).

Najpierw spróbujmy zastosować metodę linearyzacji. Obliczamy macierz Jakobiego

$$J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x_1^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jeśli $(x_{10}, x_{20}) = (0, 0)$, to

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta(\lambda) = |J(0, 0) - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0.$$

Skoro wartościami własnymi macierzy $J(0, 0)$ są liczby $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, to rozwiązanie stacjonarne $(x_{10}(t), x_{20}(t)) = (0, 0)$ jest niestabilne na podstawie twierdzenia Grobmana-Hartmana.

Niestety dla punktu $(x_{10}, x_{20}) = (1, 0)$ twierdzenie Grobmana-Hartmana kwestii stabilności nie rozstrzyga, ponieważ

$$J(1, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta(\lambda) = |J(1, 0) - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2 = 0$$

i wartościami własnymi macierzy $J(1, 0)$ są liczby $\lambda_1 = \sqrt{2}\, i$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}\, i$. W przypadku punktu $(x_{10}, x_{20}) = (-1, 0)$ sytuacja jest analogiczna.

Okazuje się, że dla tych dwóch punktów można z sukcesem skorzystać z metody Lapunowa, gdyż funkcja

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{4}(x_1^2 - 1)^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

jest funkcją Lapunowa pierwszego rodzaju dla punktu $(x_{10}, x_{20}) = (1, 0)$ w otoczeniu $U(1, 0) = (0, \infty) \times \mathbb{R}$, a dla punktu $(x_{10}, x_{20}) = (-1, 0)$ w otoczeniu $U(-1, 0) = (-\infty, 0) \times \mathbb{R}$. Skupmy się na analizie dla pierwszego punktu, bo sytuacja z drugim punktem jest podobna. Rzeczywiście V jest klasy C^1 na $U(1, 0)$, $V(1, 0) = 0$, $V(x_1, x_2) > 0$ dla $(x_1, x_2) \in U(1, 0) \setminus \{(1, 0)\}$ oraz

$$\Big\langle \nabla V(x_1, x_2), (x_2, x_1 - x_1^3) \Big\rangle = \Big\langle (x_1^3 - x_1, x_2), (x_2, x_1 - x_1^3) \Big\rangle = 0 \quad \text{dla} \quad (x_1, x_2) \in U(1, 0).$$

Stabilność rozwiązania stacjonarnego $(x_{10}(t), x_{20}(t)) = (1, 0)$ wynika z twierdzenia 7.5.

Przykład 7.10. Wyznaczyć wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, dla których rozwiązanie zerowe równania

$$x'' + ax' + b^2x(x + 1) = 0 \tag{7.33}$$

jest stabilne, asymptotyczne stabilne, niestabilne.

1° Rozważmy najpierw prostszy przypadek, gdy $b = 0$. Wtedy równanie (7.33) jest liniowe i będziemy mogli skorzystać z twierdzenia Lapunowa. Przekształcamy to równanie na liniowy układ równań

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -ax_2 \end{cases}. \tag{7.34}$$

Tak więc należy zbadać stabilność rozwiązania stacjonarnego $(x_{10}(t), x_{20}(t)) = (0, 0)$ tego układu. Macierz układu (7.34) ma postać

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix}$$

oraz

$$\Delta(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -a - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(a + \lambda) = 0,$$

$$\sigma(A) = \{0, -a\}.$$

Na mocy twierdzenia Lapunowa jeśli $a < 0$, to rozwiązanie $(x_{10}(t), x_{20}(t)) = (0, 0)$ jest niestabilne. Jeśli zaś $a > 0$, to jest ono stabilne i nie jest asymptotycznie stabilne, bo $k_a(0) = k_g(0) = 1$. Dla $a = 0$ rozwiązanie to jest niestabilne, ponieważ $k_a(0) = 2$, $k_g(0) = 1$.

2° W przypadku, gdy $b \neq 0$, równanie (7.33) jest nieliniowe. Zamieniamy teraz to równanie na nieliniowy układ równań

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -b^2x_1(x_1 + 1) - ax_2 \end{cases} \tag{7.35}$$

i zbadamy stabilność rozwiązania stacjonarnego $(x_{10}(t), x_{20}(t)) = (0, 0)$ tego układu. Znajdujemy macierz Jakobiego

$$J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2b^2x_1 - b^2 & -a \end{bmatrix}$$

i dalej

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b^2 & -a \end{bmatrix},$$

$$\Delta(\lambda) = |J(0,0) - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -b^2 & -a-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + a\lambda + b^2 = 0.$$

Obliczamy

$$\Delta = a^2 - 4b^2,$$

a więc pierwiastkami równania charakterystycznego są liczby

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}.$$

Zauważmy, że $\sqrt{\Delta} = \sqrt{a^2 - 4b^2}$ jest albo liczbą rzeczywistą, albo czysto urojoną.

Zgodnie z twierdzeniem Grobmana-Hartmana jeśli $a < 0$, to $Re(\lambda_1) > 0$ i badane rozwiązanie stacjonarne jest niestabilne.

Rozpatrzmy sytuację, gdy $a > 0$. Jeśli $\Delta < 0$, to $Re(\lambda_1),\ Re(\lambda_2) < 0$. Dla $\Delta \geqslant 0$ mamy $\lambda_2 < 0$ i sprawdzamy jeszcze, że $\lambda_1 < 0$:

$$-a + \sqrt{a^2 - 4b^2} < 0,$$

$$\sqrt{a^2 - 4b^2} < a,$$

$$a^2 - 4b^2 < a^2,$$

$$-4b^2 < 0.$$

Zatem nasze rozwiązanie stacjonarne jest asymptotycznie stabilne na podstawie twierdzenia Grobmana-Hartmana.

Jeśli $a = 0$, to pierwiastkami równania charakterystycznego są liczby $\pm bi$ i twierdzenie Grobmana-Hartmana nie rozstrzyga o interesującej nas stabilności. Potrafimy jednak w tym przypadku skonstruować funkcję Lapunowa pierwszego rodzaju dla punktu $(x_{10}, x_{20}) = (0,0)$ w otoczeniu $U(0,0) = (-\frac{3}{2}, \infty) \times \mathbb{R}$, która jak wiadomo z twierdzenia 7.5 implikuje stabilność:

$$V(x_1, x_2) = b^2\Big(\frac{1}{3}x_1^3 + \frac{1}{2}x_1^2\Big) + \frac{1}{2}x_2^2.$$

Oczywiście V jest klasy C^1 na $U(0,0)$ oraz $V(0,0) = 0$. Ponadto $V(x_1,x_2) > 0$ dla $(x_1,x_2) \in U(0,0)\backslash\{(0,0)\}$. Zauważmy bowiem, że $b^2(\frac{1}{3}x_1^3 + \frac{1}{2}x_1^2) > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1^2(\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}) > 0$, bo $b^2 > 0$. Jeśli więc $x_1 \neq 0$, $x_1 > -\frac{3}{2}$ i $x_2 \in \mathbb{R}$, to $V(x_1,x_2) > 0$. A dla $x_1 = 0$ i $x_2 \neq 0$ również $V(x_1,x_2) > 0$. Obliczamy jeszcze iloczyn skalarny

$$\Big\langle \nabla V(x_1,x_2), (x_2, -b^2(x_1^2 + x_1)) \Big\rangle = \Big\langle (b^2(x_1^2 + x_1), x_2), (x_2, -b^2(x_1^2 + x_1)) \Big\rangle = 0$$

dla $(x_1,x_2) \in U(0,0)$.

Warto zwrócić uwagę, że dodanie w równaniu członu nieliniowego ($b \neq 0$) poprawiło stabilność, gdy $a \geqslant 0$.

7.3 Przestrzeń fazowa. Klasyfikacja punktów stacjonarnych. Cykle graniczne

Definicja 7.8. Zbiór U zmiennych x nazywamy przestrzenią fazową układu równań (7.12).

Definicja 7.9. Portretem fazowym (obrazem fazowym) układu równań (7.12) nazywamy zbiór krzywych sparametryzowanych

$$\gamma: \ \{x = x[t]\}$$

parametrem t, które tworzą rozwiązania tego układu, w przestrzeni fazowej. Krzywe te nazywa się często trajektoriami fazowymi.

Potocznie portret fazowy układu równań (7.12) jest rzutem wszystkich trajektorii na przestrzeń fazową z uwzględnieniem kierunków.

Rozpatrzmy autonomiczny układ dwóch równań różniczkowych

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}, \tag{7.36}$$

gdzie $a, b, c, d = const \in \mathbb{R}$. Niech

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{7.37}$$

będzie macierzą tego układu, zaś zbiór

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$$

jej widmem. Niech (x_0, y_0) będzie punktem stacjonarnym. Punkt ten można sklasyfikować ze względu na zachowanie się rozwiązań w jego otoczeniu. Klasyfikacji dokonujemy, rozważając wartości własne macierzy A.

1. $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ źródło (węzeł niestabilny).
2. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ zlew (węzeł stabilny).
3. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ siodło.
4. $\lambda_1 = \beta i,\ \lambda_2 = -\beta i,\ \beta \neq 0$ środek (centrum).
5. $\lambda_1 = \alpha + \beta i,\ \lambda_2 = \alpha - \beta i,\ \alpha < 0,\ \beta \neq 0$ ognisko stabilne.
6. $\lambda_1 = \alpha + \beta i,\ \lambda_2 = \alpha - \beta i,\ \alpha > 0,\ \beta \neq 0$ ognisko niestabilne.

Rysunki i ich analiza są na pliku autorstwa V. Vladimirova na mojej stronie internetowej.

Definicja 7.10. Cyklem granicznym układu równań (7.12) nazywamy każde jego rozwiązanie okresowe w przestrzeni fazowej.

Cykle graniczne cechują wyłącznie równania i układy równań nieliniowych. Dla dowolnego układu wielomianowego na płaszczyźnie maksymalna liczba cykli granicznych jest skończona. Druga część szesnastego problemu Hilberta zawiera pytanie o podanie maksymalnej liczby cykli granicznych dla układów wielomianowych na płaszczyźnie jako funkcji stopnia wielomianu. Jak dotąd problem ten jest nierozwiązany nawet w przypadku wielomianów drugiego stopnia.

7.4 Zadania

1. Określić rodzaj stabilności rozwiązania zerowego układów równań $x' = Ax$:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Określić rodzaj stabilności układu równań $x' = Ax + b(t)$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

zaś $b : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}^3$ jest dowolną funkcją.

3. Zbadać stabilność rozwiązań stacjonarnych równania
$$x' = x(1-x),$$
wykorzystując metodę linearyzacji, jak również konstruując odpowiednie funkcje Lapunowa.

4. Zbadać metodą linearyzacji stabilność rozwiązania zerowego układów równań:
$$\begin{cases} x' = -x + y + xy \\ y' = -x + y^2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x' = y \\ y' = -a(1-x^2)y - x \end{cases},$$
gdzie $a \in \mathbb{R}$.

5. Konstruując odpowiednią funkcję Lapunowa, wykazać stabilność rozwiązania zerowego układów równań:
$$\begin{cases} x' = -x^3 - y \\ y' = x - y^3 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x' = y - x + xy \\ y' = x - y - x^2 - y^3 \end{cases}.$$
Sprawdzić, że w powyższych przykładach metoda linearyzacji nie rozstrzyga o stabilności rozwiązania zerowego.

6. Zbadać dwoma poznanymi metodami stabilność rozwiązań stacjonarnych układu równań
$$\begin{cases} x' = -x + ye^x \\ y' = -xe^x - y \end{cases}.$$

7. Zbadać czy punkty stacjonarne $(0,0)$ i $(2,0)$ układu równań
$$\begin{cases} x' = -xy^2 \\ y' = x^2 y \end{cases}$$
są stabilne czy niestabilne.

8. Pokazać, że rozwiązanie zerowe jest stabilne dla równania
$$x'' + a^2 x = 0$$
oraz asymptotycznie stabilne dla równania
$$x'' + kx' + a^2 x = 0,$$
gdzie $a \neq 0$, $k > 0$.

9. Zbadać stabilność i asymptotyczną stabilność stałego rozwiązania $x(t) = -1$ równania
$$x'' + (x'+1)^{10} = x^2.$$

10. Zbadać stabilność i asymptotyczną stabilność stałego rozwiązania $x(t) = 3$ równania
$$x'' + (x')^8 = (x-3)^{10} + x - 3.$$

11. Sprawdzić, czy funkcja
$$V(x,y) = 1 - \cos x + \frac{1}{2}y^2$$
jest funkcją Lapunowa pierwszego, drugiego lub trzeciego rodzaju dla układu równań
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\sin x \end{cases}$$
w jakimś otoczeniu punktów stacjonarnych $(x,y) = (0,0)$ i $(x,y) = (\pi, 0)$. Wyciągnąć wnioski odnośnie stabilności, o ile to możliwe.

Rozdział 8

Twierdzenia porównawcze. Zastosowania

Twierdzenia, z których wynika oszacowanie rozwiązań jednego równania lub nierówności rozwiązaniami innego równania lub nierówności noszą nazwę twierdzeń porównawczych. Bywają one szczególnie użyteczne, gdy rozwiązania szacowane dotyczą trudniejszych zagadnień niż rozwiązania szacujące.

8.1 Liniowe twierdzenie porównawcze

Niech funcja $a : I \to \mathbb{R}$ i $x_0 \in \mathbb{R}$ będą dane, gdzie $I = [t_0, t_1]$. Interesuje nas związek rozwiązań liniowego jednorodnego równania różniczkowego z warunkiem początkowym

$$x' = a(t)x, \quad x(t_0) = x_0 \tag{8.1}$$

z rozwiązaniami liniowej jednorodnej nierówności różniczkowej z warunkiem początkowym

$$y' \geqslant a(t)y, \quad y(t_0) = x_0. \tag{8.2}$$

Twierdzenie 8.1 (liniowe twierdzenie porównawcze). *Niech funcja $a : I \to \mathbb{R}$ będzie ciągła i niech $x : I \to \mathbb{R}$ będzie rozwiązaniem problemu Cauchy'ego (8.1). Jeśli $y : I \to \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem zagadnienia (8.2), to*

$$x(t) \leqslant y(t), \quad t \in I. \tag{8.3}$$

Dowód. Wiemy, że jedyne rozwiązanie problemu (8.1) dane jest wzorem

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}, \quad t \in I.$$

Zdefiniujmy funkcję pomocniczą $p : I \to \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$p(t) = y'(t) - a(t)y(t), \quad t \in I.$$

Na mocy nierówności (8.2) mamy oczywiście $p(t) \geqslant 0$, $t \in I$. Widać, że funkcja y jest rozwiązaniem liniowego niejednorodnego równania różniczkowego z warunkiem początkowym

$$y' = a(t)y + p(t), \quad y(t_0) = x_0.$$

A skoro tak, to

$$y(t) = \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} p(\tau) e^{-\int_{t_0}^{\tau} a(s)\,ds}\, d\tau\right) e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}, \quad t \in I.$$

Po pomnożeniu otrzymujemy

$$y(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} + \int_{t_0}^{t} p(\tau) e^{-\int_{t_0}^{\tau} a(s)\,ds}\, d\tau \; e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} \geqslant x(t), \quad t \in I,$$

co kończy dowód.

Korzystając z twierdzenia 8.1, udowodnimy następujący ważny lemat.

Lemat 8.1 (Gronwall, wersja całkowa)**.** *Załóżmy, że ciągła i nieujemna funkcja* $v : I \to \mathbb{R}$ *oraz stała* $C \geqslant 0$ *są dane. Jeśli ciągła i nieujemna funkcja* $u : I \to \mathbb{R}$ *jest rozwiązaniem nierówności całkowej*

$$u(t) \leqslant C + \int_{t_0}^{t} v(s)u(s)\,ds, \quad t \in I, \tag{8.4}$$

to

$$u(t) \leqslant Ce^{\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds}, \quad t \in I. \tag{8.5}$$

W szczególności jeśli $C = 0$, *to* $u(t) \equiv 0$, $t \in I$.

Dowód. Zdefiniujmy funkcję pomocniczą $y : I \to \mathbb{R}$, kładąc

$$y(t) = -\Big(C + \int_{t_0}^{t} v(s)u(s)\,ds\Big), \quad t \in I.$$

Na podstawie wzoru (8.4) widzimy, że

$$u(t) \leqslant -y(t), \quad t \in I.$$

Uwzględniając powyższą nierówność oraz nieujemność funkcji v, otrzymujemy

$$y'(t) = -v(t)u(t) \geqslant v(t)y(t), \quad t \in I.$$

Dzięki temu funkcja y jest rozwiązaniem liniowej jednorodnej nierówności różniczkowej z warunkiem początkowym

$$y' \geqslant v(t)y, \quad y(t_0) = -C.$$

Rozważmy liniowe jednorodne równanie różniczkowe z warunkiem początkowym

$$x' = v(t)x, \quad x(t_0) = -C$$

i rozwiązanie tego zagadnienia

$$x(t) = -Ce^{\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds}, \quad t \in I.$$

Twierdzenie 8.1 implikuje nierówność

$$x(t) \leqslant y(t), \quad t \in I.$$

W konsekwencji

$$x(t) \leqslant -u(t), \quad t \in I$$

i ostatecznie

$$u(t) \leqslant -x(t) = Ce^{\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds}, \quad t \in I.$$

Druga część tezy jest oczywista.

Uwaga 8.1. Przedstawiony elegancki dowód oszacowania (8.5) w lemacie 8.1 zaproponował J. Szarski (zobacz R. Rabczuk, Elementy nierówności różniczkowych, str. 9). W dowodzie tym nie korzystaliśmy z typowych założeń w literaturze o nieujemności rozwiązania u i stałej C, a tym samym wspomniane oszacowanie jest prawdziwe bez tych założeń. Założenie o nieujemności u jest konieczne do uzasadnienia drugiej części tezy.

Lemat 8.2 (Gronwall, wersja różniczkowa). *Załóżmy, że ciągłe i nieujemne funkcje $v, w : I \to \mathbb{R}$ są dane. Jeśli ciągła i nieujemna funkcja $u : I \to \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem nierówności różniczkowej*

$$u'(t) \leqslant v(t)u(t) + w(t), \quad t \in I, \tag{8.6}$$

to

$$u(t) \leqslant e^{\int_{t_0}^t v(s)\,ds}\Big(u(t_0) + \int_{t_0}^t w(s)\,ds\Big), \quad t \in I. \tag{8.7}$$

W szczególności jeśli $w(t) \equiv 0$, $t \in I$ i $u(t_0) = 0$, to $u(t) \equiv 0$, $t \in I$.

Dowód. Obliczamy pochodną

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\Big(u(\tau)e^{-\int_{t_0}^{\tau} v(s)\,ds}\Big) &= u'(\tau)e^{-\int_{t_0}^{\tau} v(s)\,ds} - v(\tau)u(\tau)e^{-\int_{t_0}^{\tau} v(s)\,ds} \\ &= \Big(u'(\tau) - v(\tau)u(\tau)\Big)e^{-\int_{t_0}^{\tau} v(s)\,ds}, \quad \tau \in [t_0, t]. \end{aligned}$$

A stąd, biorąc pod uwagę formułę (8.6), otrzymujemy

$$\frac{d}{d\tau}\Big(u(\tau)e^{-\int_{t_0}^{\tau} v(s)\,ds}\Big) \leqslant w(\tau)e^{-\int_{t_0}^{\tau} v(s)\,ds}, \quad \tau \in [t_0, t].$$

Dalej, całkujemy obustronnie tę nierówność na przedziale $[t_0, t]$ i mamy

$$u(t)e^{-\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds} \leqslant u(t_0) + \int_{t_0}^t w(\tau)e^{-\int_{t_0}^{\tau} v(s)\,ds}\,d\tau, \quad t \in I.$$

Ponieważ funkcje v i w są nieujemne, więc

$$u(t)e^{-\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds} \leqslant u(t_0) + \int_{t_0}^t w(\tau)\,d\tau, \quad t \in I.$$

Pomnożenie ostatniej nierówności przez $e^{\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds}$ kończy uzasadnienie oszacowania (8.7).

Druga część tezy jest oczywista.

Uwaga 8.2. Z dowodu wynika, że oszacowanie (8.7) w lemacie 8.2 jest prawdziwe bez założenia o nieujemności rozwiązania u. Podobnie, jak w lemacie 8.1, założenie o nieujemności u jest potrzebne do uzasadnienia drugiej części tezy.

Zaprezentujemy teraz kilka ważnych zastosowań lematu 8.1 Gronwalla. Udowodnimy jednoznaczność rozwiązania w twierdzeniu 3.5 Picarda, ciągłą zależność rozwiązania problemu Cauchy'ego od prawej strony równania i warunku początkowego, a także twierdzenie 3.10 Picarda o istnieniu i jednoznaczności globalnego rozwiązania problemu Cauchy'ego i twierdzenie 3.16 Peano o istnieniu globalnego rozwiązania tego problemu, przy założeniu liniowego wzrostu prawej strony równania różniczkowego.

Uwaga 8.3. W twierdzeniu 3.5 Picarda jednoznaczność rozwiązania można udowodnić bez założenia, że $\alpha < \frac{1}{L}$. A stąd wystarczy założyć w tym twierdzeniu podobnie, jak w twierdzeniu 3.12 Peana, że $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$. Aby to uzasadnić, ograniczymy się bez straty ogólności do dowolnego przedziału $I = [t_0, t_1]$, $t_0 < t_1 \leqslant t_0 + a$. Przypuśćmy, że funkcje $x, y : I \to \mathbb{R}$ są rozwiązaniami problemu Cauchy'ego (3.23). Wówczas spełniają one równania całkowe:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))\,ds, \quad t \in I,$$

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))\,ds, \quad t \in I.$$

Odejmując stronami i wykorzystując warunek Lipschitza względem drugiej zmiennej, który spełnia funkcja f, otrzymujemy:

$$|x(t) - y(t)| \leqslant \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| \, ds, \quad t \in I,$$

$$|x(t) - y(t)| \leqslant \int_{t_0}^{t} L|x(s) - y(s)| \, ds, \quad t \in I.$$

Kładziemy $v(t) \equiv L$, $t \in I$, $C = 0$ oraz $u(t) = |x(t) - y(t)|$, $t \in I$. Z lematu 8.1 wnioskujemy, że $u(t) \equiv 0$, $t \in I$, czyli $x = y$.

Twierdzenie 8.2. *Załóżmy, że funkcje $f, g : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$, gdzie U jest zbiorem otwartym, są ciągłe, f lub g spełnia warunek Lipschitza względem drugiej zmiennej ze stałą L i $\|f - g\| < \infty$. Niech (t_0, x_0), $(t_0, y_0) \in U$. Jeśli funkcje $x, y : I \to \mathbb{R}$, $I = [t_0, t_1]$ są odpowiednio rozwiązaniami problemów początkowych*

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{8.8}$$

oraz

$$y' = g(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \tag{8.9}$$

to

$$\|x - y\| \leqslant K\Big(|x_0 - y_0| + \|f - g\|\Big), \tag{8.10}$$

gdzie stała $K \geqslant 0$ nie zależy od warunków początkowych i prawej strony równań.

Dowód. Funkcje x i y spełniają równania całkowe:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) \, ds, \quad t \in I,$$

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} g(s, y(s)) \, ds, \quad t \in I.$$

Przyjmijmy, że f jest lipschitzowska względem drugiej zmiennej (dla g lipschitzowskiej względem drugiej zmiennej dowód jest analogiczny). Odejmujemy stronami powyższe równości i mamy:

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\leqslant |x_0 - y_0| + \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s)) - g(s, y(s))| \, ds \\ &\leqslant |x_0 - y_0| + \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| \, ds + \int_{t_0}^{t} |f(s, y(s)) - g(s, y(s))| \, ds, \quad t \in I, \end{aligned}$$

$$|x(t) - y(t)| \leqslant \Big(|x_0 - y_0| + \|f - g\|(t_1 - t_0)\Big) + \int_{t_0}^{t} L|x(s) - y(s)| \, ds, \quad t \in I.$$

Połóżmy $v(t) \equiv L$, $t \in I$, $C = |x_0 - y_0| + \|f - g\|(t_1 - t_0)$ oraz $u(t) = |x(t) - y(t)|$, $t \in I$. Z lematu 8.1 wynika, że

$$|x(t) - y(t)| \leqslant \Big(|x_0 - y_0| + \|f - g\|(t_1 - t_0)\Big) e^{L(t_1 - t_0)}, \quad t \in I,$$

co pociąga oszacowanie (8.10), gdzie $K = \max\{1, t_1 - t_0\} e^{L(t_1 - t_0)}$.

Wniosek 8.1. Z twierdzenia 8.2 wynika, że jeśli funkcja f jest ciągła i spełnia warunek Lipschitza względem drugiej zmiennej, to rozwiązanie problemu Cauchy'ego (8.8) zależy w sposób ciągły od prawej strony równania i warunku początkowego. Rzeczywiście, dla dowolnych zaburzeń ε, $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$ oraz $g = f + \varepsilon$ i $y_0 = x_0 + \varepsilon_0$ mamy

$$\|x - y(\varepsilon, \varepsilon_0)\| \leqslant K(|\varepsilon_0| + |\varepsilon|).$$

Twierdzenie 8.3. *Niech $f : [t_0 - a, t_0 + a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a > 0$ będzie funkcją ciągłą, która ma liniowy wzrost:*

$$|f(t,x)| \leqslant \alpha|x| + \beta, \quad |t - t_0| \leqslant a,\ x \in \mathbb{R}$$

dla pewnych $\alpha, \beta \geqslant 0$ i niech $x_0 \in \mathbb{R}$. Wówczas funkcja $g : [t_0 - a, t_0 + a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$g(t,x) = \begin{cases} f(t,x), & |x| \leqslant M \\ f\left(t, \frac{M}{|x|}x\right), & |x| > M \end{cases},$$

gdzie $M = (|x_0| + \beta a)e^{\alpha a} > 0$, jest ciągła i ograniczona, a problemy początkowe

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{8.11}$$

$$x' = g(t,x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{8.12}$$

są równoważne. Ponadto jeśli f jest lokalnie lipschitzowska względem zmiennej x, to g również jest lokalnie lipschitzowska względem tej zmiennej.

Dowód. Przypuśćmy, że funkcja f jest ciągła.

Zauważmy, że $g(t,x) = f(t,x)$ dla $|x| \leqslant M$ oraz $g(t,x) = f(t,M)$ dla $x \geqslant M$ i $g(t,x) = f(t,-M)$ dla $x \leqslant -M$. Stąd natychmiast wynika ciągłość i ograniczoność funkcji g.

Postulowaną równoważność uzasadnimy bez straty ogólności, ograniczając się do przedziału $[t_0, t_0 + a]$.

Niech x będzie dowolnym rozwiązaniem problemu (8.11) na przedziale $[t_0, t_0 + a]$. Na mocy twierdzenia 3.2 zagadnienie (8.11) równoważne jest równaniu całkowemu

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \quad t \in [t_0, t_0 + a].$$

A stąd:

$$|x(t)| \leqslant |x_0| + \int_{t_0}^{t} |f(s,x(s))|\, ds \leqslant |x_0| + \int_{t_0}^{t} (\alpha|x(s)| + \beta)\, ds, \quad t \in [t_0, t_0 + a],$$

$$|x(t)| \leqslant (|x_0| + \beta a) + \int_{t_0}^{t} \alpha|x(s)|\, ds, \quad t \in [t_0, t_0 + a].$$

Kładąc $v(t) = \alpha$, $C = |x_0| + \beta a$ i $u(t) = |x(t)|$, $t \in [t_0, t_0 + a]$, możemy skorzystać z nierówności Gronwalla (zobacz lemat 8.1), co daje nam oszacowanie

$$|x(t)| \leqslant (|x_0| + \beta a)e^{\alpha a} = M, \quad t \in [t_0, t_0 + a].$$

Zatem x jest rozwiązaniem problemu (8.12).

Teraz niech x będzie dowolnym rozwiązaniem problemu (8.12) na przedziale $[t_0, t_0 + a]$. Sprawdźmy, że funkcja g spełnia warunek wzrostu liniowego

$$|g(t,x)| \leqslant \alpha|x| + \beta, \quad |t - t_0| \leqslant a,\ x \in \mathbb{R}.$$

Rzeczywiście, jeśli $|x| \leqslant M$, to

$$|g(t,x)| = |f(t,x)| \leqslant \alpha|x| + \beta,$$

a jeśli $|x| > M$, to

$$|g(t,x)| = \left|f\left(t, \frac{M}{|x|}x\right)\right| \leqslant \alpha\left|\frac{M}{|x|}x\right| + \beta = \alpha M + \beta \leqslant \alpha|x| + \beta$$

dla $|t-t_0| \leqslant a$. Ponieważ zagadnienie (8.12) równoważne jest równaniu całkowemu

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(s, x(s))\, ds, \quad t \in [t_0, t_0 + a],$$

więc znowu korzystając z nierówności Gronwalla, jak wyżej, otrzymujemy oszacowanie

$$|x(t)| \leqslant (|x_0| + \beta a)e^{\alpha a} = M, \quad t \in [t_0, t_0 + a].$$

A to oznacza, że x jest rozwiązaniem problemu (8.11).

Ostatnia część tezy wynika z faktu, że sklejenie funkcji lokalnie lipschitzowskich, o ile ma sens, jest funkcją lokalnie lipschitzowską.

Dowód twierdzenia 3.10 Picarda i twierdzenia 3.16 Peano. Wystarczy zamiast wyjściowego problemu Cauchy'ego (8.11), rozważyć problem (8.12) i skorzystać z twierdzenia 8.3 oraz odpowiednio z twierdzenia 3.8 i twierdzenia 3.15 dla funkcji f ograniczonej.

8.2 Nieliniowe twierdzenie porównawcze

Twierdzenie 8.4. *Niech funkcje $f, g : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$ będą ciągłe i niech punkt $(t_0, x_0) \in U$ będzie ustalony, gdzie U jest zbiorem otwartym. Załóżmy ponadto, że*

$$f(t,x) < g(t,x), \quad (t,x) \in U. \tag{8.13}$$

Jeśli $x, y : I \to \mathbb{R}$ ($t_0 \in int\ I$) są odpowiednio rozwiązaniami problemów Cauchy'ego:

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0,$$

$$y' = g(t,y), \quad y(t_0) = x_0,$$

to:

$$x(t) > y(t), \quad t < t_0 \ (t \in I), \tag{8.14}$$

$$x(t) < y(t), \quad t > t_0 \ (t \in I). \tag{8.15}$$

Dowód. Pokażemy tylko prawdziwość nierówności (8.15), gdyż uzasadnienie nierówności (8.14) jest analogiczne. Połóżmy

$$u = y - x.$$

Obliczamy

$$u'(t_0) = y'(t_0) - x'(t_0) = g(t_0, y(t_0)) - f(t_0, x(t_0)) = g(t_0, x_0) - f(t_0, x_0) > 0.$$

Ponieważ u' jest funkcją ciągłą, więc istnieje $\delta > 0$ taka, że $u'(t) > 0$ dla $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Stąd i z nierówności $u(t_0) = 0$ wynika, że $u(t) > 0$ dla $t \in (t_0, t_0 + \delta)$. Zdefiniujmy maksymalny przedział (t_0, t_*), w którym $u(t) > 0$, tzn. że

$$t_* = \sup\{t \in I,\ t > t_0 :\ u(s) > 0 \text{ dla } s \in (t_0, t]\}.$$

Rozważmy dwa przypadki.

1° Jeśli $t_* = \sup I$, to dowód jest zakończony.

2° Przypuśćmy, że $t_* < \sup I$. Zauważmy, że $y(t_*) = x(t_*)$ i dalej

$$u'(t_*) = y'(t_*) - x'(t_*) = g(t_*, y(t_*)) - f(t_*, x(t_*)) = g(t_*, x(t_*)) - f(t_*, x(t_*)) > 0.$$

Skoro u' jest funkcją ciągłą, to istnieje $\delta_1 > 0$ taka, że $u'(t) > 0$ dla $t \in (t_* - \delta_1, t_* + \delta_1)$. Uwzględniając $u(t_*) = 0$, stwierdzamy, że $u(t) < 0$ dla $t \in (t_* - \delta_1, t_*)$. A to jest niemożliwe, bo $u(t) > 0$ dla $t \in (t_0, t_*)$ zgodnie z definicją t_*. Uzyskana sprzeczność kończy dowód.

Poniżej przedstawimy kilka zastosowań twierdzenia porównawczego 8.4. Udowodnimy twierdzenie 3.10 Picarda o istnieniu i jednoznaczności globalnego rozwiązania problemu Cauchy'ego i twierdzenie 3.16 Peano o istnieniu globalnego rozwiązania tego problemu, przy założeniu liniowego wzrostu prawej strony równania różniczkowego. Pokażemy też, że pewne klasyczne równanie różniczkowe niecałkowalne w kwadraturach nie ma rozwiązań przedłużalnych na $\mathbb{R}$.

Dowód twierdzenia 3.10 Picarda. Połóżmy $U = (t_0 - a, t_0 + a) \times \mathbb{R}$. Istnienie jedynego rozwiązania (lokalnego) x problemu Cauchy'ego

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{8.16}$$

wynika z twierdzenia 3.6.

Wykażemy, że można go jednoznacznie przedłużyć na przedział $[t_0 - a, t_0 + a]$. Weźmy dowolną $\beta_1 > \beta$. Z założeń twierdzenia 3.10 wynika, że

$$-(\alpha|x| + \beta_1) < f(t, x), \quad f(t, x) < \alpha|x| + \beta_1$$

dla $(t, x) \in U$. Funkcje $g(x) = \alpha|x| + \beta_1$ i $-g(x)$, $x \in \mathbb{R}$ są lipschitzowskie. Korzystając z twierdzenia 3.9, stwierdzamy, że problemy początkowe:

$$y' = -(\alpha|y| + \beta_1), \quad y(t_0) = x_0, \tag{8.17}$$

$$y' = \alpha|y| + \beta_1, \quad y(t_0) = x_0 \tag{8.18}$$

mają jedyne rozwiązania odpowiednio y_1 i y_2 określone na $[t_0 - a, t_0 + a]$. Twierdzenie 8.4 implikuje nierówności:

$$y_1(t) > y_2(t), \quad t \in [t_0 - a, t_0),$$
$$y_1(t) < y_2(t), \quad t \in (t_0, t_0 + a].$$

I dalej:

$$y_1(t) > x > y_2(t), \quad t < t_0,$$
$$y_1(t) < x < y_2(t), \quad t > t_0$$

na przedziale, na którym rozwiązanie x jest określone. Niech $U_1 = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b]$ będzie prostokątem takim, że wykresy funkcji y_1 i y_2 w nim się zawierają. Oczywiście funkcja f jest na *int* U_1 ograniczona. Z twierdzenia 3.7 zastosowanego do *int* U_1 i z powyższych nierówności wynika, że rozwiązanie x jest jednoznacznie przedłużalne na przedział $(t_0 - a, t_0 + a)$. Przedłużalność x na przedział $[t_0 - a, t_0 + a]$ uzasadnia się analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 3.8.

Dowód twierdzenia 3.16 Peano. Twierdzenie 3.16 dowodzi się analogicznie jak wyżej udowodniono twierdzenie 3.10, przy czym zamiast z twierdzeń 3.6 i 3.7 należy skorzystać z twierdzeń 3.13 i 3.14.

Przykład 8.1. Uzasadnić, że żadne rozwiązanie równania

$$y' = y^2 + t \tag{8.19}$$

nie jest przedłużalne na $\mathbb{R}$. Zwróćmy uwagę, że prawa strona tego równania nie spełnia warunku wzrostu liniowego. Wiadomo, że równanie to nie jest całkowalne w kwadraturach.

Rozpatrzmy jakiekolwiek rozwiązanie y równania (8.19). Przypuśćmy, że rozwiązanie y jest przedłużalne na przedział $[T, \infty)$, $T \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$\lim_{t\to\infty} y'(t) = \lim_{t\to\infty} \Big((y(t))^2 + t\Big) = \infty.$$

Wobec tego istnieją $t_0 > \max\{T, 0\}$ i $x_0 > 0$ takie, że

$$y(t_0) = x_0.$$

Rozważmy prosty pomocniczy problem Cauchy'ego

$$x' = x^2, \quad x(t_0) = x_0.$$

Rozwiązaniem tego zagadnienia jest funkcja

$$x(t) = \frac{-1}{t - \frac{1+t_0x_0}{x_0}}, \quad t \in \left(-\infty, \frac{1+t_0x_0}{x_0}\right).$$

Ponieważ

$$\lim_{t\to \frac{1+t_0x_0}{x_0}^-} x(t) = \infty,$$

więc funkcja x ma w punkcie $t_1 = \frac{1+t_0x_0}{x_0}$ asymptotę pionową lewostronną. Niech $U = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $I = \Big(\max\{T, 0\}, \frac{1+t_0x_0}{x_0}\Big)$ i połóżmy $f(t, x) = x^2$, $g(t, x) = x^2 + t$, $(t, x) \in U$. Widzimy, że funkcje f i g spełniają nierówność (8.13). Z twierdzenia 8.4 wnioskujemy, że funkcje x i y spełniają nierówność (8.15). Oznacza to, że funkcja y również ma asymptotę pionową lewostronną w punkcie t_1. Zatem nie może ona być przedłużona na przedział $[T, \infty)$ i mamy sprzeczność.

8.3 Zadania

1. Niech funkcje $v, w : I \to \mathbb{R}$, $I = [t_0, t_1]$ będą ciągłe i nieujemne. Wykazać, że jeśli funkcja $u : I \to \mathbb{R}$ ciągła i nieujemna jest rozwiązaniem nierówności całkowej

$$u(t) \leqslant w(t) + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)\, ds, \quad t \in I,$$

to

$$u(t) \leqslant w(t) + \int_{t_0}^{t} w(s)v(s)e^{\int_s^t v(\tau)\, d\tau}\, ds, \quad t \in I.$$

2. Załóżmy, że funkcje $a, b : I \to \mathbb{R}$, $I = [t_0, t_1]$ są ciągłe. Korzystając z postaci całkowej i nierówności Gronwalla, udowodnić, że rozwiązanie problemu Cauchy'ego

$$x' = a(t)x + b(t), \quad x(t_0) = x_0$$

zależy w sposób ciągły od warunku początkowego x_0.

3. Wykazać, że wszystkie rozwiązania równania

$$x' = x + t$$

są określone na $\mathbb{R}$, natomiast równanie

$$x' = x^4 + t$$

nie ma ani jednego rozwiązania określonego na $\mathbb{R}$.

4. Niech punkt $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ będzie dowolnie ustalony. Wykazać, że problem Cauchy'ego

$$x' = x^4 + x^2 + t^2 + 1, \quad x(t_0) = x_0$$

ma jedyne rozwiązanie i nie da się go przedłużyć na $[t_0, +\infty)$.

5. Dowieść, że problem początkowy

$$x' = 1 + x^2 + \sin\sqrt{|x|}, \quad x(1) = 0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie i nie jest ono przedłużalne na $\mathbb{R}$.

Rozdział 9

Problemy brzegowe dla liniowych równań różniczkowych drugiego rzędu

9.1 Istnienie i jednoznaczność rozwiązań liniowych problemów brzegowych

Rozważmy liniowe równanie różniczkowe drugiego rzędu

$$a_0(t)x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = b(t) \tag{9.1}$$

z warunkami brzegowymi

$$\begin{cases} \alpha_1 x(t_1) + \alpha_2 x'(t_1) + \alpha_3 x(t_2) + \alpha_4 x'(t_2) = \gamma_1 \\ \beta_1 x(t_1) + \beta_2 x'(t_1) + \beta_3 x(t_2) + \beta_4 x'(t_2) = \gamma_2 \end{cases}, \tag{9.2}$$

gdzie funkcje $a_0, a_1, a_2, b : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ oraz stałe α_i, β_i, $i = 1,2,3,4$, γ_1, γ_2 są dane, zaś $I = [t_1, t_2]$, $t_1 < t_2$. Zakładamy, że nie wszystkie stałe w lewo- i prawostronnym warunku brzegowym zerują się równocześnie, czyli $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 > 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta_4^2 > 0$. Gdy $b(t) = \gamma_1 = \gamma_2 \equiv 0$, $t \in I$, to mówimy, że problem brzegowy (9.1), (9.2) jest jednorodny (PBJ)

$$a_0(t)x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0, \tag{9.3}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 x(t_1) + \alpha_2 x'(t_1) + \alpha_3 x(t_2) + \alpha_4 x'(t_2) = 0 \\ \beta_1 x(t_1) + \beta_2 x'(t_1) + \beta_3 x(t_2) + \beta_4 x'(t_2) = 0 \end{cases}, \tag{9.4}$$

w przeciwnym razie - niejednorodny (PBN). Jeśli (9.1), (9.2) jest poblemem brzegowym niejednorodnym (PBN), to (9.3), (9.4) nazywamy problemem brzegowym jednorodnym (PBJ) z nim skojarzonym.

Z punktu widzenia zastosowań najbardziej interesujące są następujące warunki brzegowe, które są szczególnymi przypadkami (9.2).

Warunek Dirichleta

$$\begin{cases} x(t_1) = \gamma_1 \\ x(t_2) = \gamma_2 \end{cases}. \tag{9.5}$$

Warunek Neumanna

$$\begin{cases} x'(t_1) = \gamma_1 \\ x'(t_2) = \gamma_2 \end{cases}. \tag{9.6}$$

Warunek Robina

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 x(t_1) + \alpha_2 x'(t_1) = \gamma_1 \\ \beta_3 x(t_2) + \beta_4 x'(t_2) = \gamma_2 \end{array}\right. , \tag{9.7}$$

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_3,\ \beta_4 \neq 0.$$

Warunek mieszany

$$\left\{\begin{array}{l} x(t_1) = \gamma_1 \\ x'(t_2) = \gamma_2 \end{array}\right. \quad \text{lub} \quad \left\{\begin{array}{l} x'(t_1) = \gamma_1 \\ x(t_2) = \gamma_2 \end{array}\right. . \tag{9.8}$$

Warunek okresowy

$$\left\{\begin{array}{l} x(t_1) = x(t_2) \\ x'(t_1) = x'(t_2) \end{array}\right. . \tag{9.9}$$

Zagadnienia początkowe dla równań różniczkowych zwyczajnych $x^{(n)} = f\left(t, x, x^{(1)}, ..., x^{(n-1)}\right)$ mają tę własność, że o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań decyduje wyłącznie regularność funkcji f generującej prawą stronę równań. W przypadku równań liniowych (9.1), (9.3) przekłada się to na regularność współczynników a_0, a_1, a_2 i funkcji b. Dodatkowo istotne jest czy współczynnik a_0 jest różny od zera w każdym punkcie $t \in I$, czy też w jakichś punktach z tego przedziału się zeruje.

Zanim przejdziemy do teoretycznej analizy PBJ i PBN, prześledźmy kilka przykładów, w których widać wpływ warunków brzegowych, a ściślej generowanego przez te warunki pewnego wyznacznika Δ na ilość rozwiązań. Oddziałuje zarówno rodzaj warunków brzegowych, jak i przedział I. Istotna jest również postać układu fundamentalnego równania (9.3) i prawa strona równania (9.1).

Przykład 9.1. Rozwiązać problem brzegowy

$$\left\{\begin{array}{l} x'' - x = 0 \\ x(t_1) = 0 \\ x(t_2) = 0 \end{array}\right. . \tag{9.10}$$

Rozwiązanie ogólne równania jest postaci

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Uwzględniając warunki brzegowe, dochodzimy do układu równań algebraicznych

$$\begin{bmatrix} e^{t_1} & e^{-t_1} \\ e^{t_2} & e^{-t_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

z wektorem szukanym $(C_1, C_2)^T$. Ponieważ wyznacznik

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{t_1} & e^{-t_1} \\ e^{t_2} & e^{-t_2} \end{vmatrix} = e^{t_1 - t_2} - e^{t_2 - t_1} \neq 0,$$

gdyż $t_1 < t_2$, więc na podstawie twierdzenia Cramera układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie $(C_1, C_2)^T = (0, 0)^T$. A tym samym zagadnienie (9.10) ma jedyne rozwiązanie zerowe.

Przykład 9.2. Rozwiązać problem brzegowy

$$\begin{cases} x'' + x = 0 \\ x(t_1) = 0 \\ x(t_2) = 0 \end{cases} . \tag{9.11}$$

W stosunku do poprzedniego przykładu zmieniliśmy tylko znak przed funkcją x w równaniu. Ale to zupełnie zmienia postać jego rozwiązania ogólnego

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Teraz po podstawieniu warunków brzegowych otrzymujemy układ równań algebraicznych

$$\begin{bmatrix} \cos t_1 & \sin t_1 \\ \cos t_2 & \sin t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wyznacznik

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos t_1 & \sin t_1 \\ \cos t_2 & \sin t_2 \end{vmatrix} = \cos t_1 \sin t_2 - \cos t_2 \sin t_1 = \sin(t_2 - t_1)$$

jest różny od zera wtedy i tylko wtedy, gdy $t_2 - t_1 \neq k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. A więc tylko wtedy $(C_1, C_2)^T = (0,0)^T$ jest jedynym rozwiązaniem powyższego układu, a zatem dokładnie wtedy problem (9.11) ma jedyne rozwiązanie zerowe. W przeciwnym razie zagadnienie (9.11) ma nieskończenie wiele rozwiązań. Przy czym jeśli $\cos t_1 \neq 0$, czyli $t_1 \neq \frac{\pi}{2} + l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$, to

$$x = (-C_2 \mathrm{tg}\ t_1) \cos t + C_2 \sin t, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Jeśli zaś $\cos t_1 = 0$, czyli $t_1 = \frac{\pi}{2} + l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$, to

$$x = C_1 \cos t, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Dla przykładu, jeśli $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, to nasz problem ma dokładnie jedno rozwiązanie zerowe. Jeśli $I = [0, \pi]$, to ma on nieskończenie wiele rozwiązań $x = C_2 \sin t$, $C_2 \in \mathbb{R}$, a jeśli $I = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, to ma nieskończenie wiele rozwiązań $x = C_1 \cos t$, $C_1 \in \mathbb{R}$,

Przykład 9.3. Rozwiązać problem brzegowy

$$\begin{cases} x'' + x = 1 \\ x(t_1) = 0 \\ x(t_2) = 0 \end{cases} . \tag{9.12}$$

Rozwiązanie ogólne równania dane jest wzorem

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 1, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Biorąc pod uwagę warunki brzegowe, otrzymujemy układ równań algebraicznych

$$\begin{bmatrix} \cos t_1 & \sin t_1 \\ \cos t_2 & \sin t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Zgodnie z analizą przeprowadzoną w przykładzie 9.2 układ ten, jak również zagadnienie (9.12), mają jedyne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $t_2 - t_1 \neq k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Obliczamy wyznaczniki:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & \sin t_1 \\ -1 & \sin t_2 \end{vmatrix} = \sin t_1 - \sin t_2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos t_1 & -1 \\ \cos t_2 & -1 \end{vmatrix} = \cos t_2 - \cos t_1.$$

Wobec tego rozważany problem brzegowy tylko w tym przypadku ma dokładnie jedno rozwiązanie postaci

$$x = \frac{\sin t_1 - \sin t_2}{\sin(t_2 - t_1)} \cos t + \frac{\cos t_2 - \cos t_1}{\sin(t_2 - t_1)} \sin t + 1.$$

Przeanalizujmy teraz przypadek, gdy $t_2 - t_1 = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. A więc jeśli

$$\begin{cases} \sin t_1 = \sin(t_1 + k\pi) \\ \cos t_1 = \cos(t_1 + k\pi) \end{cases},$$

to problem (9.12) ma nieskończenie wiele rozwiązań, w przeciwnym razie jest sprzeczny. Pierwszy przypadek ma miejsce dla $k = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, a drugi dla $k = 2n-1$, $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $k = 2n$, $n \in \mathbb{N}$ i $\cos t_1 \neq 0$, czyli $t_1 \neq \frac{\pi}{2} + l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$, to

$$x = \left(\frac{-1}{\cos t_1} - C_2 \mathrm{tg}\ t_1\right) \cos t + C_2 \sin t + 1, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Jeśli zaś $k = 2n$, $n \in \mathbb{N}$ i $\cos t_1 = 0$, czyli $t_1 = \frac{\pi}{2} + l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$, to

$$x = C_1 \cos t - \frac{1}{\sin t_1} \sin t + 1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Przykładowo, jeśli $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, to badany problem ma jedyne rozwiązanie $x = -\cos t - \sin t + 1$. Jeśli $I = [0, \pi]$, to jest on sprzeczny. Jeśli $I = [0, 2\pi]$, to ma nieskończenie wiele rozwiązań $x = -\cos t + C_2 \sin t + 1$, $C_2 \in \mathbb{R}$, a jeśli $I = [\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$, to ma nieskończenie wiele rozwiązań $x = C_1 \cos t - \sin t + 1$, $C_1 \in \mathbb{R}$.

Przykład 9.4. Rozwiązać problem brzegowy w zależności od parametrów $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x'' = 0 \\ x'(t_1) = a \\ x'(t_2) = b \end{cases}. \tag{9.13}$$

Znajdujemy rozwiązanie ogólne równania

$$x = C_1 t + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

i jego pierwszą pochodną

$$x' = C_1.$$

Patrząc na postać pierwszej pochodnej rozwiązania ogólnego i warunki brzegowe, natychmiast widzimy, że jeśli $C_1 = a = b$, to zagadnienie (9.13) ma nieskończenie wiele rozwiązań $x = at + C_2$, $C_2 \in \mathbb{R}$, a jeśli tak nie jest, to mamy sprzeczność. Możemy też postąpić inaczej, rozwiązując układ równań algebraicznych

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Obliczamy wyznaczniki

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix} = b - a.$$

Zatem układ ten, a co za tym idzie problem (9.13), ma nieskończenie wiele rozwiązań $x = at + C_2$, $C_2 \in \mathbb{R}$, gdy $a = b$, zaś w przeciwnym razie jest sprzeczny.

Zdefiniujmy teraz dwa brzegowe liniowe rzeczywiste funkcjonały działające na przestrzeni funkcji różniczkowalnych określonych na przedziale I, za pomocą wzorów

$$l_1(x) = \alpha_1 x(t_1) + \alpha_2 x'(t_1) + \alpha_3 x(t_2) + \alpha_4 x'(t_2),$$

$$l_2(x) = \beta_1 x(t_1) + \beta_2 x'(t_1) + \beta_3 x(t_2) + \beta_4 x'(t_2).$$

Twierdzenie 9.1. *Załóżmy, że $a_0, a_1, a_2 \in C(I, \mathbb{R})$ i $a_0(t) \neq 0$, $t \in I$. Wówczas PBJ ma jedyne rozwiązanie zerowe na I wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1(\varphi_1) & l_1(\varphi_2) \\ l_2(\varphi_1) & l_2(\varphi_2) \end{vmatrix} \neq 0,$$

gdzie zbiór $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ jest układem fundamentalnym równania (9.3) w przedziale I.

Dowód. Na podstawie twierdzenia 5.4 rozwiązanie ogólne równania (9.3) na I ma postać

$$x(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Po uwzględnieniu warunków brzegowych (9.4) mamy $l_1(x) = 0$ i $l_2(x) = 0$, co generuje jednorodny układ równań algebraicznych

$$\begin{bmatrix} l_1(\varphi_1) & l_1(\varphi_2) \\ l_2(\varphi_1) & l_2(\varphi_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{9.14}$$

Układ ten, zgodnie z twierdzeniem Cramera, ma jedyne rozwiązanie zerowe $(C_1, C_2)^T = (0, 0)^T$, a tym samym PBJ ma jedyne rozwiązanie zerowe na I, wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta \neq 0$.

Uwaga 9.1. Niosobliwość macierzy układu (9.14) nie zależy od wyboru układu fundamentalnego równania (9.3) w przedziale I. Istotnie, przypuśćmy, że zbiór $\{\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2\}$ jest innym układem fundamentalnym tego równania w przedziale I. Rozwiązanie ogólne równania (9.3) na I dane jest wzorem

$$x(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

W konsekwencji istnieje nieosobliwa macierz

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

taka, że

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_1(t) = c_{11}\varphi_1(t) + c_{12}\varphi_2(t) \\ \tilde{\varphi}_2(t) = c_{21}\varphi_1(t) + c_{22}\varphi_2(t) \end{cases}.$$

Stąd wynika, że

$$\begin{bmatrix} l_1(\tilde{\varphi}_1) & l_1(\tilde{\varphi}_2) \\ l_2(\tilde{\varphi}_1) & l_2(\tilde{\varphi}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1(\varphi_1) & l_1(\varphi_2) \\ l_2(\varphi_1) & l_2(\varphi_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\tilde{\Delta} = \Delta\ |C^T|.$$

Warunek $\Delta \neq 0$ implikuje $\tilde{\Delta} \neq 0$.

Sprawdźmy jeszcze, że rzeczywiście macierz C jest nieosobliwa. Przypuśćmy, że jest ona osobliwa. Rozważmy zerową liniową kombinację

$$\alpha\tilde{\varphi}_1(t) + \beta\tilde{\varphi}_2(t) = 0, \quad t \in I.$$

Obliczamy:

$$\alpha(c_{11}\varphi_1(t)+c_{12}\varphi_2(t))+\beta(c_{21}\varphi_1(t)+c_{22}\varphi_2(t))=0, \quad t\in I$$

$$(\alpha c_{11}+\beta c_{21})\varphi_1(t)+(\alpha c_{12}+\beta c_{22})\varphi_2(t)=0, \quad t\in I.$$

Na podstawie liniowej niezależności funkcji φ_1, φ_2 stwierdzamy, że

$$\begin{cases} \alpha c_{11}+\beta c_{21}=0 \\ \alpha c_{12}+\beta c_{22}=0 \end{cases},$$

lub równoważnie w zapisie macierzowym

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Z osobliwości macierzy C, a więc i C^T wynika istnienie rozwiązania $(\alpha,\beta)^T \neq (0,0)^T$ powyższego układu, co przeczy liniowej niezależności funkcji $\tilde{\varphi}_1$, $\tilde{\varphi}_2$.

Twierdzenie 9.2. *Załóżmy, że $a_0, a_1, a_2, b \in C(I,\mathbb{R})$ i $a_0(t)\neq 0$, $t\in I$. Wówczas PBN ma dokładnie jedno rozwiązanie na I wtedy i tylko wtedy, gdy PBJ z nim skojarzony ma jedyne rozwiązanie zerowe na I.*

Dowód. Ustalmy funkcję b oraz stałe γ_1 i γ_2. Niech zbiór $\{\varphi_1,\varphi_2\}$ będzie układem fundamentalnym równania (9.3) skojarzonego z równaniem (9.1) w przedziale I, zaś φ_0 - rozwiązaniem szczególnym równanania (9.1) na I. Wówczas, jako wiadomo z twierdzenia 5.5, rozwiązanie ogólne równania (9.1) na I wyraża się wzorem

$$x(t)=C_1\varphi_1(t)+C_2\varphi_2(t)+\varphi_0(t), \quad C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

Uwzględnienie warunków brzegowych (9.2), tzn. że $l_1(x)=\gamma_1$ i $l_2(x)=\gamma_2$, implikuje niejednorodny układ równań algebraicznych

$$\begin{bmatrix} l_1(\varphi_1) & l_1(\varphi_2) \\ l_2(\varphi_1) & l_2(\varphi_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 - l_1(\varphi_0) \\ \gamma_2 - l_2(\varphi_0) \end{bmatrix}.$$

Ze względu na twierdzenie Cramera, powyższy układ ma jedyne rozwiązanie, a więc PBN ma jedyne rozwiązanie na I, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1(\varphi_1) & l_1(\varphi_2) \\ l_2(\varphi_1) & l_2(\varphi_2) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Teza wynika wprost z twierdzenia 9.1.

Uwaga 9.2. Dla warunków brzegowych Dirichleta i Neumanna mamy odpowiednio

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1(t_1) & \varphi_2(t_1) \\ \varphi_1(t_2) & \varphi_2(t_2) \end{vmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1'(t_1) & \varphi_2'(t_1) \\ \varphi_1'(t_2) & \varphi_2'(t_2) \end{vmatrix}.$$

9.2 Regularne zagadnienie Sturma-Liouville'a

Równanie

$$(p(t)x')' + (q(t) + \lambda r(t))\, x = 0 \tag{9.15}$$

z warunkami brzegowymi

$$\begin{cases} \alpha_1 x(t_1) + \alpha_2 x'(t_1) = \gamma_1 \\ \beta_1 x(t_2) + \beta_2 x'(t_2) = \gamma_2 \end{cases}, \tag{9.16}$$

gdzie funkcje $p, q, r : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$, p jest różniczkowalna i $p(t) \neq 0$ dla $t \in I$ oraz stałe α_i, β_i, $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$ są dane, zaś $\lambda \in \mathbb{C}$ jest parametrem nazywamy regularnym zagadnieniem Sturma-Liouville'a. Jeśli $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, tzn. że

$$\begin{cases} \alpha_1 x(t_1) + \alpha_2 x'(t_1) = 0 \\ \beta_1 x(t_2) + \beta_2 x'(t_2) = 0 \end{cases}, \tag{9.17}$$

to mówimy, że problem brzegowy (9.15), (9.17) jest jednorodnym regularnym zagadnieniem Sturma-Liouville'a. W przeciwnym razie problem brzegowy (9.15), (9.16) jest niejednorodnym regularnym zagadnieniem Sturma-Liouville'a. Zwróćmy uwagę, że równanie (9.15) można uzyskać z równania (9.3), kładąc $a_0 = p$, $a_1 = p'$, $a_2 = q + \lambda r$. Rozwiązanie zagadnienia Sturma-Liouville'a polega na wyznaczeniu wszystkich par (λ, x) spełniających problem (9.15), (9.16). Należy zaznaczyć, że współczynnik a_2 może teraz przyjmować wartości zespolone, gdyż $\lambda \in \mathbb{C}$. A skoro tak, to dopuszczamy też rozwiązania x o wartościach zespolonych.

Definicja 9.1. Liczbę $\lambda \in \mathbb{C}$, dla której regularne zagadnienie Sturma-Liouville'a (9.15), (9.16) ma niezerowe rozwiązanie x nazywamy wartością własną tego problemu. Rozwiązanie x nazywamy wtedy jego funkcją własną i oznaczamy symbolem φ. Analogicznie definiuje się te pojęcia dla wszystkich problemów Sturma-Liouville'a (9.1), (9.2), tzn. takich, że współczynniki w równaniu (9.1) zależą od parametru λ.

Twierdzenie 9.3. *Załóżmy, że $p \in C^1(I, \mathbb{R})$ i $q, r \in C(I, \mathbb{R})$. Niech λ będzie warością własną problemu (9.15), (9.17), zaś φ_1, φ_2 odpowiadającymi jej funkcjami własnymi. Wówczas funkcje φ_1, φ_2 są liniowo zależne.*

Twierdzenie 9.4. *Załóżmy, że $p \in C^1(I, \mathbb{R})$, $q, r \in C(I, \mathbb{R})$ i $r(t) > 0$, $t \in I$. Niech λ_1, λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, będą warościami własnymi problemu (9.15), (9.17), zaś φ_1, φ_2 odpowiadającymi im funkcjami własnymi. Wówczas funkcje φ_1, φ_2 są ortogonalne w przestrzeni $L^2(I)$ z funkcją wagową r, tzn. że*

$$\int_{t_1}^{t_2} r(t)\varphi_1(t)\varphi_2(t)\, dt = 0.$$

Ponadto funkcje φ_1, φ_2 są liniowo niezależne.

Twierdzenie 9.5. *Jeśli $p \in C^1(I, \mathbb{R})$, $q, r \in C(I, \mathbb{R})$ i $r(t) > 0$, $t \in I$, to wartości własne problemu (9.15), (9.17) są rzeczywiste.*

Twierdzenie 9.6. *Załóżmy, że $p \in C^1(I, \mathbb{R})$, $q, r \in C(I, \mathbb{R})$ i $p(t), r(t) > 0$, $t \in I$. Wtedy zbiór wartości własnych problemu (9.15), (9.17) jest przeliczalny i istnieje ciąg (λ_n, φ_n), $n \in \mathbb{N}_0$ wartości własnych i funkcji własnych z dokładnością do stałej, tego problemu taki, że:*

1. $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$,
2. *φ_n ma dokładnie n miejsc zerowych w przedziale (t_1, t_2),*
3. $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

Przykład 9.5. Wyznaczyć wartości własne i funkcje własne problemu brzegowego

$$\begin{cases} x'' + \lambda x = 0 \\ x(0) = 0 \\ x(\pi) = 0 \end{cases} . \tag{9.18}$$

Z twierdzenia 9.6 zastosowanego do naszego zagadnienia wnioskujemy w szczególności, że zbiór wartości własnych jest przeliczalny i są one rzeczywiste.

Przypuśćmy, że $\lambda = 0$ jest wartością własną. Wówczas rozwiązanie ogólne równania różniczkowego ma postać

$$x = C_1 + C_2 t.$$

Po uwzględnieniu warunków brzegowych otrzymujemy natychmiast, że $x(t) \equiv 0$ i mamy sprzeczność.

Sprawdźmy przypadek, gdy $\lambda < 0$. Rozwiązanie ogólne dane jest teraz wzorem

$$x = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}t} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}t}.$$

Warunki brzegowe generują układ równań, który można zapisać macierzowo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}\pi} & e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}\pi} & e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} - e^{\sqrt{-\lambda}\pi} \neq 0,$$

a więc $C_1 = C_2 = 0$, $x(t) \equiv 0$ i znowu dostajemy sprzeczność.

Jeśli $\lambda > 0$, to

$$x = C_1 \cos\sqrt{\lambda}t + C_2 \sin\sqrt{\lambda}t$$

jest rozwiązaniem ogólnym. Z warunków brzegowych wynika, że $C_1 = 0$ i $C_2 \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$. Zatem, żeby x nie było rozwiązaniem tożsamościowo równym zeru, to $C_2 \neq 0$ i $\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$. A to pociąga $\sqrt{\lambda}\pi = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$. Ostatecznie

$$\lambda_{n-1} = n^2, \quad \varphi_{n-1}(t) = C_2 \sin nt, \; C_2 \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Widzimy, że otrzymany wynik potwierdza tezę twierdzenia 9.6.

Przykład 9.6. Szczególnym przypadkiem równania (9.15) jest jednowymiarowe stacjonarne równanie Schrödingera

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\psi + V(x)\psi = E\psi. \tag{9.19}$$

Szukane są pary (E, ψ), gdzie $E \in \mathbb{R}$, $\psi = \psi(x)$ jest funkcją zespoloną; x oznacza położenie cząstki. W tym modelu matematycznym zakłada się, że cząstka porusza się w potencjalnym polu sił niezależnym od czasu $V(x)$ lub jest odizolowana od otoczenia. Symbol m oznacza masę cząstki, E jej energię całkowitą, która w tym przypadku nie zależy od czasu t, zaś $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, gdzie h jest stałą Plancka. Równanie (9.19) można zapisać w postaci

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m}\psi'\right)' + (-V(x) + E)\,\psi = 0. \tag{9.20}$$

Zarówno równanie (9.19), jak i jego wersja ewolucyjna

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\Psi + V(x)\Psi, \tag{9.21}$$

dla różnych wymiarów, są podstawowymi równaniami nierelatywistycznej mechaniki kwantowej, sformułowanymi przez E. Schrödingera w 1926 roku. W ogólności, potencjał V w równaniu (9.21) może zależeć od t. Mechanika kwantowa to teoria fizyczna rozszerzająca mechanikę klasyczną, konieczna do poprawnego opisu mikroświata, tj. pojedynczych cząstek elementarnych i ich układów jak atomy czy jony. Jest też konieczna do wyjaśnienia niektórych zjawisk makroskopowych jak nadprzewodnictwo czy nadciekłość.

Równanie Schrödingera wiąże własności falowe i korpuskularne materii. Według hipotezy de Broglie'a dualizmu korpuskularno-falowego każda cząstka kwantowa, taka jak na przykład elektron, jest reprezentowana przez falę materii, której amplituda określa prawdopodobieństwo znalezienia cząstki. Zgodnie z zasadą nieoznaczoności Heinsenberga, nie jest możliwa obserwacja położenia cząstki elementarnej w konkretnym czasie. Charakterystyczną cechą mechaniki kwantowej jest to, że nie opisuje ona wprost zmienności (ewolucji) mierzalnych wielkości fizycznych jak położenie ciała czy jego prędkość, lecz z pewnym prawdopodobieństwem. Probabilistyczny sens funkcji falowej $\Psi(t,x)$ podał M. Born w 1926 roku. Wyjaśnił on, że funkcja $|\Psi(t,x)|$ oznacza gęstość prawdopodobieństwa, z jakim cząstka znajduje się w ustalonej chwili t w położeniu x. W naszym modelu, w którym $V = V(x)$, prawdopodobieństwo to nie zależy od t, ponieważ zachodzi związek

$$\Psi(t,x) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\psi(x), \tag{9.22}$$

a stąd $|\Psi(t,x)| = |\psi(x)|$. Jeśli V zależy od t, to wspomniane prawdopodobieństwo też zależy od t.

Konieczność teoretycznego wprowadzenia kwantyzacji układów fizycznych na początku XX wieku wynikła z nowo odkrytych faktów doświadczalnych. Stwierdzono bowiem, że niektóre układy fizyczne nie przyjmują dowolnych wartości energii, a jedynie wartości dyskretne. Odkryto na przykład, że pojedyncze atomy dają dyskretne widmo promieniowania, ciała stałe emitują promieniowanie termiczne o tzw. rozkładzie ciała doskonale czarnego, które dało się wyjaśnić, jedynie przyjmując emisję promieniowania w postaci dyskretnych porcji – fotonów; jony w ciałach stałych mają dyskretne energie, co ma wpływ na charakterystyczną wartość ich ciepła właściwego. Twierdzenie 9.6 zastosowane do stacjonarnego równanania Schrödingera (9.19) potwierdza te fizyczne obserwacje. Można przyjąć odpowiednio duży przedział $I = [x_1, x_2]$ i przykładowo warunki Dirichleta na jego brzegu: $\psi(x_1) = 0$, $\psi(x_2) = 0$.

9.3 Zadania

1. Wyznaczyć wartości własne i funkcje własne problemu brzegowego

$$\begin{cases} x'' + \lambda^2 x = 0 \\ x(0) = x(\pi) \\ x'(0) = x'(\pi) \end{cases}. \tag{9.23}$$

Rozdział 10

Metoda szeregów potęgowych

Spróbujmy znaleźć rozwiązanie problemu początkowego

$$x' = x, \quad x(0) = 1 \tag{10.1}$$

w postaci sumy szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ o dodatnim promieniu zbieżności. Przypuśćmy więc, że

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Po zróżniczkowaniu

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n,$$

wstawieniu do równania w problemie Cauchy'ego (10.1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

i uwzględnieniu warunku początkowego w tym zagadnieniu

$$x(0) = a_0$$

otrzymujemy zależność rekurencyjną na współczynniki szeregu

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ (n+1) a_{n+1} = a_n, \quad n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}.$$

W konsekwencji

$$a_n = \frac{1}{n!},$$

a szukane rozwiązanie przyjmuje postać

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Definicja 10.1. Funkcja $x : \mathbb{R} \supset (a,b) \to \mathbb{R}$ jest analityczna, gdy dla dowolnego $t_0 \in (a,b)$ zachodzi wzór

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n,$$

gdzie (a_n) jest ciągiem liczb rzeczywistych, a powyższy szereg jest zbieżny do $x(t)$ dla każdego t z pewnego otoczenia punktu t_0.

Definicja 10.2. Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$, gdzie U jest zbiorem otwartym, jest analityczna, gdy dla dowolnego $(t_0, x_0) \in U$ zachodzi wzór

$$f(t,x) = \sum_{\substack{n=0 \\ n_1+n_2=n}}^{\infty} a_{n_1 n_2}(t-t_0)^{n_1}(x-x_0)^{n_2},$$

gdzie $(a_{n_1 n_2})$ jest ciągiem liczb rzeczywistych, a powyższy szereg jest zbieżny do $f(t,x)$ dla każdego (t,x) z pewnego otoczenia punktu (t_0, x_0).

Uwaga 10.1. Można powiedzieć, że funkcje $x : \mathbb{R} \supset (a,b) \to \mathbb{R}$ i $f : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$, gdzie U jest zbiorem otwartym, są analityczne, gdy są lokalnie rozwijalne w szereg Taylora. Przykładem funkcji, która jest klasy C^∞, ale nie jest analityczna jest funkcja Cauchy'ego

$$x(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}.$$

Analityczność tej funkcji psuje punkt $t_0 = 0$, gdyż $x^{(n)}(0) = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ i wobec tego promień zbieżności szeregu Taylora o środku w $t_0 = 0$ (szeregu Maclaurina) generowanego przez funkcję x jest równy zeru.

Uwaga 10.2. Każdy wielomian jest funkcją analityczną na $\mathbb{R}$.

Zauważmy, że funkcja $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ generująca równanie w zagadnieniu początkowym (10.1) jest analityczna i znalezione powyżej rozwiązanie tego problemu też jest analityczne. Na podstawie twierdzenia 3.9 Picarda jest to jedyne rozwiązanie analityczne, a nawet jest ono jedyne w klasie C^1. Okazuje się, że prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 10.1 (Cauchy-Kowalewska, lokalne istnienie i jednoznaczność rozwiązań analitycznych)**.** *Załóżmy, że $f : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$ jest funkcją analityczną, gdzie U jest zbiorem otwartym. Wówczas dla dowolnego punktu $(t_0, x_0) \in U$ problem Cauchy'ego*

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{10.2}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie analityczne (lokalne).

Bibliografia

[1] Bierski F., *Struktury algebraiczne. Elementy algebry liniowej. Analiza macierzy z zastosowaniem do układów różniczkowych i form kwadratowych*, Wyd. AGH, Kraków 1990.

[2] Demidowicz B.P., *Matematyczna teoria stabilności*, WNT, Warszawa 1972.

[3] Gantmacher F.R., *The Theory of Matrices*, AMS, Providence 2000.

[4] Górniewicz L., Ingarden R.S., *Analiza matematyczna dla fizyków*, tom 2, Wyd. UMK, Toruń 1995.

[5] Hartman P., *Ordinary Differential Equations*, SIAM, Philadelphia 2002.

[6] Kamont Z., *Równania różniczkowe zwyczajne*, Wyd. UG, Gdańsk 1999.

[7] Matwiejew N.M., *Zadania z równań różniczkowych zwyczajnych*, PWN, Warszawa 1976.

[8] Musielak J., *Wstęp do analizy funkcjonalnej*, PWN, Warszawa 1976.

[9] Myjak J., *Równania różniczkowe*, Wyd. AGH, Kraków 2016.

[10] Ombach J., *Wykłady z równań różniczkowych zwyczajnych*, Wyd. UJ, Kraków 1996.

[11] Pelczar A., Szarski J., *Wstęp do teorii równań różniczkowych*, Część I, PWN, Warszawa 1987.

[12] Pelczar A., *Wstęp do teorii równań różniczkowych*, Część II, PWN, Warszawa 1989.

[13] Rabczuk R, *Elementy nierówności różniczkowych*, PWN, Warszawa 1976.

[14] Szarski J., *Differential Inequalities*, PWN, Warszawa 1967.

Spis treści