Szeregi trygonometryczne Fouriera

Def. $f : \mathbb{R} \supset [-l, l] \to \mathbb{R}$ całkowalna

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$ – szereg Fouriera funkcji f

$$a_n := \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx , \quad a_0 := \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \, dx$$

$$b_n := \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx$$ – współczynniki Fouriera

Def. Funkcja f jest rozwijalna w szereg Fouriera, gdy

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad x \in [-l, l].$$

Def. Funkcja całkowalna $f : \mathbb{R} \supset [-l, l]$ spełnia warunki Dirichleta, gdy:

1. przedział $[-l, l]$ da się podzielić na skończoną ilość przedziałów, w których f jest monotoniczna,
2. f ma co najwyżej skończoną ilość punktów nieciągłości I rodzaju i
$$\forall x_0 \in (-l, l) \quad f(x_0) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) + \lim_{x \to x_0^+} f(x) \right),$$
3. $f(-l) = f(l) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \to -l^+} f(x) + \lim_{x \to l^-} f(x) \right).$

Tw. Jeżeli funkcja f spełnia warunki Dirichleta, to jest rozwijalna w szereg Fouriera.

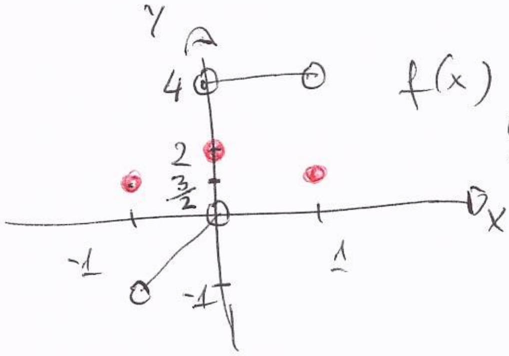
Tw. 1. f – parzysta $\Rightarrow b_n = 0$, szereg cosinusów

2. f – nieparzysta $\Rightarrow a_0 = a_n = 0$, szereg sinusów

wtedy w a_0, a_n, b_n : $\frac{2}{l} \int_0^l \ldots \, dx$.

① Funkcję
$$f(x)=\begin{cases} x, & -1<x<0 \\ 4, & 0<x<1 \end{cases}$$
rozwinąć w szereg Fouriera.

Modyfikujemy f:



warunki Dirichleta – OK

$l=1$

$$a_0=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0} x\,dx+\int_{0}^{1} 4\,dx=\frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{0}+4x\Big|_{0}^{1}=-\frac{1}{2}+4=3\tfrac{1}{2}$$

$$a_n=\int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x\,dx=\int_{-1}^{0} x\cos n\pi x\,dx+\int_{0}^{1} 4\cos n\pi x\,dx=$$

$$=\left[\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x+\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\right]_{-1}^{0}+\frac{4}{n\pi}\left[\sin n\pi x\right]_{0}^{1}=\frac{1}{n^2\pi^2}\left[1-(-1)^n\right]$$

• $\int x\cos n\pi x\,dx=\left\{\begin{matrix} u=x \\ v'=\cos n\pi x\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} u'=1 \\ v=\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\end{matrix}\right\}=\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x-\frac{1}{n\pi}\int \sin n\pi x\,dx$

$$=\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x+\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x$$

$$b_n=\int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x\,dx=\int_{-1}^{0} x\sin n\pi x\,dx+\int_{0}^{1} 4\sin n\pi x\,dx=$$

$$=\left[-\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x+\frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\right]_{-1}^{0}-\frac{4}{n\pi}\left[\cos n\pi x\right]_{0}^{1}=$$

$$=-\frac{1}{n\pi}(-1)^n-\frac{4}{n\pi}\left[(-1)^n-1\right]=\frac{1}{n\pi}\left[4-5(-1)^n\right]$$

•• $\int x\sin n\pi x\,dx=\left\{\begin{matrix} u=x \\ v'=\sin n\pi x\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} u'=1 \\ v=-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\end{matrix}\right\}=$

$$=-\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x+\frac{1}{n\pi}\int \cos n\pi x\,dx=-\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x+\frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x$$

A stąd

$$\boxed{f(x)=\frac{7}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2\pi^2}\left[1-(-1)^n\right]\cos n\pi x+\frac{1}{n\pi}\left[4-5(-1)^n\right]\sin n\pi x\right),\quad x\in[-1,1].}$$

Korzystając z tego rozwinięcia możemy np. obliczyć sumę szeregu liczbowego $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ $\cancel{=\frac{\pi^2}{8}}$.

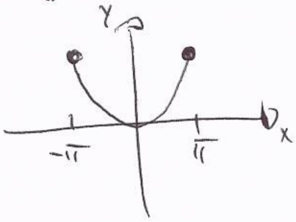
Połóżmy $x = 0$:

$$2 = \frac{7}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2}\left[1-(-1)^n\right]$$

$$2 = \frac{7}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^2\pi^2}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

(2) Funkcję $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$ rozwinąć w szereg Fouriera. Korzystając z otrzymanego rozwinięcia, obliczyć sumy szeregów: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$.



warunki Dirichleta – OK

f – parzysta, $l = \pi$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{3\pi}x^3\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{n}\sin nx + \frac{2x}{n^2}\cos nx - \frac{2}{n^3}\sin nx\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{2\pi}{n^2}(-1)^n\right) = (-1)^n\frac{4}{n^2}$$

- $\int x^2\cos nx\,dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2 \\ v' = \cos nx \end{matrix} \middle| \begin{matrix} u' = 2x \\ v = \frac{1}{n}\sin nx \end{matrix}\right\} =$

$$= \frac{x^2}{n}\sin nx - \frac{2}{n}\int x\sin nx\,dx = \frac{x^2}{n}\sin nx - \frac{2}{n}\left\{\begin{matrix} u = x \\ v' = \sin nx \end{matrix} \middle| \begin{matrix} u' = 1 \\ v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{x^2}{n}\sin nx + \frac{2x}{n^2}\cos nx - \frac{2}{n^2}\int \cos nx\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{n}\sin nx + \frac{2x}{n^2}\cos nx - \frac{2}{n^3}\sin nx$$

A zatem

$$\boxed{x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx, \quad x \in [-\pi, \pi]}$$

$x = \pi \Rightarrow \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}$, $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

$x = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}$, $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}}$

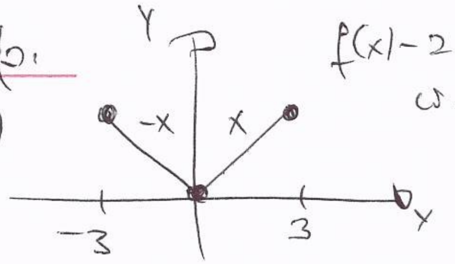
(3) Funkcję $f(x) = x$, $x \in (0,3)$ rozwinąć w szereg Fouriera:

a) cosinusów, obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$,

b) sinusów, obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \sin n$.

Odp.

a)



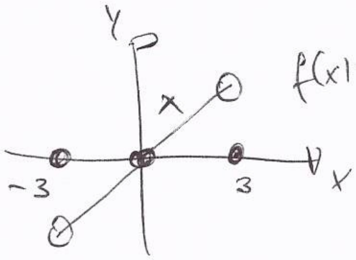
f(x) - zmodyfikowana w. Dirichleta - OK

$$f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right] \cos\frac{n\pi x}{3}, \quad x \in [-3,3]$$

$$x = 0 \Rightarrow -\frac{3}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

$$-\frac{3}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{(2n-1)^2\pi^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

b)



f(x) - zmodyfikowana w. Dirichleta - OK

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-6}{n\pi}(-1)^n \sin\frac{n\pi x}{3}$$

$$x = \frac{3}{\pi} \Rightarrow \frac{3}{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-6}{n\pi}(-1)^n \sin n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \sin n = -\frac{1}{2}$$

(4) Funkcję

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

rozwinąć w szereg Fouriera.