

## Licby zespolone

$$\begin{aligned}x^2 + 1 &= 0 & ?! \\z^2 + 1 &= 0 & \dots\end{aligned}$$

Def. Licba zespolona to pewny parę uporządkowaną  
licb rzeczywistych  $z = (x, y)$  ("punkt na płaszczyźnie").

$\mathbb{C} := \{z = (x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$  - zbiór licb zespolonych

$$\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$$

### Działania

$$z = (x, y), \quad z_1 = (x_1, y_1), \quad z_2 = (x_2, y_2)$$

$$1. \quad z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$$

$$2. \quad z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$3. \quad \frac{1}{z} = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

$$4. \quad \frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$$

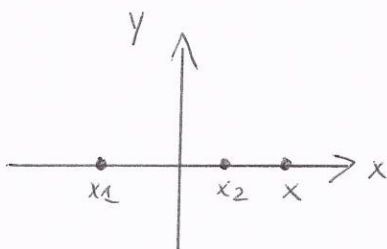
### Własności

$$1. \quad (x_1, 0) \pm (x_2, 0) = (x_1 \pm x_2, 0)$$

$$2. \quad (x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$$

$$3. \quad \frac{1}{(x, 0)} = \left( \frac{1}{x}, 0 \right)$$

$$4. \quad \frac{(x_1, 0)}{(x_2, 0)} = (x_1, 0) \cdot \frac{1}{(x_2, 0)} = (x_1, 0) \cdot \left( \frac{1}{x_2}, 0 \right) = \left( \frac{x_1}{x_2}, 0 \right)$$



### Komentarz

Wyciek każdego z wprowadzonych działań zamieszczonego do zbioru  
 $\{z = (x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$  należy do tego zbioru. Ponieważ działania  
te można wtedy utożsamiać ze zwykłymi działaniami  
w  $\mathbb{R}$ :  $+, -, \cdot, :$ .

$$\{z = (x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}, \quad (x, 0) \simeq x, \quad \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$$\textcircled{1} \quad z^2 + 1 = 0$$

$$z^2 = -1$$

$$z^2 = (-1, 0)$$

$$(x, y) \cdot (x, y) = (-1, 0)$$

$$(x^2 - y^2, 2xy) = (-1, 0)$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

$$1^\circ \quad y = 0$$

$$x^2 = -1 \quad \text{sprz.}$$

$$2^\circ \quad x = 0$$

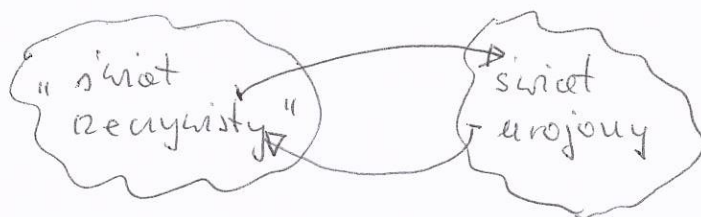
$$-y^2 = -1$$

$$y^2 = 1$$

$$y = \pm 1$$

$$z_1 = (0, 1), \quad z_2 = (0, -1)$$

Def.  $i := (0, 1)$ ,  $i^2 = -1$  - jednostka urojona



Postać algebraiczna

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$z = (x, y), \quad x \simeq (x, 0), \quad y \simeq (0, y)$$

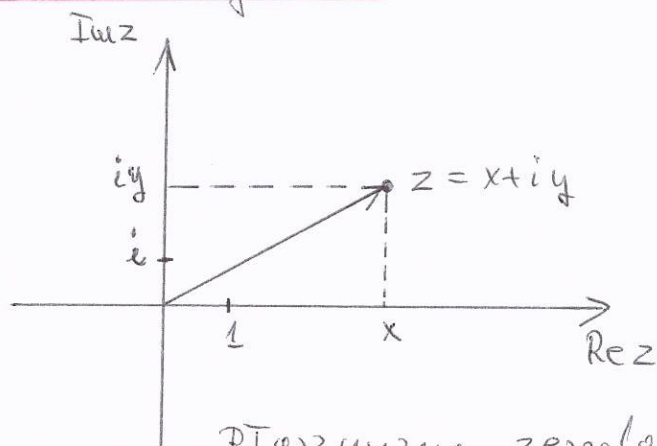
$$L = z = (x, y) \#$$

$$\oplus = x + iy = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = (x, 0) + (0, y) = (x, y)$$

$$L = \mathbb{P} - \text{OK}$$

$$x = \operatorname{Re} z - \text{część rzeczywista}$$

$$y = \operatorname{Im} z - \text{część urojona}$$



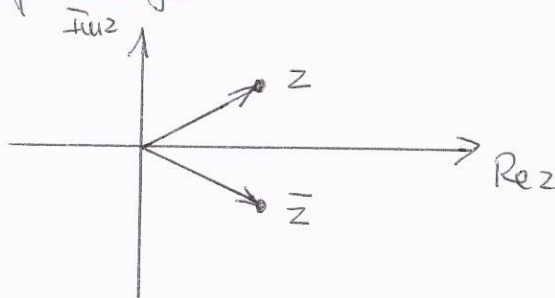
Definiowanie zespolone

Def.  $z_1 = z_2 \iff (\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2, \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2)$

## Sprzżenie liczby zespolonej

$$z = x + iy$$

$$\bar{z} := x - iy$$



## Własności

$$1. \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$$

$$2. \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$3. \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad z_2 \neq 0$$

$$4. \overline{\bar{z}} = z$$

## Komentarz

1. Dodawanie, odejmowanie i mnożenie liczb zespolonych w postaci algebraicznej wykonuje się tak, jak dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów zmiennej „i”, przyjmując, że  $i^2 = -1$ .

2. Przy dzieleniu przez liczbę zespoloną  $z = x + iy$  należy licznik i mianownik pomnożyć przez sprzężenie  $\bar{z} = x - iy$ , aby w mianowniku uzyskać liczbę rzeczywistą.

$$\textcircled{1} (1 + 2i) \cdot (1 - 3i) = 1 - 3i + 2i - 6i^2 = 1 - i + 6 = 7 - i$$

$$(1, 2) \cdot (1, -3) = (7, -1)$$

$$\textcircled{2} \frac{1 + 2i}{1 + i} = \frac{(1 + 2i) \cdot (1 - i)}{(1 + i) \cdot (1 - i)} = \frac{1 - i + 2i - 2i^2}{1 - i^2} = \frac{1 + i + 2}{1 + 1} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\frac{(1, 2)}{(1, 1)} = (1, 2) \cdot \frac{1}{(1, 1)} = (1, 2) \cdot \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

## Moduł i argument liczby zespolonej

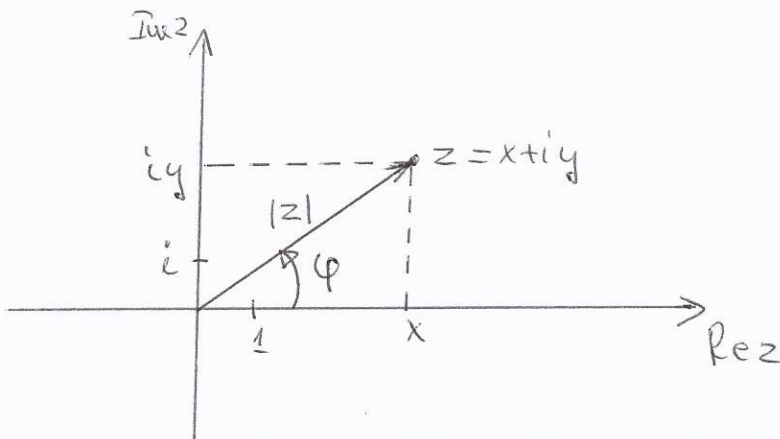
$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} - \text{moduł}$$

$$z \neq 0$$

$$\varphi \in \mathbb{R} : \begin{cases} \cos \varphi = \frac{x}{|z|} \\ \sin \varphi = \frac{y}{|z|} \end{cases}$$

$$\text{Arg } z := \varphi - \text{argument}$$

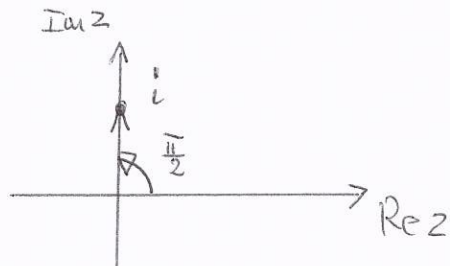
$$\varphi \in (0, 2\pi), \quad \arg z := \varphi - \text{argument główny}$$



$$\textcircled{1} \quad i = (0, 1) = 0 + 1i$$

$$|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\arg i = \frac{\pi}{2}$$



## Własności modułu

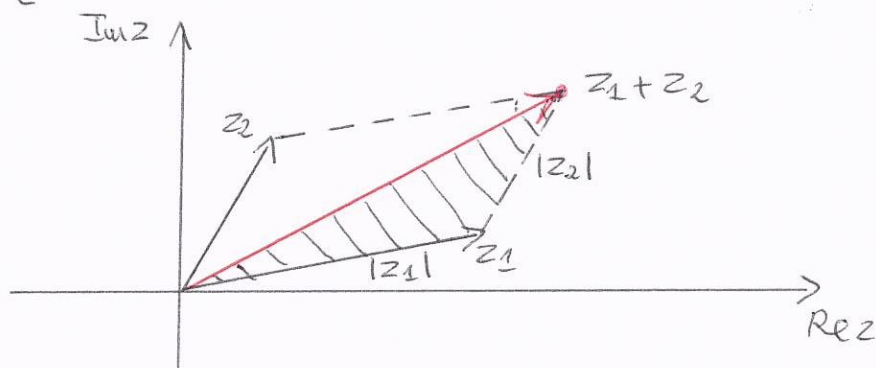
$$1. \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| - \text{nieówność trójkąta}$$

$$2. \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$3. \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0$$

$$3. \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

Ad. 1



## Komentarz

Moduł liczby zespolonej jest uogólnieniem wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej. Geometrycznie moduł liczby zespolonej  $z$  jest odległością punktu " $z$ " od początku układu współrzędnych.

$$z = x, \quad |z| = \sqrt{x^2} = |x|$$

## Wartość argumentu

$$1. \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2. \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$$

$$3. \operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2, \quad z_2 \neq 0$$

Tw.  $\varphi_1 = \operatorname{Arg} z_1, \quad \varphi_2 = \operatorname{Arg} z_2$

$$1. z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$2. \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

## Portret trygonometryczny

$$z \neq 0$$

$$z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$L = z = (x, y)$$

$$\begin{aligned} P &= |z| \cdot \left( \frac{(x, 0)}{|z|} + (0, 1) \cdot \frac{(y, 0)}{|z|} \right) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = \\ &= (x, 0) + (0, y) = (x, y) \end{aligned}$$

$$L = P \quad - \text{OK}$$

## Potęgowanie i pierwiastkowanie

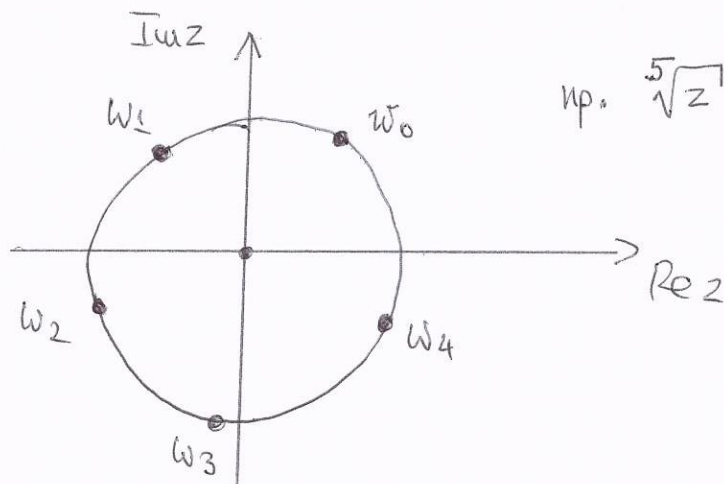
$$z \neq 0, \quad z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad - \text{ wzór de Moivre'a}$$

$$\sqrt[n]{z} := \{ w \in \mathbb{C} : w^n = z \} \quad , \text{ wzór de Moivre'a}$$

$$\sqrt[n]{z} = \{ w_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) : k = 0, 1, \dots, n-1 \}$$

- Zbiór złożony z  $n$  elementów (liczb zespolonych)  $w_k$  leży na okręgu o promieniu  $R = \sqrt[n]{|z|}$  (pierwiastek arytmetyczny) i środku  $S = (0, 0)$ . „Punkty”  $w_k$  na okręgu są równo oddalone od siebie.



$$\text{np. } \sqrt[5]{z} = \{ w_0, w_1, w_2, w_3, w_4 \}$$

## Zadanie

Obliczyć (w 1, 2, 3 wynik podać w postaci algebraicznej):

1.  $(1+i)^{2010}$

2.  $\sqrt{1}$

3.  $\sqrt[3]{1}$

4.  $\sqrt{1+i}$