

I Rok, Wydział Górnictwa i Geoinżynierii AGH

Jastrzębie Zdrój

Zadania z MATEMATYKI

ZESTAW 2

Całki nieoznaczone

1. Stosując twierdzenie o całkowaniu przez części, obliczyć:

$$\int x \sin 4x dx, \quad \int x^2 \cos 5x dx, \quad \int (2x+3) e^{6x} dx, \quad \int x^3 e^x dx, \quad \int e^{4x} \cos 3x dx, \quad \int \ln x dx, \\ \int \arctg x dx, \quad \int x \ln x dx, \quad \int x \arctg x dx, \quad \int \frac{x}{e^x} dx, \quad \int \sin^2 x dx, \quad \int \cos^2 x dx.$$

2. Stosując twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie, obliczyć:

$$\int \sqrt{3x+1} dx, \quad \int x \sqrt{2x-5} dx, \quad \int \frac{x}{\sqrt{4x+1}} dx, \quad \int \frac{\sqrt{2x-1}}{x} dx, \quad \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{2x^2-1}}, \quad \int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x+1}} dx, \\ \int x \sqrt{x^2+3} dx, \quad \int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} dx, \quad \int \operatorname{ctg} x dx, \quad \int \frac{\ln x}{x} dx, \quad \int x e^{x^2} dx, \quad \int \frac{e^{3x}}{1+e^{6x}} dx.$$

3. Obliczyć całki funkcji wymiernych:

$$\int \frac{dx}{x(x-1)^2}, \quad \int \frac{dx}{x^4+2x^3}, \quad \int \frac{dx}{x^2(4x-3)^2}, \quad \int \frac{dx}{3x^2+5}, \quad \int \frac{2x-3}{x^2+x+1} dx, \quad \int \frac{x dx}{x^2-4}, \quad \int \frac{4x^3+3x^2-2}{x^4+x^3-2x+1} dx, \\ \int \frac{dx}{4x^2-1}, \quad \int \frac{x+1}{x^2+x-2} dx, \quad \int \frac{dx}{x^5-x^2}, \quad \int \frac{x^2+1}{x^2-4} dx, \quad \int \frac{x^2+x+1}{x^2+2} dx, \quad \int \frac{x^3+x-1}{x^3-9x} dx, \quad \int \frac{x^4+2x^3+x-1}{x^2-9} dx, \\ \int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} dx, \quad \int \frac{x^3}{x^3+x+2} dx.$$

4. Obliczyć całki:

$$\int (x^3+4)^2 dx, \quad \int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x^4} dx, \quad \int \cos \ln x dx, \quad \int \sin \ln x dx, \quad \int \ln^2 x dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}, \quad \int \frac{\sqrt{2x+4}}{x} dx, \\ \int \frac{\sqrt{4x-3}}{x} dx, \quad \int \frac{\sqrt{x+3}}{3x+4} dx, \quad \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx.$$

Całki oznaczone, zastosowania

1. Obliczyć:

$$\int_{-1}^1 x^3 dx, \quad \int_{-2}^3 (5x^4 + x^2 - 1) dx, \quad \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x} - \sqrt{x}\right) dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{5}} \sin 5x dx.$$

2. Obliczyć pola obszarów ograniczonych krzywymi:

- a) $y = x^2, y = x,$
- b) $y = x^2, y = \sqrt{x},$
- c) $y = x^2, y = 32 - x^2,$
- d) $y = -x, y = x^2 - 2,$
- e) $y = x^2, y = x^3,$
- f) $y = x^2, y = 3x^2, y = 5,$
- g) $y = x^2 - 4, y = -6x^2 + 3x,$
- h) $y = x^2, y = 5x + 6.$

3. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $y = \sin x$, osią OX i prostymi: $x = -\pi$, $x = \pi$.
4. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $y = e^x$, osiami: OX , OY i prostą $x = 1$.
5. Obliczyć długości krzywych:
 - a) $y = 2x\sqrt{x}$, $x \in [0, 2]$,
 - b) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$, $x \in [1, e]$,
 - c) $y = \ln \sin x$, $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$,
 - d) $y = 1 - \ln \cos x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$,
 - e) $y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$, $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$,
 - f) $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin \sqrt{x}$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
6. Wyznaczyć pole koła i długość okręgu o promieniu R (można przyjąć dla ułatwienia obliczeń, że środkiem jest punkt $(0, 0)$).