

10.6. Zadania

1. Znaleźć całki ogólne następujących równań:

- $3u_x + 5u_y - xyu = 0;$
- $u_x - u_y + yu = 0;$
- $u_x + 4u_y - xu = x;$
- $x^2u_x - 2u_y - xu = x^2;$
- $x^2u_x + xyu_y + xu = x - y;$
- $xu_x + u_y = e^u.$

2. Znaleźć rozwiązania następujących problemów:

- $u_x + xu_y = 1, \quad u(0, y) = e^y;$
- $u_x + uu_y = 0, \quad u(x, 0) = x^3;$
- $xu_x + yu_y = 2u, \quad u(x, x^2) = x^3.$

3. Znaleźć rozwiązanie równania

$$3yu_x - 2xu_y = 0$$

spełniające warunek:

- $u(x, y) = x^2$ na prostej $y = x;$
- $u(x, y) = 1$ na krzywej $3y^2 + 2x^2 = 4;$
- $u(x, y) = 2x$ na krzywej $2x^2 - 3y^2 = 4.$

4. Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_x - 6u_y = 2x$$

spełniające warunek:

- $u(x, y) = 0$ na prostej $y = -6x + 2;$
- $u(x, y) = x^2 + x$ na paraboli $y = -x^2;$
- $u(x, y) = x^2$ na prostej $y = -6x.$

5. Znaleźć rozwiązanie równania

$$4u_x + 8u_y - u = 1$$

spełniające warunek:

- $u(x, y) = \cos x$ na prostej $y = 3x;$
- $u(x, y) = x$ na prostej $y = 2x;$
- $u(x, y) = xe^{\frac{x}{4}} - 1$ na paraboli $y = x^2.$

6. Znaleźć rozwiązanie równania

$$yu_x + x^2u_y = xy$$

spełniające warunek:

- $u(x, y) = 4x$ na krzywej $y = x^{3/2};$
- $u(x, y) = x^3 + \frac{1}{2}x^2$ na krzywej $3y^2 = 2x^3;$
- $u(x, y) = \frac{1}{2}x^2$ na krzywej $y = 0.$

7. Znaleźć całki ogólne następujących równań

- $y^2u_x - xyu_y = x(u - 2);$
- $x^2u_x - (y - x)u_y = 3x^2;$

$$c) (x^3 + 3xy^2)u_x + 2y^3u_y + 2y^3zu_z = 0;$$

$$d) x(x + y)u_x - y(x + y)u_y = (y - x)(2x + 2y + u);$$

$$e) xuu_x - yuu_y = y^2 - x^2;$$

$$f) (y + xu)u_x - (x + yu)u_y = x^2 - y^2.$$

(Wskazówka: Zauważyć, że: d) $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y}$ oraz $\frac{dx+dy}{x+y} = \frac{du}{-(2x+2y+u)}$;

$$e) \frac{xdx+ydy}{u} = -du \text{ oraz } \frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y}; \quad f) \frac{xdx+ydy}{u} = du \text{ oraz } \frac{d(x+y)}{u-1} = \frac{du}{x+y}.$$

8. Znaleźć rozwiązania problemów:

- $u_x - xu_y = 4, \quad u(x, y) = 0$ dla $y = 2x;$
- $xu_x + yu_y = xyu, \quad u(x, y) = 1$ dla $y = x^2;$
- $(x + u)u_x + (y + u)u_y = 0, \quad u(x, y) = x + 1$ dla $y = 2x;$
- $x^3u_x - yu_y = u, \quad u(x, y) = 0$ dla $y = x^2 - 1;$
- $u_x - y^3u_y = 1/(\sin u), \quad u(x, y) = 0$ dla $y = \sqrt{x};$
- $u_x + y^2u_y = \cos u, \quad u(x, y) = 0$ dla $x = y^2.$

9. Znaleźć rozwiązania problemów:

- $xu_x + yu_y = yu, \quad u(x, x) = x;$
- $x^2u_x + y^2u_y = yu^2, \quad u(x, x) = 2x;$
- $xu_x + yu_y = x + y, \quad u(1, y) = y^2;$
- $yu_x - xu_y = 0, \quad u(0, y) = y^2;$
- $(1 + x^2)u_x + xyu_y = 0, \quad u(x, 2x) = x^2;$
- $u_x - y^2u_y = u, \quad u(x, 1/x^2) = 1.$

10. Znaleźć rozwiązanie przechodzące przez zadaną krzywą:

- $xu_x + yu_y = yu^2, \quad x = s, y = s^2, z = 1;$
- $(x^2 + y^2)u_x + 2xyu_y = u, \quad x = 2s, y = s, z = 1;$
- $\cos y \cdot u_x + \cos x \cdot u_y = \cos x \cdot \cos y, \quad x = \pi, y = s, u = \sin^2 s;$
- $2y(x - 3)u_x + (2x - y)u_y = y(2x - 3), \quad x^2 + y^2 = 2x, z = 0;$
- $x(y^2 + u)u_x - y(x^2 + u)u_y = (x^2 - y^2)u, \quad x^2 + y^2 = 2x, z = 0;$
- $(x - y)u_x + (y - x - u)u_y = u, \quad x = s, y = 3s, z = 1.$

(Wskazówka: Zauważyć, że: e) $xdx + ydy = du$ oraz $\frac{ydx+xdy}{xy} = \frac{du}{u}$, czyli $\frac{d(xy)}{xy} = \frac{du}{u}$; f) $dx + dy + dz = 0$ oraz $\frac{d(y-x)}{2(x-y)-u} = \frac{du}{u}$).