Tw 10. Niech U będzie rzeczywistą przestrzenią Banacha. Jeśli $a: U \times U \to \mathbb{R}$ jest formą dwuliniową, ograniczoną, symetryczną i silnie dodatnio określoną, zaś $\varphi: U \to \mathbb{R}$ jest formą liniową, ograniczoną, to (1), (2), (3) są równoważne, mają dokładnie jedno rozwiązanie $\bar{u} \in U$ i $\|\bar{u}\| \leq \frac{1}{c}\|\varphi\|_*$, gdzie $c > 0$ jest stałą w warunku silnej dodatniej określoności formy a.

Dowód z tw. 7: Równoważność

1) Z tw. 9: $B := U$, $u := \bar{u}$ – istnienie jedynego rozwiązania

2) $c\|\bar{u}\|^2 \leq a(\bar{u}, \bar{u}) = \varphi(\bar{u}) \leq \|\varphi\|_* \cdot \|\bar{u}\|$

$$\|\bar{u}\| \leq \frac{1}{c} \cdot \|\varphi\|_*$$

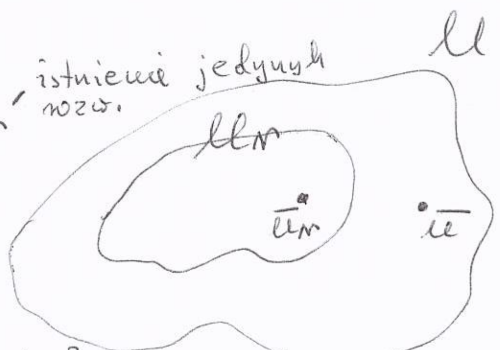
Uwaga. Jeśli w twierdzeniu 10 założymy, że U jest przestrzenią Hilberta (rzeczywistą lub zespoloną), to założenie o symetrii formy a można opuścić. Takie twierdzenie nosi nazwę: twierdzenie Laxa–Milgrama.

Tw 11. Jeśli w twierdzeniu 10 U jest rzeczywistą ośrodkową przestrzenią Hilberta, to metoda Galerkina ($U = V$) i metoda Ritza z $U_n = \mathrm{span}(u^1, \dots, u^n)$, $\{u^1, u^2, \dots\}$ – baza Schaudera przestrzeni U, są zbieżne, tzn. że $\lim_{n \to \infty} \bar{u}_n = \bar{u}$.

Dowód z tw. 7: Równoważność

Z tw. 9:

$B := U$, $G := U_n$, $u := \bar{u}$, $\tilde{u} := u_n$ istnienie jedynych rozw.



$$\|\bar{u} - \bar{u}_n\| \leq \sqrt{\frac{d}{c}} \cdot \mathrm{dist}(\bar{u}, U_n)$$

$$\bar{u} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k u^k, \quad s_n := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u^k \in U_n$$

$$0 \leq \mathrm{dist}(\bar{u}, U_n) = \inf\{\|\bar{u} - v\| : v \in U_n\} \leq \underbrace{\|\bar{u} - s_n\|}_{\to 0} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Zatem $\lim_{n \to \infty} \mathrm{dist}(\bar{u}, U_n) = 0$.

A stąd $\lim_{n \to \infty} \bar{u}_n = \bar{u}$.

Def. Ciąg (u^k) elementów przestrzeni unormowanej U nazywamy bazą Schaudera w tej przestrzeni, gdy dla każdego $u \in U$ istnieje dokładnie jeden ciąg skalarów (α_k) taki, że

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k u^k,$$

przy czym powyższy szereg jest zbieżny w sensie normy w przestrzeni U.

Uwaga Zbiór $\{u^k\}$ jest liniowo niezależny, tzn. że każdy jego skończony podzbiór jest liniowo niezależny. Bez straty ogólności weźmy podzbiór $\{u^1, \dots, u^N\}$. Załóżmy, że $\sum_{k=1}^{N} \alpha_k u^k = 0$. Zdefiniujmy

$$\tilde{\alpha}_k := \begin{cases} \alpha_k, & k \le N \\ 0, & k > N \end{cases}.$$

Wobec tego

$$0 = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k u^k = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_k u^k.$$

Ale z drugiej strony

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} 0 \cdot u^k.$$

Z jednoznaczności ciągu skalarów dla zera wynika, że $\tilde{\alpha}_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Zatem $\alpha_k = 0$, $k = 1, \dots, N$.

Tw. Przestrzeń Hilberta jest ośrodkowa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje w tej przestrzeni baza Schaudera.

Uwaga W ośrodkowej przestrzeni Banacha baza Schaudera nie musi istnieć. Przykład podał Per Enflo w 1973 roku. W nagrodę otrzymał od PTM żywą gęś!

Uwaga Przykładami baz Schaudera są:

w $C([a,b])$ – układ Schaudera,

w $L^p(0,1)$, $1 \le p < \infty$ – układ Haara.