EUKLIDESOWA PRZESTRZEŃ AFINICZNA (WEKTOROWA) RZECZYWISTA

Definicja 1

$\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot\right) \qquad \overline{u} = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \quad \overline{v} = \left(y_1, y_2, ..., y_n\right)$

$\left(\overline{u} / \overline{v}\right) := x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$ - nazywamy iloczynem skalarnym

Możemy go również oznaczać w następujący sposób:

$\left(\overline{u} / \overline{v}\right) := \overline{u} \circ \overline{v}$

Definicja 2

$\left(\overrightarrow{\mathbb{R}^n}, \circ\right)$ tę przestrzeń wektorową nad ciałem $\mathbb{R}$ z iloczynem skalarnym oznaczamy $\left(\overrightarrow{E_n}\right)$ i nazywamy euklidesową.

Definicja 3

$\left(\mathbb{R}^n, \overrightarrow{\mathbb{R}^n}, +, \cdot\right)$ - przestrzeń afiniczna, gdzie w $\overrightarrow{\mathbb{R}^n}$ wprowadzono iloczyn skalarny

Przestrzeń $\mathbb{R}^n$ zdefiniowaną z iloczynem skalarnym nazywamy przestrzenią euklidesową i oznaczamy E_n.

Definicja 4

Jeżeli w przestrzeni E_n

$\overline{u} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ to związek:

$\| \overline{u} \| := \sqrt{\left(\overline{u} / \overline{v}\right)}$ nazywamy **normą**

WNIOSEK: $\| \overline{u} \| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$

Definicja 5

$\left(E_n, \overrightarrow{E_n}, +, \cdot\right) \qquad x, y \in E_n$

to odległością nazywamy:

$d\left(x, y\right) := \| \overrightarrow{xy} \|$

Definicja 5

$\overrightarrow{E_n}$ - przestrzeń euklidesowa $\overline{u},\overline{v}\in\overrightarrow{E_n}$ $\overline{u}\neq 0\wedge\overline{v}\neq 0$

Jeżeli $\left(\overline{u}/\overline{v}\right)=0$ to mówimy, że wektory $\overline{u},\overline{v}$ są **ortogonalne.**

GEOMETRIA ANALITYCZNA PRZESTRZENI EUKLIDESOWEJ E₃

Oznaczenie:

$\left(E_n,\overrightarrow{E_n},+,\cdot\right)$ - przestrzeń euklidesowa

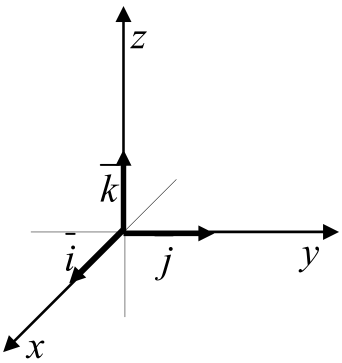
$\left(0_0,\overline{i},\overline{j},\overline{k}\right)$ - układ współrzędnych przestrzeni afinicznej

$\overline{i}:=(1,0,0)$ $\overline{j}:=(0,1,0)$ $\overline{k}:=(0,0,1)$

UWAGA:
W przestrzeni E_3 zamiast mówić, że dwa wektory są ortogonalne mówimy, że są prostopadłe. Zachodzi tam również:

$\|\overline{i}\|=\|\overline{j}\|=\|\overline{k}\|=1$ i $\overline{i}\perp\overline{j}$ $\overline{i}\perp\overline{k}$ $\overline{k}\perp\overline{j}$

UMOWA:
W E_3 przyjmujemy tzw. ortogonalny układ współrzędnych.



Definicja 1 $\overline{u},\overline{v}\in\overrightarrow{E_n}$

Kątem między wektorami $\sphericalangle\left(\overline{u},\overline{v}\right)$ nazywamy mniejszy z 2 kątów jakie one tworzą jeżeli zaczepimy je w początku układu.

UWAGA:
Dowodzi się, że:

$\overline{u}\circ\overline{v}=\|\overline{u}\|\cdot\|\overline{v}\|\cos\sphericalangle\left(\overline{u},\overline{v}\right)$, stąd $\cos\sphericalangle\left(\overline{u},\overline{v}\right)=\dfrac{\overline{u}\circ\overline{v}}{\|\overline{u}\|\cdot\|\overline{v}\|}$

Definicja 2 $\overline{u} \in \overrightarrow{E_n}$

Wersorem wektora $\overline{u}$ nazywamy wektor, który ma ten sam kierunek i zwrot ale długość równą 1.

$$\overrightarrow{wersu} \uparrow\uparrow \vec{u} \quad \wedge \quad \left\|\overrightarrow{wersu}\right\| = 1$$

WNIOSEK:

$$\overline{u} = [x_1, x_2, x_3] \quad \left\|\overline{u}\right\| \neq 1 \quad \overline{u} \neq \overline{0}$$

$$\overrightarrow{wersu} = \left[\frac{x}{\left\|\overline{u}\right\|}, \frac{y}{\left\|\overline{u}\right\|}, \frac{z}{\left\|\overline{u}\right\|} \right]$$

UWAGA:

$$\overline{u} = [u_x, u_y, u_z]$$

$$\cos\sphericalangle\left(\overline{u}, \overline{i}\right) = \frac{\overline{u} \circ \overline{i}}{\left\|\overline{u}\right\| \circ \left\|\overline{i}\right\|} = \frac{u_x}{\left\|\overline{u}\right\|}$$

$$\cos\sphericalangle\left(\overline{u}, \overline{j}\right) = \frac{\overline{u} \circ \overline{j}}{\left\|\overline{u}\right\| \circ \left\|\overline{j}\right\|} = \frac{u_y}{\left\|\overline{u}\right\|}$$

$$\cos\sphericalangle\left(\overline{u}, \overline{k}\right) = \frac{\overline{u} \circ \overline{k}}{\left\|\overline{u}\right\| \circ \left\|\overline{k}\right\|} = \frac{u_z}{\left\|\overline{u}\right\|}$$

Definicja 3.

$\cos\sphericalangle\left(\overline{u}, \overline{i}\right)$ $\cos\sphericalangle\left(\overline{u}, \overline{j}\right)$ $\cos\sphericalangle\left(\overline{u}, \overline{k}\right)$ nazywamy kosinusami kierunkowymi

WNIOSEK:

$$\overrightarrow{wersu} = \left[\cos\sphericalangle\left(\overline{u}, \overline{i}\right), \cos\sphericalangle\left(\overline{u}, \overline{j}\right), \cos\sphericalangle\left(\overline{u}, \overline{k}\right) \right]$$

UWAGA:
Wszystkie powyższe definicje i wnioski dotyczą też (odpowiednio) przestrzeni E_2.

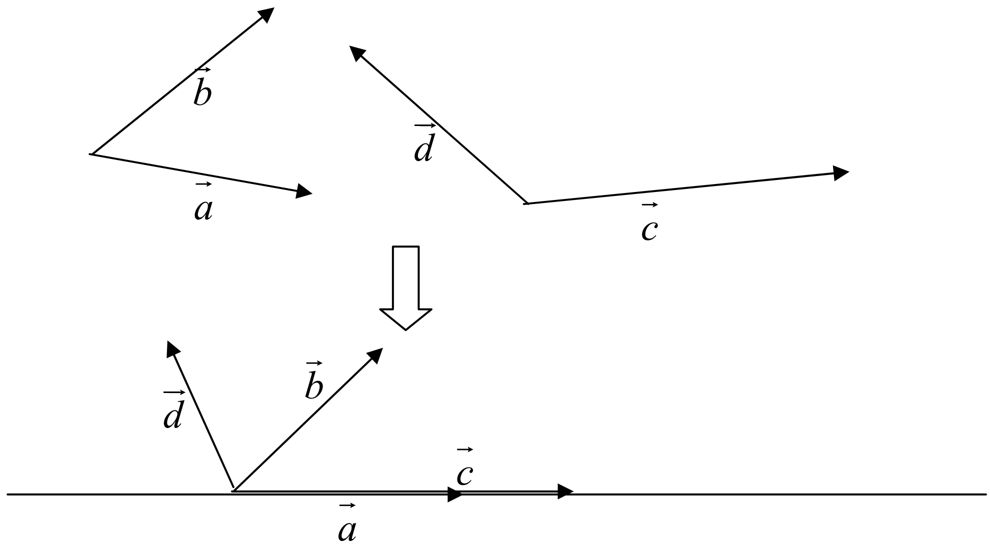
ORIENTACJA

Orientacja w $\overrightarrow{E_2}$ $\quad\quad (E_2, \overrightarrow{E_2}, +)$

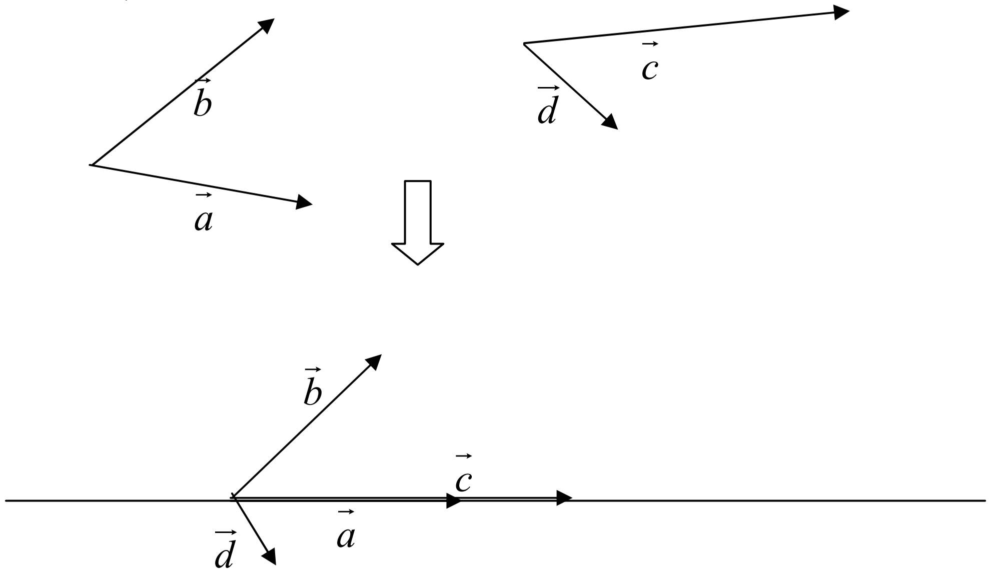
$$\underbrace{(\vec{a}, \vec{b}) \quad O \quad\quad (\vec{c}, \vec{d}) \quad O'}$$

Dwie pary wektorów liniowo niezależnych zaczepionych w punkcie O, O′

Te 2 pary wektorów nazymamy **równoskrętnymi** jeżeli poprzez przesunięcie i obrót można doprowadzić do sytuacji, że punkt O pokryje się z punktem O′, wektory $\vec{a}, \vec{c}$ leżą na tej samej prostej i mają ten sam zwrot a wektory $\vec{c}, \vec{d}$ leżą po tej samej stronie tej prostej.

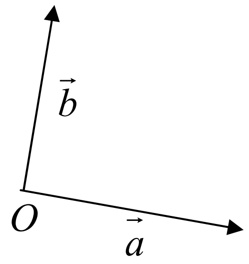


2 pary wektorów nazymamy **nierównoskrętnymi** jeżeli poprzez przesunięcie i obrót można doprowadzić do sytuacji, że punkt O pokryje się z punktem O′, wektory $\vec{a}, \vec{c}$ leżą na tej samej prostej i mają ten sam zwrot a wektory $\vec{c}, \vec{d}$ leżą po dwóch stronach tej prostej.



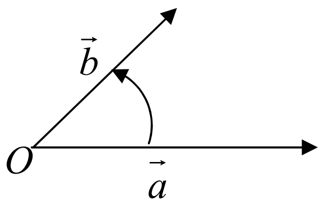
WNIOSEK:
Łatwo zauważyć, że jeżeli ustalimy parę wektorów to pozostałe są do nich albo równoskrętne albo nierównoskrętne.

Jeżeli ustalimy parę wektorów to mówimy, że nadajemy orientację.

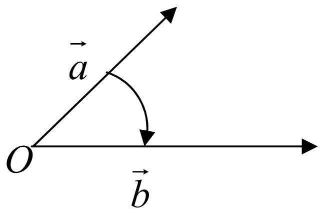


wektory $\vec{a}, \vec{c}$ są liniowo niezależne

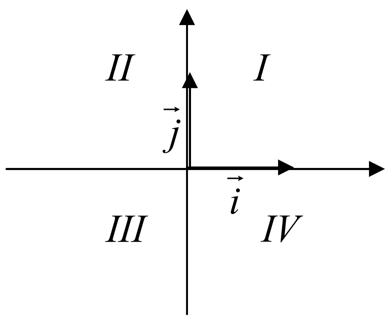
Orientacja dodatnia
Mówimy, że orientacja jest dodatnia, jeżeli obracając wektor $\vec{a}$ wokół punktu O po najkrótszej drodze tak aby pokrył się z prostą zawierającą $\vec{b}$ poruszamy się niezgodnie z ruchem wskazówek zegara.



Orientacja ujemna
Mówimy, że orientacja jest ujemna, jeżeli obracając wektor $\vec{a}$ wokół punktu O po najkrótszej drodze tak aby pokrył się z prostą zawierającą $\vec{b}$ poruszamy się zgodnie z ruchem wskazówek zegara.



UWAGA:

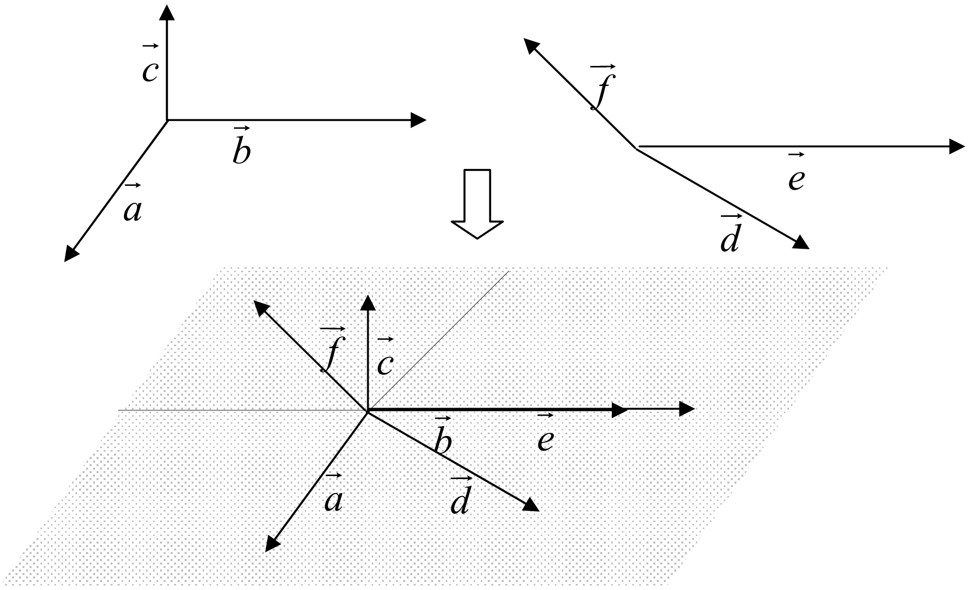


Orientacja w $\overrightarrow{E_2}$ $\left(E_2, \overrightarrow{E_2}, +\right)$

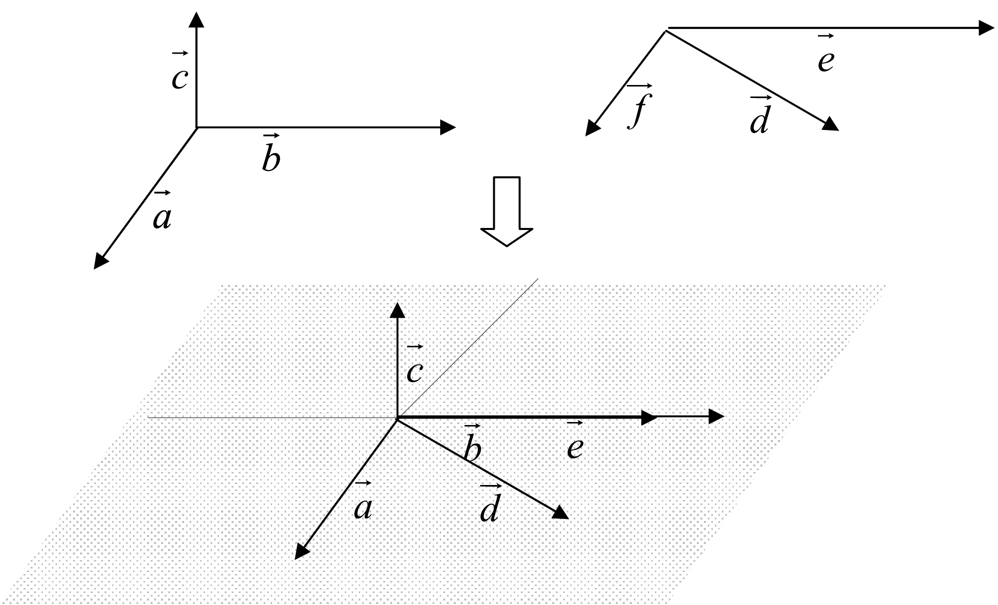
$$\underbrace{\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) \quad O \qquad \left(\vec{d}, \vec{e}, \vec{f}\right) \quad O'}$$

Dwie trójki wektorów liniowo niezależnych.

Te dwie trójki wektorów nazywami **równoskrętnymi** jeżeli poprzez przesunięcie i obrót można doprowadzić do sytuacji, że punkt O pokryje się z O′, pary $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{d}, \vec{e}$ leżą w jednej płaszczyźnie i są równoskrętne a wektory $\vec{c}, \vec{f}$ są po jednej stronie tej płaszczyzny

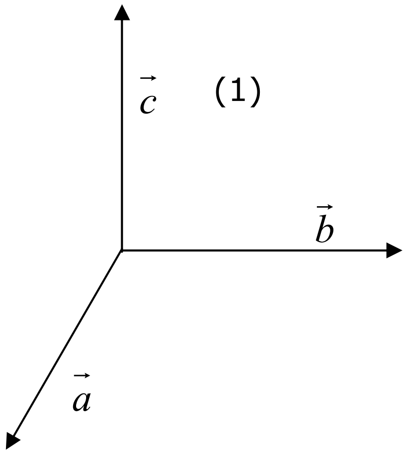


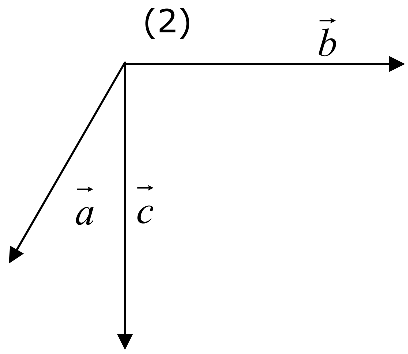
Jeżeli powyższy warunek nie jest spełniony (tj wektory $\vec{c}, \vec{f}$ nie leżą w jednej płaszczyźnie) to mówimy, że wektory są **nierównoskrętne.**



UWAGA:
Jeżeli zadamy trójkę to każde pozostałe są albo równoskrętne albo nierównoskrętne.

Dla wybranej trójki orientacja jest **dodatnia** jeżeli możemy zastosować do niej regułę śruby prawoskrętnej (regułę prawej ręki) (1).





Gdy powyższy warunek nie jest spełniony to występuje **orientacja** ujemna (2).

Definicja 4

$\left(E_3, \overrightarrow{E_3}, +\right) \quad \overline{u}, \overline{v} \in \overrightarrow{E_n}$

Iloczynem wektorowym nazywamy odwzorowanie $\times : \overrightarrow{E_3} \times \overrightarrow{E_3} \to \overrightarrow{E_3}$, takie, że:

1. $\overline{u} \times \overline{v} := \overline{0}$ jeśli $\overline{u} = \overline{0} \vee \overline{v} = \overline{0}$

2. $\overline{w} := \overline{u} \times \overline{v}$ jeśli $\overline{u} \neq \overline{0} \wedge \overline{v} \neq \overline{0}$

   a) $\overline{w} \perp \overline{u} \wedge \overline{w} \perp \overline{v}$

   b) $\left\|\overline{w}\right\| := \left\|\overline{u}\right\| \cdot \left\|\overline{v}\right\| \cdot \sin \sphericalangle\left(\overline{u}, \overline{v}\right)$

   c) $\left(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}\right)$ jest równoskrętne z przyjętym układem współrzędnych

Własności: $\overline{u} \neq \overline{0} \wedge \overline{v} \neq \overline{0}$

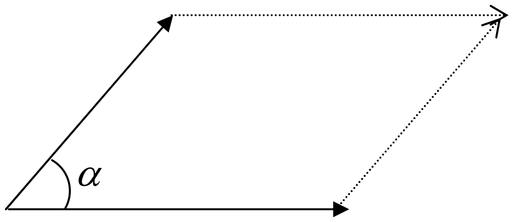
1. $\overline{u} \times \overline{v} = -(\overline{v} \times \overline{u})$

2. $\lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda \overline{u}) \times \overline{v} = \overline{u} \times (\lambda \overline{v}) = \lambda(\overline{u} \times \overline{v})$

3. $\overline{u} \times \left(\overline{v} + \overline{w}\right) = \overline{u} \times \overline{v} + \overline{u} \times \overline{w}$

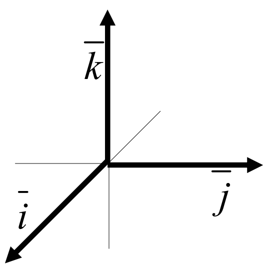
4. $\overline{u} \neq \overline{0} \wedge \overline{v} \neq \overline{0} \wedge \overline{u} \times \overline{v} = \overline{0} <=> \overline{u} \parallel \overline{v}$ mówimy, ze $\overline{u}, \overline{v}$ są liniowo zależne

5. $\overline{u} \neq \overline{0} \wedge \overline{v} \neq \overline{0} \wedge \overline{u}, \overline{v}$ - liniowo niezależne



$P_{\triangle} = \frac{1}{2}\left\|\overline{u} \times \overline{v}\right\| \quad P_{\square} = \left\|\overline{u} \times \overline{v}\right\|$

6.



$$\overline{u} = \left[u_x, u_y, u_z\right] = u_x\overline{i} + u_y\overline{j} + u_z\overline{k}$$
$$\overline{v} = \left[v_x, v_y, v_z\right] = v_x\overline{i} + v_y\overline{j} + v_z\overline{k}$$

$\overline{u}, \overline{v}$ - liniowo niezależne

$$\overline{u} = \left[u_x, u_y, u_z\right] = u_x\overline{i} + u_y\overline{j} + u_z\overline{k}$$
$$\overline{v} = \left[v_x, v_y, v_z\right] = v_x\overline{i} + v_y\overline{j} + v_z\overline{k}$$

$$\overline{v} \times \overline{v} = \left(u_x\overline{i} + u_y\overline{j} + u_z\overline{k}\right) \times \left(v_x\overline{i} + v_y\overline{j} + v_z\overline{k}\right) =$$
$$= \left(u_x v_x\right)\overline{i} \times \overline{i} + \left(u_x v_y\right)\overline{i} \times \overline{j} + \left(u_x v_z\right)\overline{i} \times \overline{k} + \left(u_y v_x\right)\overline{j} \times \overline{i} + \left(u_y v_y\right)\overline{j} \times \overline{j} + \left(u_y v_z\right)\overline{j} \times \overline{k} +$$
$$+ \left(u_k v_x\right)\overline{k} \times \overline{i} + \left(u_k v_y\right)\overline{k} \times \overline{j} + \left(u_k v_z\right)\overline{k} \times \overline{k} =$$
$$= \left(u_x v_y\right)\overline{k} - \left(u_x v_z\right)\overline{j} - \left(u_y v_x\right)\overline{k} + \left(u_y v_z\right)\overline{i} + \left(u_k v_x\right)\overline{j} - \left(u_k v_y\right)\overline{i} =$$
$$= \left(u_y v_z - u_k v_y\right)\overline{i} + \left(u_k v_x - u_y v_x\right)\overline{j} + \left(u_x v_y - u_y v_x\right)\overline{k} =$$
$$= \left[u_y v_z - u_k v_y, u_k v_x - u_y v_x, u_x v_y - u_y v_x\right]$$

„OBRAZEK”:

$$\overline{u} \times \overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \overline{i}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} + \overline{j}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} + \overline{k}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} =$$
$$= \left(u_y v_z - u_k v_y\right)\overline{i} + \left(u_k v_x - u_y v_x\right)\overline{j} + \left(u_x v_y - u_y v_x\right)\overline{k} =$$
$$= \left[u_y v_z - u_k v_y, u_k v_x - u_y v_x, u_x v_y - u_y v_x\right]$$

Definicja 7　　**Iloczyn mieszany**

$$\overrightarrow{E_3} \times \overrightarrow{E_3} \times \overrightarrow{E_3} \to \mathbb{R} \qquad \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \overrightarrow{E_3}$$

Iloczynem mieszanym nazywamy:

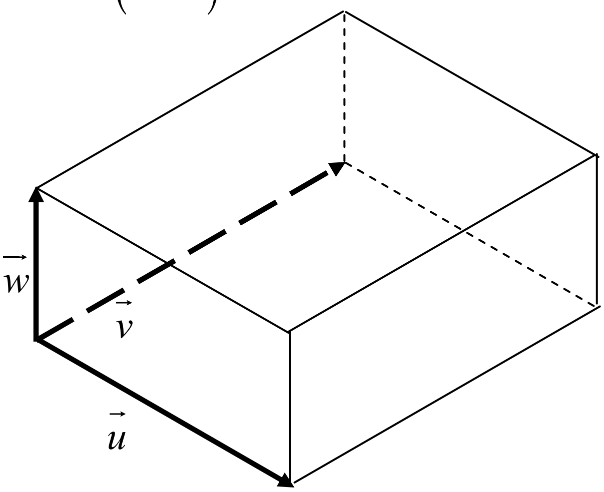
$$\left(\vec{u}\vec{v}\vec{w}\right) := \left(\vec{u} \times \vec{v}\right) \circ \vec{w}$$

WŁASNOŚCI:

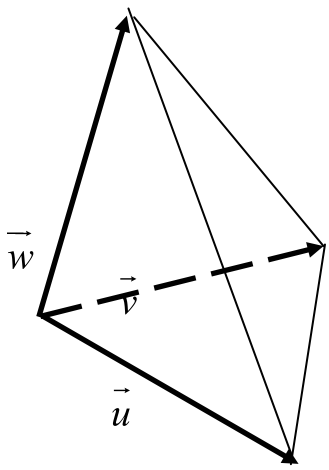
1. $\left(\vec{u} \times \vec{v}\right) \circ \vec{w} = \vec{u} \circ \left(\vec{v} \times \vec{w}\right)$

2. $\vec{u} \neq \overline{0} \quad \vec{v} \neq \overline{0} \quad \vec{w} \neq \overline{0}$
   $\vec{u} \circ \left(\vec{v} \times \vec{w}\right) = 0 <=> \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ są wektorami liniowo zależnymi (leżą w jednej płaszczyźnie)

3. $\vec{u} \circ \left(\vec{v} \times \vec{w}\right) \neq \overline{0}$



$$V = \left|\left(\vec{u} \times \vec{v}\right) \circ \vec{w}\right|$$



$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{u} \times \vec{v}\right) \circ \vec{w}\right|$$

4. $\overline{u} = \left[u_x, u_y, u_z\right] = u_x \overline{i} + u_y \overline{j} + u_z \overline{k}$

   $\overline{v} = \left[v_x, v_y, v_z\right] = v_x \overline{i} + v_y \overline{j} + v_z \overline{k}$

   $\overline{w} = \left[w_x, w_y, w_z\right] = w_x \overline{i} + w_y \overline{j} + w_z \overline{k}$

$$\left(\vec{u}\vec{v}\vec{w}\right) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$