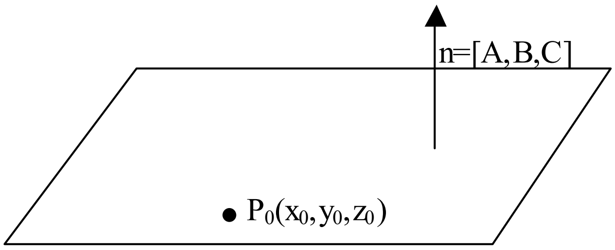
Równanie ogólne płaszczyzny w E_3.

Dane: $P_o \in \pi$ i $\overline{n} \perp \pi$



Wówczas:
$P_0P=[x-x_0,y-y_0,z-z_0]$
$$P \in \pi <=> \vec{n} \perp \overrightarrow{P_oP} <=> \vec{n} \circ \overrightarrow{P_oP} = 0$$

Równanie (1) nazywamy równaniem ogólnym płaszczyzny

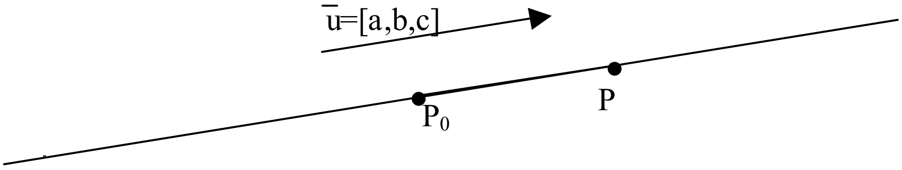
$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ (1′)
$Ax+By+Cz+D=0$

Przykład 1

E_3
$y=x$ jest to równanie płaszczyzny π w E_3
π: $x-y=0$ $\overline{n} \perp \overline{v} = [1,-1,0]$

Równanie parametryczne prostej w przestrzeni.

Dane: $P_o \in \pi$ i $\overline{n} \perp \pi$



l: $P=P_0+tu$, $t\in R$
l: $(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+t[a,b,c]$, $t\in R$

$$l: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Powyższe postacie równania prostej w przestrzeni E_3 są równoważne.

Inne postacie równania prostej i płaszczyzny.

- równanie odcinkowe płaszczyzny
 π: $Ax+By+Cz+D=0$
  założenie: $A\neq 0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$, $D\neq 0$

Wówczas równanie ma postać:

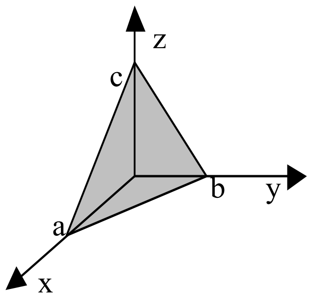
$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1$$

Przyjmujemy: $a=-\frac{D}{A}, b=-\frac{D}{B}, c=-\frac{D}{C}$

Czyli:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (*)$$

(*) – Postać tą nazywamy równaniem odcinkowym płaszczyzny



- równanie krawędziowe prostej:

$$\begin{matrix}\pi_1: \\ \pi_2:\end{matrix}\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

Jeśli: $\pi_1 \nparallel \pi_2$ to mamy równanie krawędziowe prostej. (Prosta jest wyznaczona przez krawędź przecięcia dwóch nierównoległych płaszczyzn)

<u>Wniosek:</u>

$\pi_1 \perp \overline{n}_1=[A_1,B_1,C_1]$

$\pi_2 \perp \overline{n}_2=[A_2,B_2,C_2]$

$l \parallel \overline{v}=\overline{n}_1 \times \overline{n}_2$

Aby znaleźć równanie prostej l należy (przyjmując dowolnie jedną z niewiadomych) rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases}\pi_1 \\ \pi_2\end{cases}$$

- postać kanoniczna równania prostej:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

Aby przejść do równania parametrycznego należy przyrównać kolejne składniki do parametru i wyznaczyć x, y, z.

Def. 1 Pęk płaszczyzn

1. $\pi_1 || \pi_2$
   pękiem płaszczyzn nazywamy zbiór wszystkich płaszczyzn równoległych do π_1 (π_2).

2. $\pi_1 \nparallel \pi_2$

   pękiem płaszczyzn nazywamy zbiór wszystkich płaszczyzn przechodzących przez wspólną krawędź π_1 i π_2.

Uwaga

Dla pęku płaszczyzn zachodzi:

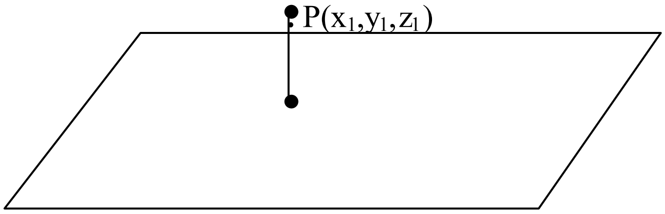
Jeśli:

π_1: $A_1x+b_1y+C_1z+D_1=0$

π_2: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

$\forall k_1,k_2\in R$: $k_1(A_1x+b_1y+C_1z+D_1)+k_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$

Odległość punktu od płaszczyzny w E_3.



Dana jest płaszczyzna o równaniu ogólnym:

π: $Ax+By+Cz+D=0$

Wówczas odległość punktu P od płaszczyzny π dana jest wzorem:

$$d(P,\pi)=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Wzajemne położenie prostych w przestrzeni E_3.

Prosa l_1 dana jest równaniem

l_1: $(x,y,z)=(x_1,y_1,z_1) + t[a_1,b_1,c_1]$

l_1: $P=P_1+t\overline{v}_1$

Prosta l_2 dana jest równaniem:

l_2: $(x,y,z)=(x_2,y_2,z_2) + t[a_2,b_2,c_2]$

l_2: $P=P_2+t\overline{v}_2$

I. proste są równoległe

$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \overline{v}_1 \parallel \overline{v}_2$

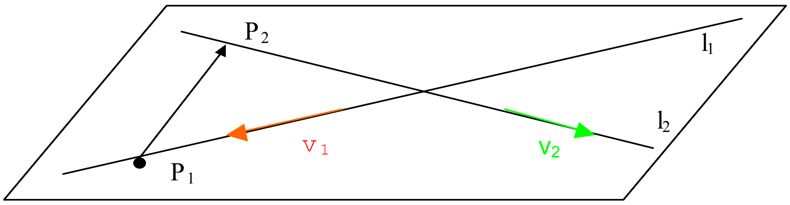
II. proste przecinają się

$\neg l_1 \parallel l_2 \wedge l_1 \cap l_2=\{P_0\}$

Warunkiem aby proste przecinały się jest

1. $\neg(\overline{v}_1 \parallel \overline{v}_2)$
2. układ równań $\begin{cases} l_1 \\ l_2 \end{cases}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie

Interpretacja geometryczna:



Warunek, aby proste się przecinały ma postać: $(\overline{v}_1 \times \overline{v}_2) \circ \overrightarrow{P_1P_2} = 0$

III. Proste są skośne
Warunek, aby proste były skośne ma postać:

1. $\neg(\overline{v}_1 \parallel \overline{v}_2)$
2. układ równań $\begin{cases} l_1 \\ l_2 \end{cases}$ jest sprzeczny

Geometrycznie warunek ten ma postać: $(\overline{v}_1 \times \overline{v}_2) \circ \overrightarrow{P_1P_2} \neq 0$

Odległość prostych w przestrzeni E_3.

Dane są proste l_1, l_2

1. Jeśli $l_1 \parallel l_2$ to odległość prostych l_1 i l_2 jest równa odległości dowolnego punktu z jednej prostej od drugiej.

2. Jeśli proste są skośne to odległość między nimi jest równa długości najkrótszego odcinka łączącego obie proste.

$$d(l_1, l_2) = \frac{\left|(\overline{v}_1 \times \overline{v}_2) \circ \overrightarrow{P_1P_2}\right|}{\left\|\overline{v}_1 \times \overline{v}_2\right\|}$$

Przykład

Badamy wzajemne położenie prostych.

$$l_1 : \begin{cases} x = 9 + 4t \\ y = -2 - 3t \\ z = t \end{cases} \qquad l_2 : \begin{cases} x = -2s \\ y = -7 - 9s \\ z = 2 + 2s \end{cases}$$

$P_1=(9,-2,0)$ $\qquad$ $P_2=(-2,-7,2)$

$l_1 \parallel \overline{v}_1 = [4,-3,1]$ $\qquad$ $l_2 \parallel \overline{v}_2 = [-2,9,2]$

czyli $\overline{v}_1 \nparallel \overline{v}_2$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} x = 9 + 4t \\ y = -2 - 3t \\ z = t \\ x = -2s \\ y = -7 - 9s \\ z = 2 + 2s \end{cases} \qquad \begin{cases} -2s = 9 + 4t \\ -7 - 9s = -2 - 3t(**) \\ 2 + 2s = t \end{cases} \qquad \begin{cases} -2s = 9 + 4t \\ 2 + 2s = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = -\frac{17}{10} \\ t = -\frac{14}{10} \end{cases}$$

Sprawdzamy, czy ta para spełnia równanie (**)

$-7-9s \neq -2-3t$

Wniosek: Proste są skośne.

Teraz znajdziemy równanie płaszczyzny π, która zawiera prostą l_1 i do której prosta l_2 jest równoległa.

π: $l_1 \subset \pi \wedge l_2 || \pi$

$P_1 \in l_1 \Rightarrow P_1 \in \pi$

$P_1=(9,-2,0) \in \pi$

$\overline{n} \perp \pi$

$$\overline{n} = \overline{v}_1 \times \overline{v}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 4 & -3 & 1 \\ -2 & 9 & 2 \end{vmatrix} = -15\overline{i} - 10\overline{j} + 30\overline{k}$$

$\overline{n} = [-15, -10, 30]$

π: $-15(x-9) - 10(y+2) + 30(z-0) = 0$

π: $-3x - 2y + 6z + 23 = 0$

Wzajemne położenie płaszczyzn w przestrzeni E_3.

Dane są trzy płaszczyzny π_1, π_2, π_3.

1. płaszczyzny przecinają się wzdłuż wspólnej prostej

   $\Leftrightarrow$ układ $\begin{cases} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{cases}$ na nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru

2. płaszczyzny przecinają się w jednym punkcie $\Leftrightarrow$ układ $\begin{cases} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{cases}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Powierzchnie stopnia drugiego w E_3

Równanie postaci:

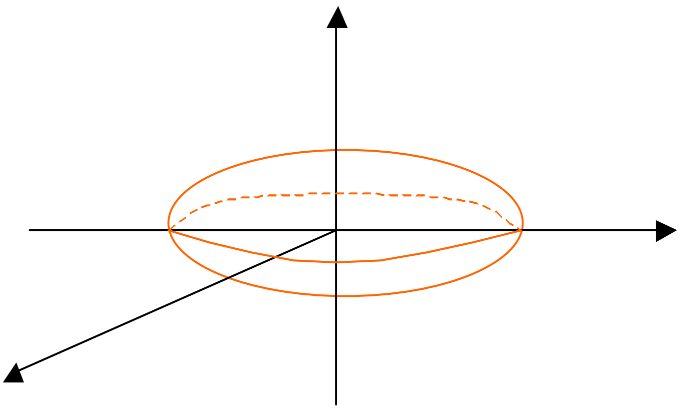
$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{23}yz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0$$

jest równaniem powierzchni stopnia drugiego (właściwej lub niewłaściwej).

<u>Postacie kanoniczne krzywych drugiego stopnia różnych rodzajów.</u>

I. rodzaj: powierzchnia elipsoidalna.

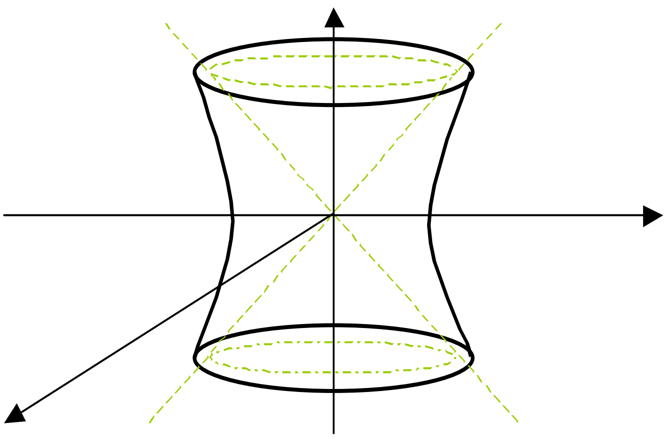
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



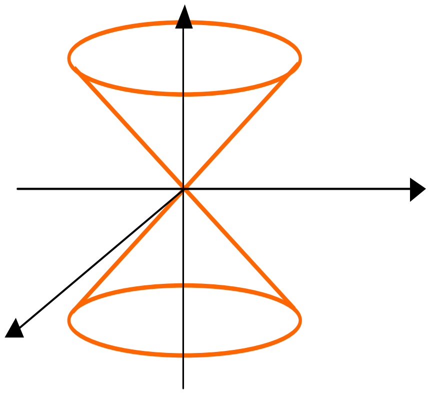
elipsoida obrotowa

II. rodzaj: powierzchnia hiperboloidalna

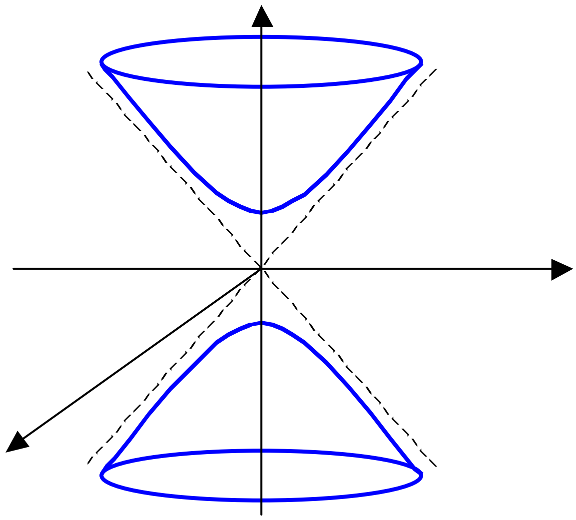
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \begin{cases} 1 & \text{hiperboloida jednopowłokowa} \\ 0 & \text{stożek eliptyczny} \\ -1 & \text{hiperboloida dwupowłokowa} \end{cases}$$



hiperboloida jednopowłokowa



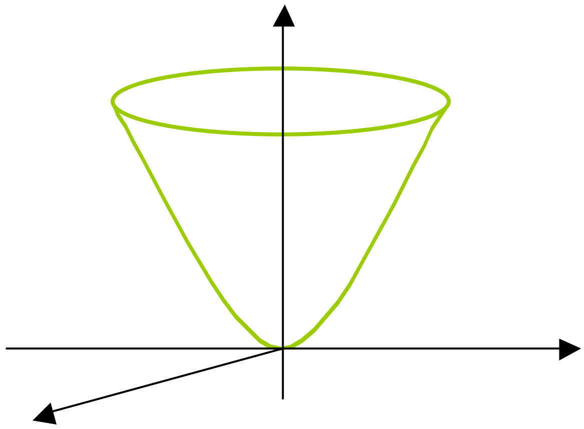
stożek eliptyczny



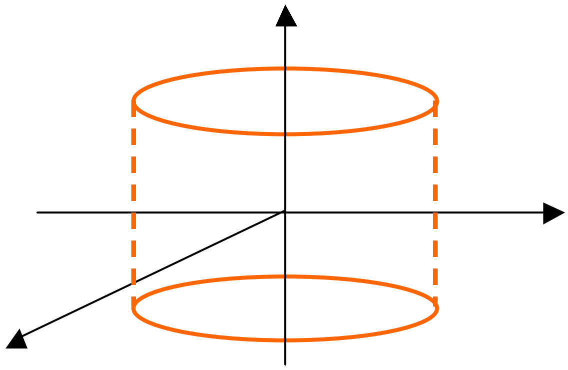
hiperboloida dwupowłokowa

III. rodzaj: płaszczyzna paraboliczno – eliptyczna

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\begin{cases}2z & \text{paraboloida eliptyczna}\\ 1 & \text{walec eliptyczny}\end{cases}$$



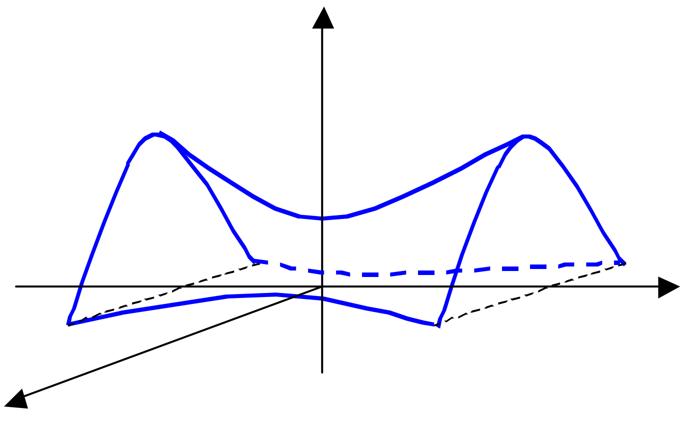
paraboloida eliptyczna



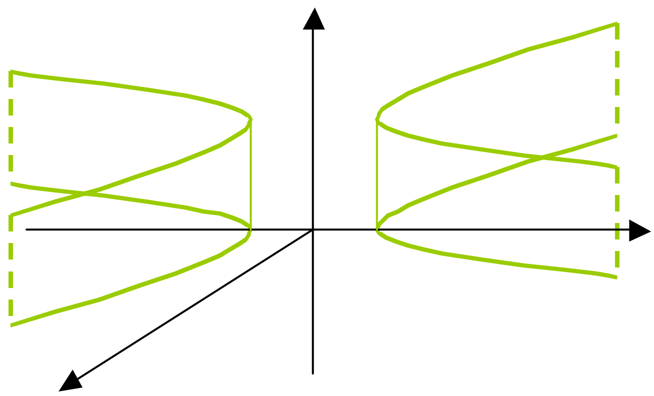
walec eliptyczny

IV. rodzaj: paraboloidalno – hiperboliczny

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \begin{cases} 2z & \text{paraboloida hiperboliczna} \\ \pm 1 & \text{walec hiperboliczny} \end{cases}$$



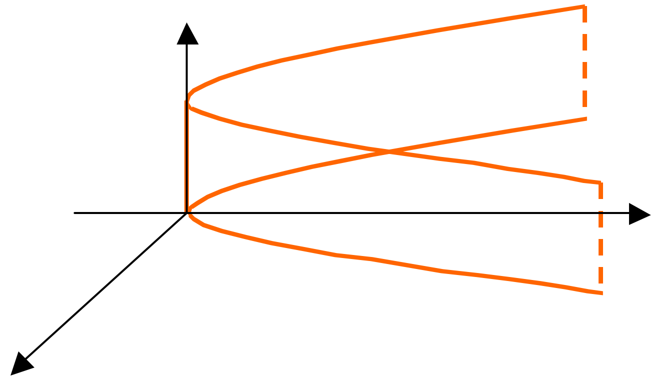
paraboloida hiperboloidalna



walec hiperboliczny

V. rodzaj: powierzchnia paraboloidalna

$y^2 = 2px$ walec paraboliczny



walec paraboliczny

Uwaga

Równania postaci kanonicznych są wyznaczone tak, że osią symetrii jest oś OZ a (jeśli istnieje) środkiem geometrycznym punktu (0,0,0)

FORMY KWADRATOWE

Def.

Formą kwadratową n zmiennych nazywamy odwzorowanie g, takie że:

g: $R^n \to R$

$$g(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

$a_{ij} = a_{ji}$

Macierzą formy kwadratowej nazywamy macierz A, taką że:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Z warunku $a_{ij} = a_{ji}$ wynika, że macierz A jest macierzą symetryczną, tzn. $A^T=A$.

Przykład

$g(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2+5x_2x_3-x_1x_3$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -\frac{1}{2} \\ -2 & -2 & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -3 \end{bmatrix}$$

Postać kanoniczna formy kwadratowej.

Def.

Postać formy kwadratowej:

$g(x'_1,x'_2,\ldots,x'_n)=\sum_{i=1}^{n} a_i(x'_i)^2$, gdzie $x'_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$

nazywamy postacią kanoniczną formy kwadrwtowej.]

Sprowadzanie formy kwadratowej do postaci kanonicznej metodą Lagrange'a.

Założenia

$$g(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

$a_{ii} \neq 0$

Schemat metody jest następujący:

1. grupujemy wyrazy zawierające x_i
2. uzupełniamy do kwadratu