MACIERZE. ZWIĄZEK Z ODWZOROWANIAMI LINIOWYMI.

$\mathbb{N}_k = \{1, 2, \ldots, k\}$

Definicja 1.

Macierzą nazywamy każde odwzorowanie określone na iloczynie kartezjańskim $\mathbb{N}_k \times \mathbb{N}_j$ .Wartość tego odwzorowania na parze (i,j) oznaczamy a_{ij} i nazywamy elementem tej macierzy. Zbiór wartości zapisujemy w formie:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix}$$

Ten zbiór utożsamiamy z macierzą.
Elementami macierzy mogą być różne obiekty matematyczne np. liczby, wielomiany, inne funkcje.

Definicja 2.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{km} \end{bmatrix}$$

O elementach a_{i1}, a_{i2}, a_{im} mówimy, że tworzą i-ty wiersz macierzy.

O elementach a_{1j}, a_{2j}, a_{nj} mówimy, że tworzą j-tą kolumnę macierzy.

Jeżeli macierz ma k wierszy i m kolumn, to mówimy, że jest to macierz o wymiarach $k \times m$.

PRZYKŁAD 1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 4}$$

Macierze oznaczamy najczęściej dużymi literami

$$A = [a_{ij}] = [a_{ij}]_{k\times m} = A_{k\times m}$$

Definicja 3.

a) Macierzą transponowaną do macierzy A nazywamy macierz A^T, powstała z macierzy A przez zamianę jej wierszy na kolumny bez zmiany ich kolejności.

$$A^T=[b_{ij}]_{k\times m}$$

PRZYKŁAD 2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 4}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 4 \\ 2 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

b) Macierz nazywamy macierzą zerową jeżeli wszystkie jej elementy równe są zero.

Oznaczenie:

$0_{k\times m}$

c) Jeżeli ilość wierszy macierzy równa jest ilości jej kolumn, to macierz taką nazywamy macierzą kwadratową.

$A_{n\times n}$

Definicja 4.

$A_{n\times n}=[a_{ij}]$

a) O elementach a_{ii} i=1, 2, ..., n mówimy, że tworzą przekątną główną macierzy.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{22} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix}$$

b) Macierz kwadratową nazywamy macierzą diagonalną, jeżeli wszystkie jej elementy poza przekątną główną są równe zero.

PRZYKŁAD 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

c) Macierz jednostkowa to macierz diagonalna, w której wszystkie elementy na głównej przekątnej są równe jeden.

PRZYKŁAD 4.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d) Macierz nazywamy trójkątną górną jeżeli wszystkie jej elementy poniżej głównej przekątnej są równe zero.

PRZYKŁAD 5.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Macierz nazywamy trójkątną dolną jeżeli wszystkie jej elementy powyżej głównej przekątnej są równe zero.

PRZYKŁAD 6.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

e) Macierz nazywamy symetryczną jeżeli:

$A^T=A$

PRZYKŁAD 7.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 6 \\ -3 & 7 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

DZIAŁANIA NA MACIERZACH.

1) Równość dwóch macierzy zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy macierze mają takie same wymiary i odpowiednie ich elementy są sobie równe.

$A = [a_{ij}]_{k\times m}$ $\qquad B = [b_{ij}]_{l\times p}$

$a_{ij} = b_{ij} \wedge k=l \wedge m=p$

2) Suma dwóch macierzy – dodając do siebie dwie macierze dodajemy do siebie odpowiednie elementy.

$A_{k\times m}\,[a_{ij}]$ $\qquad B_{l\times p}\,[b_{ij}]$

$A+B=[c_{ij}]:\quad c_{ij}= a_{ij}+ b_{ij}$

3) Mnożenie macierzy przez liczbę – mnożąc macierz przez liczbę mnożymy każdy element macierzy przez tę liczbę.

$A = [a_{ij}],\quad \alpha A = \alpha[a_{ij}]$

4) Mnożenie dwóch macierzy

$A_{n\times p}\,[a_{ij}] \quad \bullet \quad B_{p\times n}\,[b_{ij}]$

Jest ono wykonalne tylko wtedy, gdy ilość wierszy macierzy B równa jest ilości kolumn macierzy A.

$A_{n\times p}\,[a_{ij}]$
$B_{p\times n}\,[b_{ij}]$

$$A\bullet B = C = \left[c_{ij}\right] : c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\bullet b_{kj}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pm} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \ldots + a_{1p}b_{p1} \\ c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} + \ldots + a_{1p}b_{p2} \\ c_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} + \ldots + a_{2p}b_{p2} \\ c_{34} &= a_{31}b_{14} + a_{32}b_{24} + a_{33}b_{34} + \ldots + a_{3p}b_{p4} \\ &\vdots \\ c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} \end{aligned}$$

WNIOSEK

Element c_{ij} macierzy A•B to iloczyn skalarny i-tego wiersza macierzy A przez j-tą kolumnę macierzy B.

PRZYKŁAD 8.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 5} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{5\times 2} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 8 & 8 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

UWAGA

Mnożenie macierzy nie jest przemienne, B•A może być niewykonalne.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{5\times 2} \bullet \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 5} \neq \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 8 & 8 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Jeśli jest wykonalne to na ogół AB≠BA.

MACIERZ ODWZOROWANIA LINIOWEGO

$(X,K,+,\bullet)$ dimX=m $(Y,K,+,\bullet)$ dimY=n

$B=(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\dots,\bar{e}_m)$ $C=(\bar{l}_1,\bar{l}_2,\dots,\bar{l}_n)$

$f:X\to Y$ - odwzorowanie liniowe

$$\bar{y}=f(\bar{x})$$

$$X\ni\bar{x}=x_1\bar{e}_1+x_2\bar{e}_2+\dots+x_m\bar{e}_m$$

$$Y\ni\bar{y}=y_1\bar{l}_1+y_2\bar{l}_2+\dots+y_n\bar{l}_n$$

$$f(x_1\bar{e}_1+x_2\bar{e}_2+\dots+x_m\bar{e}_m)=x_1f(\bar{e}_1)+x_2f(\bar{e}_2)+\dots+x_mf(\bar{e}_m)$$

$$f(\bar{e}_1)=a_{11}\bar{l}_1+a_{21}\bar{l}_2+\dots+a_{n1}\bar{l}_n$$

$$f(\bar{e}_2)=a_{12}\bar{l}_1+a_{22}\bar{l}_2+\dots+a_{n2}\bar{l}_n$$

$$f(\bar{e}_m)=a_{1m}\bar{l}_1+a_{2m}\bar{l}_2+\dots+a_{nm}\bar{l}_n$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1\bar{e}_1+x_2\bar{e}_2+\dots+x_m\bar{e}_m)=\\ =x_1f(\bar{e}_1)+x_2f(\bar{e}_2)+\dots+x_mf(\bar{e}_m)=\\ =x_1\left(a_{11}\bar{l}_1+a_{21}\bar{l}_2+\dots+a_{n1}\bar{l}_n\right)+\\ +x_2\left(a_{12}\bar{l}_1+a_{22}\bar{l}_2+\dots+a_{n2}\bar{l}_n\right)+\\ +\dots+x_m\left(a_{1m}\bar{l}_1+a_{2m}\bar{l}_2+\dots+a_{nm}\bar{l}_n\right)=\\ =\left(a_{11}\bar{x}_1+a_{12}\bar{x}_2+\dots+a_{1m}\bar{x}_m\right)\bar{l}_1+\\ +\left(a_{21}\bar{x}_1+a_{22}\bar{x}_2+\dots+a_{2m}\bar{x}_m\right)\bar{l}_2+\\ +\dots+\left(a_{n1}\bar{x}_1+a_{n2}\bar{x}_2+\dots+a_{nm}\bar{x}_m\right)\bar{l}_n \end{array}\right\} \begin{array}{l} y_1=\left(a_{11}\bar{x}_1+a_{12}\bar{x}_2+\dots+a_{1m}\bar{x}_m\right)\\ y_2=\left(a_{21}\bar{x}_1+a_{22}\bar{x}_2+\dots+a_{2m}\bar{x}_m\right)\\ \qquad\vdots\\ y_n=\left(a_{n1}\bar{x}_1+a_{n2}\bar{x}_2+\dots+a_{nm}\bar{x}_m\right) \end{array}$$

$$M_f(B,C)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Jest to macierz odwzorowania liniowego f względem baz B,C przestrzeni X,Y.

WNIOSEK

1) Pierwszą kolumnę macierzy stanowią współrzędne wektora $f(\overline{e}_1)$
   w bazie przestrzeni X, Y.
   Drugą kolumnę macierzy stanowią współrzędne wektora $f(\overline{e}_2)$
   w bazie przestrzeni X, Y..
   n-tą kolumnę macierzy stanowią współrzędne wektora $f(\overline{e}_n)$
   w bazie przestrzeni X, Y.

2) Przy ustalonych bazach w przestrzeni X i Y danemu odwzorowaniu liniowemu odpowiada dokładnie jedna macierz i na odwrót:
   macierz odpowiednich wymiarów definiuje nam poprzez powyższy związek dokladnie jedno odwzorowanie.
   Czyli przy ustalonych bazach w przestrzeni X, Y każdemu odwzorowaniu odpowiada dokładnie jedna macierz.
   Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniosć pomiędzy odwzorowaniem okreslonym w tych ptrzestrzeniach i macierzami.

3)

$\dim X = m \wedge \dim Y = n$

$f: X \to Y$

B C

$A = M_f(B, C)_{n\times m}$

UMOWA

Macierz odwzorowania liniowego będzie synonimem macierzy.

REPREZENTACJA MACIERZOWA ODWZOROWANIA LINIOWEGO

Oznaczenia jak wyżej

$f:X \to Y$

$\overline{y}=f(\overline{x})$

$\overline{x}=[x_1, x_2, \ldots, x_n]_B$

$\overline{y}=[y_1, y_2, \ldots, y_n]_C$

$$\overline{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad \overline{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad A=M_f(B,C)_{n\times m}$$

$$\overline{y}=A\overline{x}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Jest to postać macierzowa odwzorowania.

PRZYKŁAD 1.

$(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot) \qquad (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$

$B=(\overline{e}_1 = (1,0,0), \overline{e}_2 = (0,1,0), \overline{e}_3 = (0,0,1))$

$C=(\overline{l}_1 = (1,0), \overline{l}_2 = (0,1))$

$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + x_3)$

Łatwo sprawdzić, że jest to odwzorowanie liniowe.

$f(\overline{e}_1) = f(1,0,0) = (1,1) = 1(1,0) + 1(0,1) = [1,1]_C$

$f(\overline{e}_2) = f(0,1,0) = (1,-2) = 1(1,0) + -2(0,1) = [1,-2]_C$

$f(\overline{e}_3) = f(0,0,1) = (-1,1) = -1(1,0) + 1(0,1) = [-1,1]_C$

$$M_f(B,C) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

PRZYKŁAD 2.

$\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot\right)$

f:$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ -endomorfizm

f(-1,1)=(2,3)

f(1,-2)=(3,-1)

A) Znaleźć macierz tego odwzorowania w bazach kanonicznych

$\mathbb{R}_1^2$: B=$\left(\bar{e}_1 = (1,0), \bar{e}_2 = (0,1)\right)$

$\mathbb{R}_2^2$: C=$\left(\bar{l}_1 = (1,0), \bar{l}_2 = (0,1)\right)$

(-1,1)=-1$\bar{e}_1 + 1\bar{e}_2 = \left[-1,1\right]_B$

f(-1,1)=f(-1$\bar{e}_1 + 1\bar{e}_2) = (2,3) = 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2$

f(1,-2)=f(1$\bar{e}_1$-2$\bar{e}_2) = (3,-1) = 3\bar{e}_1 - 1\bar{e}_2$

$$\begin{cases} f(\bar{e}_1) - 2f(\bar{e}_2) = 3\bar{e}_1 - 1\bar{e}_2 \\ -f(\bar{e}_1) + f(\bar{e}_2) = 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(\bar{e}_1) = -7\bar{e}_1 - 5\bar{e}_2 \\ f(\bar{e}_2) = -5\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 \end{cases}$$

$$M_f(B,C) = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

$\bar{y} = (y_1, y_2) = f(x_1, x_2)$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Znaleźć f(2,4)

$(2,4) = [2,4]_B$

f(2,4)

$$\begin{bmatrix} -34 \\ -18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$f(2,4) = [-34,-18]_B = (-34,-18)$

Znaleźć macierz tego samego odwzorowania w bazach:

$\mathbb{R}_1^2$: B=$\left\{\bar{b}_1=(-1,1),\bar{b}_2=(1,-2)\right\}$

$\mathbb{R}_2^2$: C=$\left\{\bar{l}_1=(2,3),\bar{l}_2=(3,-1)\right\}$

$$\mathrm{f}(\bar{\mathrm{b}}_1)=f(-1,1)=(2,3)=1(2,3)+0(3,-1)=1\bar{l}_1+0\bar{l}_2=[1,0]_C$$

$$\mathrm{f}(\bar{\mathrm{b}}_2)=f(1,-2)=(3,-1)=0(2,3)+1(3,-1)=0\bar{l}_1+1\bar{l}_2=[0,1]_C$$

$$M_f(B,C)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Twierdzenie 1.

$Z:(X,K,+,\bullet)$-przestrzeń wektorowa z bazą $D=(\bar{\mathrm{e}}_1,\bar{\mathrm{e}}_2,\ldots,\bar{\mathrm{e}}_m)$

$(Y,K,+,\bullet)$-przestrzeń wektorowa z bazą $\mathrm{C}=(\bar{l}_1,\bar{l}_2,\ldots,\bar{l}_\mathrm{n})$

$\dim X=m$

$\dim Y=n$

f:X $\to$ Y

g:X $\to$ Y

f i g $\in L(X,Y)$

A=$M_f(D,C)=\left[a_{ij}\right]$

B=$M_g(D,C)=\left[b_{ij}\right]$

T :

$a)$ $M_{f+g}=M_f+M_g$

$b)$ $\alpha\in\mathrm{K}$ $\mathrm{M}_{\alpha\mathrm{f}}=\alpha M_f$

Twierdzenie 2.

Z:

f:X $\to U$ g:U $\to$ Y f $\in\mathcal{L}$(X,U), g $\in\mathcal{L}$(U,Y)

D-baza przestrzeni X C-baza przestrzeni Y G-baza przestrzeni U

A=$M_f(D,G)$ $B=M_g(G,C)$

$g\circ f:X\to Y$

$T:M_{g\circ f}=M_g\bullet M_f$

WŁASNOŚCI DZIAŁAŃ NA MACIERZACH.

$M_{n\times m}(K)-$ zbiór macierzy o wymiarach $n\times m$ o elementach z ciala K

$1^\circ \quad \forall_{A,B,C\in M_{n\times m}(K)} : (A+B)+C = A+(B+C)$

$2^\circ \quad \forall_{A,B,C\in M_{n\times m}(K)} : A \bullet B = B \bullet A$

$3^\circ \quad \exists_{0\in M_{n\times m}(K)} : \forall_{A\in M_{n\times m}(K)} : A+0 = A$

$4^\circ \quad \forall_{A\in M_{n\times m}(K)} : \exists_{-A\in M_{n\times m}(K)} : A+(-A) = 0$

$5^\circ \quad \forall_{\alpha,\beta\in K} \wedge \ \forall_{A\in M_{n\times m}(K)} : (\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$$

$6^\circ \quad \forall_{\alpha,\in K} \wedge \ \forall_{A,B\in M_{n\times m}(K)} : \alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

$7^\circ \quad \forall_{A\in M_{n\times m}(K)} : 1\mathrm{A} = \mathbf{A}$

WNIOSEK:

$(M_{n,m}(K), K, +, \cdot)$ - jest przestrzenią wektorową.

Ponadto, o ile dane działania są wykonalne zachodzą następujące własności dodatkowe:

$8^\circ \quad (A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$

$9^\circ \quad \exists_{I_n} : \forall_A \ I_n \cdot A = A$

$\exists_{I_n} : \forall_A \ A\cdot I_n = A$

$10^\circ \quad A\cdot(B+C) = AB + AC$

$(A+B)\cdot C = AC + BC$

$11^\circ \quad (A+B)^T = A^T + B^T$

$(\alpha A)^T = \alpha A^T$

$(AB)^T = B^T A^T$