Macierze nieosobliwe

Macierze nieosobliwe definiujemy tylko dla macierzy kwadratowych.

Definicja 1.

Macierz $A_{n\times n}$ nazywamy macierzą nieosobliwą, jeżeli istnieje macierz $B_{n\times n}$ taka że:

$$A\cdot B = B\cdot A = I$$

Twierdzenie 1.

Jeżeli macierz *A* jest macierzą nieosobliwą, to macierz *B* z definicji 1 jest jedyna.

Definicja 2.

Jeżeli macierz *A* jest nieosobliwa, to jedyną macierz *B* z definicji 1 nazywamy macierzą odwrotną do macierzy *A* i oznaczamy A^{-1}. O macierzy *A* mówimy też, że jest macierzą odwracalną.

Definicja 3.

Macierz, która nie jest macierzą nieosobliwą, jest nieodwracalna i osobliwa.

Twierdzenie 2.

Z: $(X, K, +, \cdot)$, $(Y, K, +, \cdot)$ przestrzenie wektorowe nad ciałem K z ustalonymi bazami

$\dim X = \dim Y = n$

M_f - macierz odwzorowania

$f : X \to Y$ - odwzorowanie liniowe

T: *f*-odwzorowanie izomorficzne $\Leftrightarrow M_f$ jest macierzą nieosobliwą.

Ponadto:

$$(M_f)^{-1} = M_{f^{-1}}$$

Przykład 1.

Znaleźć macierz odwrotną.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\underset{X}{(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)}$ $\underset{Y}{(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)}$

$A = M_f$

$B = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ - baza kanoniczna

$$\mathbb{R}^3 \ni \overline{x} = (x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2, x_3]_B \to \overline{y} = (y_1, y_2, y_3) = [y_1, y_2, y_3]_B$$

$$\overline{y} = f\left(\overline{x}\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = y_1 \\ x_1 - x_2 = y_2 \\ x_2 + x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{2} y_2 + \frac{1}{2} y_3 \\ x_2 = -\frac{1}{2} y_1 - \frac{1}{2} y_2 + \frac{1}{2} y_3 \\ x_3 = \frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{2} y_2 + \frac{1}{2} y_3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

WNIOSEK:

1) A- macierz nieosobliwa, to A^{-1} też jest macierzą nieosobliwą i $(A^{-1})^{-1}=A$

2) A,B –macierze nieosobliwe, to $A\cdot B$ też macierz nieosobliwa i $(A\cdot B)^{-1}= B^{-1}\cdot A^{-1}$