Odwzorowania liniowe w przestrzeni wektorowej

Definicja 1. (odwzorowania liniowego)

$(X,K,+,\cdot),(Y,K,+,\cdot)$ - przestrzenie wektorowe

$f:X\to Y$ jest odwzorowaniem liniowym $:\Leftrightarrow$

$1^\circ \forall_{\overline{x}_1,\overline{x}_2\in X}: f(\overline{x}_1+\overline{x}_2)=f(\overline{x}_1)+f(\overline{x}_2)$

$2^\circ \forall_{\alpha\in K}:\forall_{\overline{x}\in X}: f(\alpha\overline{x})=\alpha\cdot f(\overline{x})$

WNIOSEK:

Jeżeli f: $X\to Y$ jest liniowe to:

$1^\circ\ f\left(\overline{0}_x\right)=\overline{0}_y$

$2^\circ\ f\left(-\overline{x}\right)=-f\left(\overline{x}\right)$

Twierdzenie 1.

Z: $(X,K,+,\cdot),(Y,K,+,\cdot)$ - przestrzenie wektorowe

T: $f:X\to Y$ jest liniowe $\Leftrightarrow$

$\forall_{\overline{x}_1,\overline{x}_2\in X}:\forall_{\alpha,\beta\in K}: f(\alpha\overline{x}_1+\beta\overline{x}_2)=\alpha f(\overline{x}_1)+\beta f(\overline{x}_2)$

Twierdzenie 2.

$(X,K,+,\cdot),(Y,K,+,\cdot)$ - przestrzenie wektorowe

$f:X\to Y$ *f* jest liniowe $\Leftrightarrow$

$\forall_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in K}:\forall_{\overline{x}_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_n\in X}:$

$f(\alpha_1\overline{x}_1+\alpha_2\overline{x}_2+\ldots+\alpha_n\overline{x}_n)=\alpha_1 f(\overline{x}_1)+\alpha_2 f(\overline{x}_2)+\ldots+\alpha_n f(\overline{x}_n)$

Przykład 1.

$\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R},+,\cdot\right)$ - przestrzeń wektorowa $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ taka, że:

$f\left((x,y,z)\right)=(x-y+2z,x+y+z,3x+3y+3z)$

Niech $\overline{u}=\left(x_1,x_2,x_3\right)$ Sprawdźmy, czy jest to odwzorowanie liniowe

$\overline{v}=\left(y_1,y_2,y_3\right)$

$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Czy $f\left(\alpha\overline{u}+\beta\overline{v}\right)=\alpha f\left(\overline{u}\right)+\beta f\left(\overline{v}\right)$?

$$f\left(\alpha\overline{u}+\beta\overline{v}\right)=f\left(\alpha\left(x_1,x_2,x_3\right)+\beta\left(y_1,y_2,y_3\right)\right)=$$
$$=f\left(\left(\alpha x_1+\beta y_1,\alpha x_2+\beta y_2,\alpha x_3+\beta y_3\right)\right)=$$
$$=\left(\alpha\left(x_1-x_2+2x_3\right)+\beta\left(y_1-y_2+2y_3\right),\alpha\left(x_1+x_2+x_3\right)+\right.$$
$$\left.+\beta\left(y_1+y_2+y_3\right),\alpha\left(3x_1+3x_2+3x_3\right)+\beta\left(3y_1+3y_2+3y_3\right)\right)=$$
$$=\alpha\left(x_1-x_2+2x_3,x_1+x_2+x_3,3x_1+3x_2+3x_3\right)+\beta\left(y_1-y_2+2y_3,y_1+y_2+y_3,3y_1+3y_2+3y_3\right)=$$
$$\alpha f\left(x_1,x_2,x_3\right)+\beta f\left(y_1,y_2,y_3\right)=\alpha f\left(\overline{u}\right)+\beta f\left(\overline{v}\right)$$

Odwzorowanie f jest liniowe

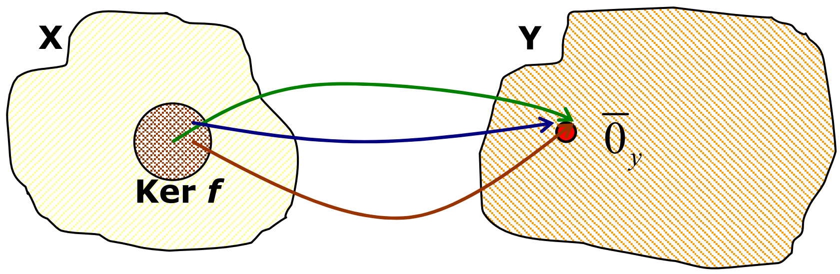
Definicja 2.

$\left(X,K,+,\cdot\right),\left(Y,K,+,\cdot\right)$ - przestrzenie wektorowe

$f:X\rightarrow Y$ jest liniowe

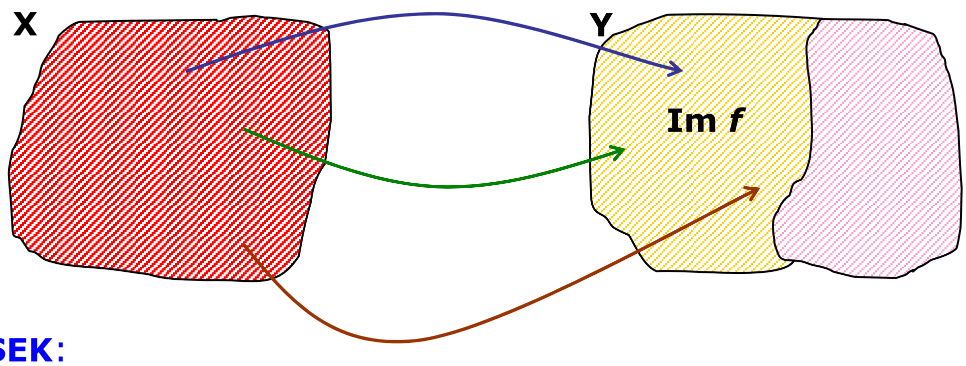
Jądrem odwzorowania liniowego nazywamy ogół takich wektorów z przestrzeni X, których wartość jest wektorem zerowym przestrzeni Y

$$\operatorname{Ker}f:=\left\{\overline{x}\in X: f\left(\overline{x}\right)=\overline{0}_y\right\}$$



Obrazem odwzorowania *f* (przeciwdziedziną, zbiorem wartości) nazywamy zbiór

$$\operatorname{Im}f:=\left\{\overline{y}\in Y:\exists_{\overline{x}\in X}:\overline{y}=f(\overline{x})\right\}$$



WNIOSEK:

$$\operatorname{Ker}f=f^{-1}\left[\left\{\overline{0}\right\}\right]$$

$$\operatorname{Im}f=\left\{f(\overline{x}):\overline{x}\in X\right\}$$

Twierdzenie 3. - przestrzenie wektorowe

$(X,K,+,\cdot),(Y,K,+,\cdot)$

$f:X\to Y$ i f liniowe

$T_1:(\mathrm{Ker}f,K,+,\cdot)$ podprzestrzeń przestrzeni X

$T_2:(\mathrm{Im}\, f,K,+,\cdot)$ podprzestrzeń przestrzeni Y

Twierdzenie 4.

Z: $(X,K,+,\cdot),(Y,K,+,\cdot)$ - przestrzenie wektorowe

T: $f:X\to Y$ jest liniowe

$\dim X=\dim \mathrm{Ker}f+\dim \mathrm{Im}\, f$

Definicja 3.

$(X,K,+,\cdot),(Y,K,+,\cdot), f:X\to Y$ *f* – liniowe

Wymiar obrazu nazywamy rzędem odwzorowania liniowego

$$\dim \mathrm{Im}\, f=\mathrm{r}f$$

Definicja 4.

$(X,K,+,\cdot),(Y,K,+,\cdot)$ - przestrzenie wektorowe

$f:X\to Y$

- Odwzorowanie nazywamy monomorfizmem, jeżeli jest liniowe i injektywne (różnowartościowe)
- Odwzorowanie nazywamy epimorfizmem, jeżeli jest linowe i surrjektywne (**Im** *f=Y)*
- *Odwzorowanie nazywamy izomorfizmem, jeżeli jest liniowe i bijektywne*

Twierdzenie 5.

Z: $(X,K,+,\cdot),(Y,K,+,\cdot)$ - przestrzenie wektorowe

$f:X\to Y$ *f* - liniowe

T: *f* jest injektywne $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}f=\{\overline{0}\}$

Twierdzenie 6.

$Z:(X,K,+,\cdot),(Y,K,+,\cdot)$- przestrzenie wektorowe

$f:X\to Y, f-monomorfizm$

$\dim X=n$

$T:\dim \mathrm{Im}\, f=n$

Definicja 5.

$(X, K, +, \cdot), (Y, K, +, \cdot)$ - przestrzenie wektorowe

Mówimy, że X i Y są przestrzeniami izomorficznymi

$X \sim Y :\Leftrightarrow \exists f : X \to Y$ i *f* - izomorfizm

WNIOSEK:

$X \sim Y \Rightarrow \dim X = \dim Y$

Twierdzenie 7.

$Z : (X, K, +, \cdot), (Y, K, +, \cdot)$ - przestrzenie wektorowe

$T : X \sim Y \Leftrightarrow \dim X = \dim Y$

Definicja 6.

$(X, K, +, \cdot), (Y, K, +, \cdot)$ - przestrzenie wektorowe

$\mathrm{L}\ (X, Y) := \{ f : f : X \to Y \wedge$ *f* - liniowe $\}$

Twierdzenie 7.

$Z : (X, K, +, \cdot), (Y, K, +, \cdot)$ - przestrzenie wektorowe

$T : (\mathrm{L}\ (X, Y), K, \oplus, \odot)$ Jest przestrzenią wektorową

Gdzie $\oplus$ - dodawanie odwzorowań

$\odot$ - mnożenie odwzorowań przez skalary z ciała K

Definicja 7.

$(X, K, +, \cdot)$

$f : X \to X \wedge$ *f* - liniowe

Odwzorowanie liniowe przestrzeni w samą siebie nazywamy endomorfizmem

UWAGA

$Z : (X, K, +, \cdot), (U, K, +, \cdot), (Y, K, +, \cdot)$ - przestrzenie wektorowe

$f \in \mathrm{L}\ (X, U) \wedge g \in \mathrm{L}\ (U, Y)$

$T : g \circ f \in \mathrm{L}\ (X, Y)$

Definicja 8.

$\left(X, K, +, \cdot\right)$

$\left(K, K, +, \cdot\right)$ Każde ciało może być traktowane jako przestrzeń wektorowa nad samym sobą

Odwzorowanie liniowe f: X -> K nazywamy formą liniową

WNIOSEK

$\left(\mathrm{L}\ \left(X, U\right), K, +, \cdot\right)$ Zbiór form liniowych z dodawaniem i mnożeniem odwzorowań przez skalar z ciała K jest przestrzenią wektorową

Definicja 9.

$\left(\mathrm{L}\ \left(X, U\right), K, +, \cdot\right) = X'$

$\left(X', K, +, \cdot\right)$ - przestrzeń dualna do przestrzeni X (przestrzeń form liniowych określonych nad przestrzenią X)