Odwzorowania wieloliniowe
Formy wieloliniowe
Wyznaczniki

Przypomnienie:

$\mathbb{N}_n = \{1, 2, ..., n\}$

Permutacją zbioru n-elementowego nazywamy każde bijektywne odwzorowanie tego zbioru na siebie

Przykład 0.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{3, 2, 5, 1, 4\}$

$\sigma : A \to B$

$\sigma_1 = \sigma(1) = 3$

$\sigma_2 = \sigma(2) = 2$ itd.

Ilość permutacji = n!

$\mathbb{S}_n$ - zbiór permutacji

Definicja 0.

Dwa elementy permutacji σ_i, σ_j tworzą inwersję jeżeli: $\sigma_i > \sigma_j \wedge i < j$

Ilość inwersji w permutacji oznaczamy $p = [\sigma]$, a znak permutacji określamy jako: $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{[\sigma]}$

Przykład 0'.

$[\sigma] = 5$

$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{[5]} = -1$

Jeżeli znak permutacji to +1 (parzysta ilość inwersji), to tę permutację nazywamy parzystą.

Jeżeli znak permutacji to -1 (nieparzysta ilość inwersji), to tę permutację nazywamy nieparzystą.

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{permutacja parzysta} \\ -1 & \text{permutacja nieparzysta} \end{cases}$$

$\{a_1, a_2, ..., a_n\}$

transpozycja – zamiana miejscami dwóch dowolnych elementów

transpozycja zmienia znak permutacji

Definicja 1.

$X_1, X_2, \dots, X_n, F$ (n+1 przestrzeni wektorowych nad tym samym ciałem K)

$f : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \to F$ nazywamy odwzorowaniem n-liniowym (wieloliniowym) jeżeli jest liniowe ze względu na każdą zmienną z osobna.

Tzn: a) $\forall_{i=1,2,\dots,n} \forall_{\bar{x}_i, \bar{x}_i'} : f\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i + \bar{x}_i', \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n\right) =$

$$= f\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n\right) + f\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_i', \dots, \bar{x}_n\right)$$

b) $\forall_{\alpha \in K} \forall_{\bar{x}_i \in X_i} : f\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \alpha \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n\right) = \alpha f\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n\right)$

Przykład 1.

$f : X_1, X_2, X_3 \to F$

$\bar{u}_1, \bar{v}_1 \in X_1 \qquad f\left(\bar{u}_1 + \bar{v}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\right) = f\left(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\right) + f\left(\bar{v}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\right)$

$\bar{u}_2, \bar{v}_2 \in X_2 \qquad f\left(\bar{u}_1, \bar{u}_2 + \bar{v}_2, \bar{u}_3\right) = f\left(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\right) + f\left(\bar{u}_1, \bar{v}_2, \bar{u}_3\right)$

$\bar{u}_3, \bar{v}_3 \in X_3 \qquad f\left(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3 + \bar{v}_3\right) = f\left(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\right) + f\left(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{v}_3\right)$

$f\left(\alpha \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\right) = \alpha f\left(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\right)$

$f\left(\bar{u}_1, \alpha \bar{u}_2, \bar{u}_3\right) = \alpha f\left(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\right)$

$f\left(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \alpha \bar{u}_3\right) = \alpha f\left(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\right)$

UWAGA

Odwzorowanie n-liniowe na ogół nie jest odwzorowaniem liniowym ze względu na zespół zniennych

Twierdzenie 1.

Z: $X_1, X_2, \dots, X_n, F$ - przestrzenie wektorowe nad ciałem K

$f : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \to F$

T: f - odwzorowanie n-liniowe $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall_{i=1,2,\dots,n} \forall_{\alpha,\beta \in K} \forall_{\bar{x}_i, \bar{x}_i' \in X_i} : f\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{i-1}, \alpha \bar{x}_i + \beta \bar{x}_i', \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n\right) =$$

$$= \alpha f\left(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n\right) + \beta f\left(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i', \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n\right)$$

Twierdzenie 2.

Z: $X_1, X_2, \dots, X_n, F$ - przestrzenie wektorowe nad ciałem K

$f : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \to F$ - odwzorowanie n-liniowe

$\bar{x}_i \in X_i$

T: $f\left(\bar{x}_1, \dots, \bar{0}, \dots, \bar{x}_n\right) = \bar{0}$

Definicja 2.

$(X_i, K, +, \cdot)$ - n przestrzeni wektorowych nad ciałem K

$i = 1, 2, \ldots, n$

$f : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to K$ odwzorowanie *f* n-liniowe nazywamy formą n-liniową

Definicja 3.

$(X, K, +, \cdot)$ przestrzeń wektorowa nad ciałem K

$\dim X = m$

$f : \underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{n} \to K$

$(f : X^n \to K)$ Odwzorowanie *f* nazywany forma n-liniową antysymetryczną, jeżeli:

1) *f* jest formą n-liniową
2) $\forall_{\sigma \in S_n} f\left(\overline{x}_{\sigma(1)}, \overline{x}_{\sigma(2)}, \ldots, \overline{x}_{\sigma(n)}\right) = \varepsilon(\sigma) f\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n\right)$

Twierdzenie 3.

Z: $f : X^n \to K$ *f* jest forma n-liniową antysymetryczną

$\overline{x}_i = \overline{x}_j \wedge i \neq j$

T: $f\left(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_i, \ldots, \overline{x}_j, \ldots, \overline{x}_n\right) = \overline{0}$

Twierdzenie 4.

Z: $f : \underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{n} \to K$ *f* jest forma n-liniową antysymetryczną

$\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_i, \ldots, \overline{x}_n$ wektory liniowo zależne

T: $f\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_i, \ldots, \overline{x}_n\right) = \overline{0}$

Twierdzenie 5. (o postaci formy n-liniowej antysymetrycznej)

Z: $(X, K, +, \cdot)$

$\dim X = n$

$B = \left(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\right)$ - baza X

$f : X^n \to K$

$\overline{x}_1 = a_{11}\overline{e}_1 + a_{21}\overline{e}_2 + \ldots + a_{n1}\overline{e}_n$

$\vdots$

$\overline{x}_i = a_{1i}\overline{e}_1 + a_{2i}\overline{e}_2 + \ldots + a_{ni}\overline{e}_n$

$i = 1, 2, \ldots, n$

T: $f\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_i, \ldots, \overline{x}_n\right) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}\right) \cdot f\left(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\right)$

Twierdzenie 6.

Z: $(X,K,+,\cdot)$

$\dim X = n$

$B = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n)$

$f : X^n \to K$

$\overline{x}_1 = a_{11}\overline{e}_1 + a_{21}\overline{e}_2 + ... + a_{n1}\overline{e}_n$

$\vdots$

$\overline{x}_i = a_{1i}\overline{e}_1 + a_{2i}\overline{e}_2 + ... + a_{ni}\overline{e}_n$

$i = 1, 2, ..., n$

T: a) jedyną formą n-liniową antysymetryczną $f : X^n \to K$: taką, że $f(\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n) = 1$ jest następująca forma: $f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot ... \cdot a_{n\sigma(n)}$

b) każda inna forma n-liniowa antysymetryczna

$g : X^n \to K$ jest postaci

$g = \mu \cdot f$ gdzie:

$\mu = g(\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n)$

Definicja 4.

$(X,K,+,\cdot)$ - przestrzeń wektorowa

$\dim X = n$

$B = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n)$ - baza X

$f : X^n \to K$

$\overline{x}_1 = a_{11}\overline{e}_1 + a_{21}\overline{e}_2 + ... + a_{n1}\overline{e}_n$

$\vdots$

$\overline{x}_i = a_{1i}\overline{e}_1 + a_{2i}\overline{e}_2 + ... + a_{ni}\overline{e}_n$

$i = 1, 2, ..., n$

Jedyną formę n-liniową antysymetryczną (z twierdzenia 6, teza a)
$f : X^n \to K : f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot ... \cdot a_{n\sigma(n)}$
nazywamy formą wyznacznikową, a jej wartość na ence wektorów nazywamy wyznacznikiem tych wektorów w bazie B i oznaczamy:

$$\det_B(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$$

UWAGA
Formę wyznacznikową utożsamiamy z wyznacznikiem

WNIOSKI:
Własności wyznaczników n-wektorów

1) $\det_B(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_n)=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}$

2) $\det_B(\overline{e}_1,\overline{e}_2,\dots,\overline{e}_n)=1$

3) $\overline{x}_1,\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_n$ są liniowo zależne $\Rightarrow \det_B(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_n)=0$

4) a) $\det_B\left(\overline{x}_{\sigma(1)},\overline{x}_{\sigma(2)},\dots,\overline{x}_{\sigma(n)}\right)=\varepsilon(\sigma)\cdot\det_B(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_n)$

b) $\det_B(\overline{x}_1,\dots,\alpha\overline{x}_i,\dots,\overline{x}_n)=\alpha\det_B(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_i,\dots,\overline{x}_n)$

$\det_B(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_i+\overline{x}_i',\dots,\overline{x}_n)=\det_B(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_i,\dots,\overline{x}_n)+\det_B(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_i',\dots,\overline{x}_n)$

5) wartość wyznacznika nie zmieni się, jeżeli do jednego z wektorów dodamy kombinację liniową pozostałych

UWAGA
Jeżeli przestrzeń $X=\mathbb{R}^n$ ma bazę kanoniczną to $\overline{x}_i=[a_{1i},a_{2i},\dots,a_{ni}]_B$

$$\det_B(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_n)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Przykład 2.

a) $\dim X=2$

$B=(\overline{e}_1,\overline{e}_2)$

$\overline{x}_1=a_{11}\overline{e}_1+a_{21}\overline{e}_2$

$\overline{x}_2=a_{12}\overline{e}_1+a_{22}\overline{e}_2$

permutacje 2 liczb		
1	2	+
2	1	-

$\det_B(\overline{x}_1,\overline{x}_2)=\sum_{\sigma\in S_2}\varepsilon(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}=+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

b) $(X,\mathbb{R},+,\cdot)$

$\dim X=3$

$B=(\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3)$

$\overline{x}_1=a_{11}\overline{e}_1+a_{21}\overline{e}_2+a_{31}\overline{e}_3$

$\overline{x}_2=a_{12}\overline{e}_1+a_{22}\overline{e}_2+a_{32}\overline{e}_3$

$\overline{x}_3=a_{13}\overline{e}_1+a_{23}\overline{e}_2+a_{33}\overline{e}_3$

permutacje 3 liczb			
1	2	3	+
2	3	1	+
3	1	2	+
1	3	2	-
3	2	1	-
2	1	3	-

$\det_B(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3)=+a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}$

Przykład 2'.

a)

$$\det_B\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2\right) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

b) metoda obrazkowa – metoda Sarrusa

$$\det_B\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3\right) = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Przykład 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -1$$