PRZESTRZEŃ AFINICZNA

Definicja 1.

$X - zbiór \quad X \neq \varnothing \quad \vec{X}$ - przestrzeń wektorowa nad ciałem K

$+ : X \times \vec{X} \to X$

$\left(X, \vec{X}, +\right)$ nazywamy przestrzenią wektorową jeżeli zachodzą:

1. $\forall_{x \in X} \; x + \vec{0} = x$

2. $\forall_{x,y \in X} \; \exists!_{\vec{v} \in \vec{X}} \; x + \vec{v} = y$

3. $\forall_{x, \in X} \; \forall_{\vec{u}, \vec{v} \in \vec{X}} \left(x + \vec{v}\right) + \vec{u} = x + \left(\vec{v} + \vec{u}\right)$

Definicja 1.

$\left(X, \vec{X}, +\right)$ - przestrzeń afiniczna

X - zbiór punktów tej przestrzeni afinicznej

$\vec{X}$ - przestrzeń tą nazywamy przestrzenią wektorów swobodnych w przestrzeni afinicznej

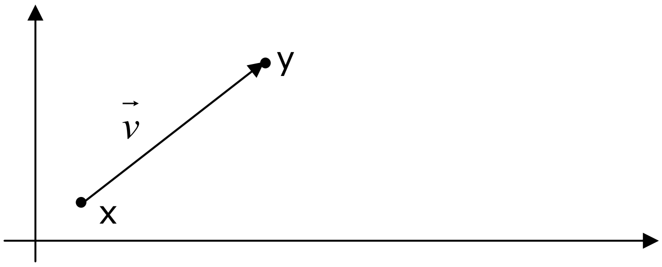
$\dim X = \dim \vec{X}$

$x + \vec{v} = y$ to $\vec{v}$ nazywamy wektorem zaczepionym o początku w punkcie a końcu w y i oznaczamy:
$\vec{v} = \overrightarrow{y - x} = \overrightarrow{xy}$

PRZYKŁAD 1.

$X = \mathbb{R}^2$ (zbiór punków na płaszczyźnie)

$\vec{X} = \overrightarrow{\mathbb{R}^2}$



Wniosek:

$\left(X, \overrightarrow{X}, +\right)$ przestrzeń afiniczna to"

1. $x + \overrightarrow{y - x} = y$

2. $x + \overrightarrow{v_1} = x + \overrightarrow{v_2} \Rightarrow \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2}$

3. $x_1 + \overrightarrow{v} = x_2 + \overrightarrow{v} \Rightarrow x_1 = x_2$

4. $\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$

5. $\overrightarrow{xy} = -\overrightarrow{yx}$

Definicja 2.

$\left(X, \overrightarrow{X}, +\right)$ przestrzeń afiniczna $\dim X = n$

$B = \left(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}\right)$ - baza $\overrightarrow{X}$

$0_0 \in X$

To zespół:

$\left(0_0, \overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}\right)$ - nazywamy układem współrzędnych z przestrzeni afinicznej. Ustalony punkt to początek układu współrzędnych.

UWAGA

$\left(X, \overrightarrow{X}, +\right)$ - przestrzeń afiniczna $\left(0_0, \overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}\right)$

$\underset{\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{X}}{\exists!} : 0_0 + \overrightarrow{v} = x \qquad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0_0 x} = \overrightarrow{x_1 e_1} + \overrightarrow{x_2 e_2} + \ldots + \overrightarrow{x_n e_n} \qquad (1)$

Definicja 3.

$x := \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ - punkt

liczby (1) nazywamy współrzędnymi punktu X

Umowa:

$(x_1, x_2, ..., x_n) = x$ - punkt

$[x_1, x_2, ..., x_n] = \overline{v}$ - współrzędne wektora

Wniosek:

$(X, \vec{X}, +)$ $(0_0, \overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n})$

1. $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$

$\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{x0_0} + \overrightarrow{0_0 y} = \overrightarrow{0_0 y} - \overrightarrow{0_0 x} = [y_1 - x_1, y_2 - x_2, ..., y_n - x_n,]$

2. $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ $\vec{v} = [v_1, v_2, ..., v_n]$

$x + \vec{v} = (x_1 + v_1, x_2 + v_2, ..., x_n + v_n)$

Definicja 4

$(X, \vec{X}, +)$ przestrzeń afiniczna $Y \subset X, Y \neq \varnothing$

Jeżeli istnieje podprzestrzeń $\vec{Y}$ przestrzeni $\vec{X}$ taka, że:

1. $\underset{x,y \in Y}{\forall} \overrightarrow{xy} \in \vec{Y}$

2. $\underset{x \in Y}{\forall} \underset{\vec{u} \in \vec{Y}}{\forall} : x + \vec{v} \in Y$

to $(Y, \vec{Y}, +)$ nazywamy podprzestrzenią afiniczną

Definicja 5 Równanie parametryczne (pod)przestrzeni afinicznej.

$(X, \vec{X}, +)$ przestrzeń afiniczna $(x_0, \overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n})$

$x \in X$ $\overrightarrow{x_0 x} \in \vec{X} <=> x = x_0 + t_1 \overline{e_1} + t_2 \overline{e_2} + ... + t_n \overline{e_n}$ (2)

załóżmy, że $t_i \in \mathbb{R}$ $i = 1, 2, 3, ..., n$
to:
x_0 - punkt początkowy
$\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}$ - wektory kierunkowe danej przestrzeni.
(2) nazywamy równaniem parametrycznym

Definicja 5

I) Dana jest przestrzeń wektorowa $\vec{X}$ i $\dim \vec{X} = n$

1) Każdą jej podprzestrzeń n-1 wymiarową nazywamy hiperpodprzestrzenią.
2) Każdą podprzestrzeń dwuwymiarową nazywamy płaszczyzną wektorową.
3) Każdą podprzestrzeń 1 wymiarową nazywamy prostą.

II) Dana jest przestrzeń:

$\left(X, \vec{X}, +\right)$ i $\dim \vec{X} = n$

1) Każdą jej podprzestrzeń n-1 wymiarową nazywamy hiperpodprzestrzenią afiniczną.
2) Każdą podprzestrzeń dwuwymiarową nazywamy płaszczyzną afiniczną.
3) Każdą podprzestrzeń 1 wymiarową nazywamy prostą afiniczną.

Wniosek:

$\left(R^n, \overrightarrow{R^n}, +\right)$

Dane:

$\overset{o}{x} = \left(\overset{o}{x}_1, \overset{o}{x}_2, \ldots, \overset{o}{x}_n\right) \qquad \left(\overset{o}{x}, \overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}\right)$

1) $x = \overset{o}{x} + t\overline{e_1} + \tau\overline{e_2} \quad t, \tau \in \mathbb{R}$ równanie płaszczyzny afinicznej

2) $\overset{o}{x}, \overline{v} \qquad x = \overset{o}{x} + t\overline{v}$ równanie prostej afinicznej

PRZYKŁAD 2

$\left(R^5, \overrightarrow{R^5}, +\right)$

1) Równanie płaszczyzny

$$\overset{o}{x} = (1, -1, 0, 2, 1) \qquad \overline{u} = [2, 3, 1, -4, 1] \qquad x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

$$\overline{v} = [-1, -1, 1, -2, 3]$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, -1, 0, 2, 1) + t[2, 3, 1, -4, 1] + \tau[-1, -1, 1, -2, 3]$$

lub zapis: $u = \left[\overrightarrow{2, 3, 1, -4, 1}\right]$

2) równanie podprzestrzeni 1 wymiarowej (prosta afiniczna)

$\overset{o}{x} = (2,3,1,-1,5)$ $\bar{v} = (\overrightarrow{-1,1,-1,1,2})$

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2,3,1,-1,5) + t(\overrightarrow{-1,1,-1,1,2})$

(równanie parametryczne prostej $t \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} x_1 = 2 - t \\ x_2 = 3 + t \\ x_3 = 1 - t \\ x_4 = -1 + t \\ x_5 = 5 + 2t \end{cases}$$