PRZESTRZEŃ WEKTOROWA (LINIOWA)

Def. 1

$(X, K, \oplus, \otimes)$ $\qquad X \neq \emptyset$, K - ciało

$\oplus : X \times X \to X$ ($\oplus$ to działanie wewnętrzne w zbiorze X)
$\otimes : K \times X \to X$ ($\otimes$ to działanie zewnętrzne w zbiorze X)

Strukturę $(X, K, \oplus, \otimes)$ nazywamy przestrzenią wektorową :$\Leftrightarrow$

1) Struktura $(X, \oplus)$ jest grupą abelową
2) $\forall \overline{x},\overline{y} \in X\ \forall \alpha \in K: \alpha \otimes (\overline{x} \oplus \overline{y}) = (\alpha \otimes \overline{x}) \oplus (\alpha \otimes \overline{y})$
3) $\forall \alpha,\beta \in K\ \forall x \in X: (\alpha \cdot \beta) \otimes x = \alpha \otimes (\beta \otimes x) \wedge (\alpha + \beta) \otimes x = (\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x)$
4) $\forall x \in X\ \mathbf{1} \otimes x = x$

Elementy zbioru X nazywamy wektorami, a elementy ciała K – skalarami.

Przyjmujemy umowę:

$\overline{x}$ - wektor

X - przestrzeń wektorowa

Przykład 1

$(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, \oplus, \otimes)$

Definiujemy działania:

$\mathbb{R}^3 \ni (x_1, y_1, z_1) \oplus (x_2, y_2, z_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

$\mathbb{R} \ni \alpha \otimes (x, y, z) := (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

Sprawdzamy czy $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ jest przestrzenią wektorową.

Czy $(\mathbb{R}^3, \oplus)$ jest grupą abelową?

$[(x_1, y_1, z_1) \oplus (x_2, y_2, z_2)] \oplus (x_3, y_3, z_3) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \oplus (x_3, y_3, z_3) = (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2+y_3), z_1 + (z_2 + z_3)) = (x_1, y_1, z_1) \oplus [(x_2, y_2, z_2) \oplus (x_3, y_3, z_3)]$

wniosek: działanie $\oplus$ jest łączne

Z przemienności dodawania wynika przemienność działania $\oplus$.

Elementem neutralnym działania $\oplus$ jest $\overline{\mathbf{0}} = (0, 0, 0)$

Każdy element (x, y, z) posiada element przeciwny równy (-x, -y, -z)

bo $(x, y, z) \oplus (-x, -y, -z) = (0, 0, 0) \wedge (-x, -y, -z) \oplus (x, y, z) = (0, 0, 0)$

Więc struktura $(\mathbb{R}^3, \oplus)$ jest grupą abelową. Pozostałe warunki łatwo sprawdzić.

Wniosek: $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ – jest przestrzenią wektorową.

Przyjmujemy umowę:

Zamiast $\oplus$ piszemy +, a zamiast $\otimes$ piszemy „·” i przestrzeń wektorową zapisujemy: $(X, K, +, \cdot)$

Def. 2
Element neutralny działania + nazywamy wektorem zerowym i oznaczamy: $\overline{0}$

Przykład 2
$X \neq \varnothing$ $F(X,\mathbb{R}) = \{f: f: X \to \mathbb{R}\}$ -- zb. odwzorowań

$(F(X,\mathbb{R}),\mathbb{R}, +, \cdot)$
Definiujemy działania:
$+ : F(X,\mathbb{R}) \times F(X,\mathbb{R}) \to F(X,\mathbb{R})$
$f, g \in F(X,\mathbb{R})$
$f + g = h :\Leftrightarrow \forall x \in X : (f+g)(x) = f(x) + g(x) = h(x)$

$\alpha \cdot f = g :\Leftrightarrow \forall x \in X\ (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$
W tym przypadku wektorami są odwzorowania.
$F(X,\mathbb{R}) \ni \overline{0} : \forall x \in X\ \overline{0}(x) = 0$ (Wektorem zerowym jest odwzorowanie!)

Łatwo zauważyć, że spełnione są odpowiednie warunki i struktura $(F(X,\mathbb{R}),\mathbb{R}, +, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową.

Def. 3
Z: $(X, K, +, \cdot)$ – przestrzeń wektorowa
$U \neq \varnothing$, $U \subset X$

Strukturę $(U, K, +, \cdot)$ nazywamy podprzestrzenią wektorową przestrzeni X $:\Leftrightarrow$
1) $\forall \overline{x}, \overline{y} \in U : (\overline{x} + \overline{y}) \in U$
2) $\forall \alpha \in K\ \forall \overline{x} \in U : (\alpha \cdot \overline{x}) \in U$

Przykład 3
$(R^3, R, +, \cdot)$ – przestrzeń wektorowa (patrz: Przykład 1)
a). $U := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$

Sprawdzamy, czy $(U, \mathbb{R}, +, \cdot)$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^3$.
$U \neq \varnothing$ ponieważ np. $(1, 0, 1) \in U$
$U \ni \overline{x} = (x_1, y_1, z_1) \Rightarrow x_1 + y_1 + z_1 = 0$
$U \ni \overline{y} = (x_2, y_2, z_2) \Rightarrow x_2 + y_2 + z_2 = 0$

Pytamy, czy $\overline{x} + \overline{y} \in U$ (pierwszy warunek podprzestrzeni)
$\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$
$x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) = 0 + 0$

Teraz pytamy, czy $\alpha \cdot \overline{x} \in U$ (drugi warunek podprzestrzeni)
$\alpha \cdot \overline{x} = \alpha \cdot (x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$
$\alpha x + \alpha y + \alpha z = \alpha(x + y + z) = \alpha \cdot 0 = 0$

Wniosek: ponieważ spełnione są obydwa powyższe warunki to $(U, \mathbb{R}, +, \cdot)$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^3$

b). $V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$
Sprawdzamy, czy struktura $(V, R, +, \cdot)$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

$V \neq \emptyset$ ponieważ np. $(1, -1, 1) \in V$
$V \ni \overline{x} = (x_1, y_1, z_1) \Rightarrow x_1 + y_1 + z_1 = 1$
$V \ni \overline{y} = (x_2, y_2, z_2) \Rightarrow x_2 + y_2 + z_2 = 1$

Pytamy, czy $\overline{x} + \overline{y} \in U$ (pierwszy warunek podprzestrzeni)
$\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$
$x_1+x_2 + y_1+y_2 + z_1+z_2 = (x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) = 1 + 1 = 2 \neq 1$

Wniosek: Ponieważ powyższy warunek nie jest spełniony to (V, R, +,) nie jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Twierdzenie 1
Każda podprzestrzeń przestrzeni wektorowej jest przestrzenią wektorową.

Z: $(X, K, +, \cdot)$ – przestrzeń wektorowa,
$U \neq \emptyset \wedge U \subset X$
$(U, K, +, \cdot)$ – podprzestrzeń wektorowa przestrzeni X

T: $(U, K, +, \cdot)$ – przestrzeń wektorowa

Własności działań w przestrzeni wektorowej.

1) $\forall \overline{x} \in X : \overline{x} \cdot 0 = \overline{0}$
2) $\forall \alpha \in K : \alpha \cdot \overline{0} = \overline{0}$
3) $\forall \alpha \in K \, \forall \overline{x} \in X : -(\alpha \cdot \overline{x}) = (-\alpha) \cdot \overline{x} = \alpha \cdot (-\overline{x})$
4) $\forall \alpha \in K \, \forall \overline{x} \in X : \alpha \cdot \overline{x} = \overline{0} \Leftrightarrow \alpha = 0 \vee \overline{x} = \overline{0}$
5) $\forall \alpha \neq 0 \forall \overline{x}, \overline{y} \in X : \alpha \cdot \overline{x} = \alpha \cdot \overline{y} \Rightarrow \overline{x} = \overline{y}$
6) $\forall \alpha, \beta \in K \forall \overline{x} \neq \overline{0} : \alpha \cdot \overline{x} = \beta \cdot \overline{x} \Rightarrow \alpha = \beta$

Twierdzenie 2 (Warunek konieczny i wystarczający na podprzestrzeń).
Z: $(X, K, +, \cdot)$ – przestrzeń wektorowa
$U \neq \emptyset \wedge U \subset X$

T: $(U, K, +, \cdot)$ jest podprzestrzenią przestrzeni X $\Leftrightarrow$
$\forall \alpha, \beta \in K \forall \overline{x}, \overline{y} \in U : (\alpha \cdot \overline{x} + \beta \cdot \overline{y}) \in U$

Twierdzenie 3
Z: $(X, K, +, \cdot)$ – przestrzeń wektorowa

$U \neq \emptyset \wedge U \subset X$

T: (U, K, +, ·) jest podprzestrzenią przestrzeni X
$\Leftrightarrow \forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K \forall \overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n \in U : (\alpha_1 \cdot \overline{x}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{x}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \overline{x}_n) \in U$

Def. 4
Z: (X, K, +, ·) – przestrzeń wektorowa
$\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n \in X \wedge \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$
$\overline{x} = \alpha_1 \cdot \overline{x}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{x}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \overline{x}_n$
Mówimy, że wektor $\overline{x}$ jest kombinacją liniową wektorów $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$
$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ - nazywamy współczynnikami kombinacji liniowej.

Def. 5
(X, K, +,·) – przestrzeń wektorowa
$\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n \in X$ - wektory z przestrzeni X

Wektory $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ są liniowo zależne $:\Leftrightarrow \exists \alpha_1 \cdot \overline{x}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{x}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \overline{x}_n = \overline{0} \wedge \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 > 0$

Def. 6
(X, K, +, ·) – przestrzeń wektorowa
$\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n \in X$
Wektory $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ są liniowo niezależne $:\Leftrightarrow$ nie są liniowo zależne
$(:\Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \overline{x}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{x}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \overline{x}_n = \overline{0} \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = 0)$

Przykład 4
$(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ – przestrzeń wektorowa
a). $\overline{u} = (0,1,1)$ $\overline{v} = (1,0,0)$ $\overline{w} = (1,1,1)$
Sprawdzamy, czy wektory $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ są liniowo zależne/niezależne

Pytamy kiedy $\alpha \cdot \overline{u} + \beta \cdot \overline{v} + \gamma \cdot \overline{w} = \overline{0}$
$\alpha(0,1,1) + \beta(1,0,0) + \gamma(1,1,1) = (0,0,0)$
$(0,\alpha,\alpha) + (\beta,0,0) + (\gamma,\gamma,\gamma) = (0,0,0)$
$(\beta+\gamma, \alpha+\gamma, \alpha+\gamma) = (0,0,0)$
Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases}$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy:

$$\begin{cases} \alpha = -t \\ \beta = -t \\ \gamma = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Czyli $\exists \alpha,\beta,\gamma : \alpha\neq 0 \vee \beta\neq 0 \vee \gamma\neq 0 : \alpha \cdot \overline{u} + \beta \cdot \overline{v} + \gamma \cdot \overline{w} = \overline{0}$
Np. dla t=2

$$\begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

Wniosek: Wektory $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ są liniowo zależne.

b). $\overline{u} = (3,2,-1)$ $\overline{v} = (1,-2,1)$ $\overline{w} = (1,1,1)$

Pytamy kiedy $\alpha \cdot \overline{u} + \beta \cdot \overline{v} + \gamma \cdot \overline{w} = \overline{0}$

$\alpha(3,2,-1) + \beta(1,-2,1) + \gamma(1,1,1) = (0,0,0)$

$(3\alpha+\beta+\gamma,\ 2\alpha-2\beta+\gamma,\ -\alpha+\beta+\gamma) = (0,0,0)$

Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} -\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha - 2\beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy:

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Wniosek: Wektory $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ są liniowo niezależne.

Twierdzenie 4

Z: (X, K, + ,·) – przestrzeń wektorowa

$\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n \in X$ - liniowo niezależne

T: Jeżeli wektor $\overline{x}$ jest kombinacją wektorów $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ to współczynniki tej kombinacji liniowej są wyznaczone jednoznacznie (z dokładnością do kolejności)

Czyli

Jeżeli:

$\overline{x} = \alpha_1 \cdot \overline{x}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{x}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \overline{x}_n \ \wedge\ \overline{x} = \beta_1 \cdot \overline{x}_1 + \beta_2 \cdot \overline{x}_2 + \ldots + \beta_n \cdot \overline{x}_n$

to:

$\alpha_1=\beta_1 \wedge \alpha_2=\beta_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n=\beta_n$

Twierdzenie 5

Z: (X, K, +, ·) – przestrzeń wektorowa

$\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n \in X$

T: Wektory $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ są liniowo zależne $\Leftrightarrow$ przynajmniej jeden z nich jest kombinacją liniową pozostałych ($\Leftrightarrow \exists i: \overline{x}_i = \alpha_1\overline{x}_1 + \ldots + \alpha_{i-1}\overline{x}_{i-1} + \alpha_{i+1}\overline{x}_{i+1} + \ldots + \alpha_n\overline{x}_n$).

Wnioski:

1) Jeżeli wektory są liniowo niezależne to żaden z nich nie jest kombinacją liniową pozostałych,
2) Zespół wektorów: $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{0}, \ldots, \overline{x}_n$ jest liniowo zależny.

Def. 7

Z: (X, K, +, ·) – przestrzeń wektorowa

$A \subset X \wedge A \neq \varnothing$

Liniową powłoką zbioru A nazywamy zbiór:

$\mathrm{Lin}A := \{\overline{x} \in X: \exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K: \exists \overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n \in A: \overline{x} = \alpha_1 \cdot \overline{x}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{x}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \overline{x}_n$

Czyli:

$\mathrm{Lin}A$ to zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów ze zbioru A.

Twierdzenie 6

Z: (X, K, +, ·) – przestrzeń wektorowa

$A \neq \varnothing \wedge A \subset X$

T: ($\mathrm{Lin}A$, K, +, ·) jest podprzestrzenią przestrzeni X (czyli dla siebie przestrzenią)

Def. 8

Z: (X, K, +, ·)

$A \neq \varnothing \wedge A \subset X$

T: ($\mathrm{Lin}A$, K, +, ·) – nazywamy przestrzenią generowaną przez zbiór A

Def. 9

Z: (X, K, +, ·) – przestrzeń wektorowa, $A \neq \varnothing$

Zbiór A nazywamy bazą przestrzeni wektorowej jeżeli:

1) $\mathrm{Lin}A = X$ (każdy wektor z X daje się przedstawić jako kombinacja liniowa wektorów z A)
2) $\forall \overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n \in A$ wektory $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ są liniowo niezależne

Przykład 5

Z: ($\mathbb{R}^3, \mathbb{R}$, +, ·)

$A = \{\overline{u} = (3,2,-1), \overline{v} = (1,-2,1), \overline{w} = (1,1,1)\}$

Sprawdzamy, czy A jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Pytamy, czy $\mathrm{Lin}A = \mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) = \alpha(3, 2, -1) + \beta(1, -2, 1) + \gamma(1, 1, 1)$

$(3\alpha+\beta+\gamma, 2\alpha-2\beta+\gamma, -\alpha+\beta+\gamma) = (x, y, z)$

Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} -\alpha + \beta + \gamma = z \\ 2\alpha - 2\beta + \gamma = y \\ 3\alpha + \beta + \gamma = x \end{cases}$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}z \\ \beta = \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{12}z \\ \gamma = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \end{cases}$$

Czyli: (x, y, z) = $(\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}z)\cdot$(3, 2, -1) + $(\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}y+\frac{1}{12}z)\cdot$(1, -2, 1) +
$(\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z)\cdot$(1, 1, 1)
Wniosek: $\mathrm{Lin}A = \mathbb{R}^3$
Liniową niezależność wektorów $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ sprawdziliśmy w przykładzie 4 b).
Wniosek: A jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Uwaga

Każdy podzespół zespołu wektorów liniowo niezależnych jest zespołem wektorów liniowo niezależnych (ale NIE NA ODWRÓT).

Twierdzenie 7

Z: (X, K, +, ·) – przestrzeń wektorowa
T: Każda niezerowa (nie złożona tylko z $\overline{0}$) przestrzeń wektorowa posiada bazę.
Ponadto:
Jeżeli istnieje baza skończona i $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n \in X$ stanowią bazę X oraz $y_1, y_2, \ldots, y_n$ też stanowią bazę to n = k.

Def. 10

Z: (X, K, +, ·) – przestrzeń wektorowa
Jeżeli przestrzeń posiada bazę złożoną ze skończonej liczby wektorów to mówimy, że przestrzeń jest skończenie wymiarowa i ilość wektorów w bazie nazywamy wymiarem przestrzeni dim X = n
Jeżeli przestrzeń posiada bazę z nieskończoną ilością wektorów to jest nieskończenie wiele wymiarowa (dim X = $+\infty$).
Jeżeli przestrzeń składa się tylko z wektora zerowego to przyjmujemy z definicji: $\dim\{\overline{0}\} := 0$

Def. 11

Z: (X, K, +, ·) – przestrzeń wektorowa
Reperem bazowym (krótko: bazą) nazywamy bazę, w której ustaliliśmy kolejność wektorów.

Def. 12

Z: (X, K, +, ·) – przestrzeń wektorowa
$B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ – reper bazowy i wektor $\overline{x} \in X$ przedstawiamy jako
$\overline{x} = \alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{e}_n$ to
$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nazywamy współrzędnymi wektora $\overline{x}$ w bazie B (względem bazy B) i stosujemy zapis $\overline{x} = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]_B$

Przykład 6

Z: $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$
$A = (\overline{u} = (3,2,-1), \overline{v} = (1,-2,1), \overline{w} = (1,1,1))$ - baza $\mathbb{R}^3$
Znaleźć współrzędne wektora (4, 4, 8) w bazie A.

(4, 4, 8) = α(3, 2, -1) + β(1, -2, 1) + γ(1, 1, 1)
Korzystając z przykładu 5 mamy:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}z \\ \beta = \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{12}z \\ \gamma = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \end{cases}$$

Czyli:

$$(4,4,8) = -(3,2,-1) + \tfrac{1}{3}(1,-2,1) + \tfrac{20}{3}(1,1,1) = [-1, \tfrac{1}{3}, \tfrac{20}{3}]_B$$

Przykład 7

Przy założeniach z poprzedniego przykładu: znaleźć wektor, którego współrzędne w bazie A wynoszą $[1,-1,2]_A$.
(x, y, z) = $[1,-1,2]_A$ = 1(3,2,-1) + (-1)(1,-2,1) + 2(1,1,1) = (4,6,0)
Czyli: (x, y, z) = (4,6,0)

Przykład 8

$(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$

$$B = (e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1))$$

Sprawdzamy, czy B jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$.
Pytamy, czy wektory bazowe generują całą przestrzeń $\mathbb{R}^3$.
(x, y, z) = α(1,0,0) + β(0,1,0) + γ(0,0,1) = (α, β, γ)

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \gamma \end{cases}$$

Wniosek: wektory z B generują całą przestrzeń $\mathbb{R}^3$.

Pytamy, czy wektory e_1, e_2, e_3 są liniowo niezależne.
α(1,0,0) + β(0,1,0) + γ(0,0,1) = (0,0,0)
(α, β, γ) = (0,0,0)

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Wniosek: wektory z B są liniowo niezależne.

Czyli: B jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$.
Współrzędne wektora w bazie B:
(x, y, z) = $[x, y, z]_B$ – bazę taką nazywamy bazą kanoniczną.

Baza kanoniczna przestrzeni $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ ma postać:

$$B = (\overline{e}_1 = (1,0,...,0), \overline{e}_2 = (0,1,0,...,0), ..., \overline{e}_n = (0,0,...,1))$$

Wnioski:
Z: (X, K, +, $\cdot$) – przestrzeń wektorowa dim X = n

a) każdy zespół n+1 wektorów jest liniowo zależny
b) każdy zespół n wektorów które generują przestrzeń jest liniowo niezależny

c) każdy zespół n wektorów liniowo niezależnych generuje przestrzeń

Uwaga

1) **Jeśli znamy wymiar przestrzeni n** to aby sprawdzić czy n wektorów jest bazą przestrzeni wystarczy sprawdzić jeden z dwóch warunków na bazę (albo liniową niezależność, albo czy generują całą przestrzeń).
2) Z: $(X, K, +, \cdot)$ – przestrzeń wektorowa , $\dim X = n$
   $U \subset X$, U – podprzestrzeń przestrzeni X
   To: $n \geq \dim U$
   $\dim U = n \Leftrightarrow U = X$

Def. 13

Z: $(X, K, +, \cdot)$ – przestrzeń wektorowa
$(X_1, K, +, \cdot)$, $(X_2, K, +, \cdot)$ – podprzestrzenie przestrzeni X

Sumą dwóch podprzestrzeni nazywamy zbiór

$$X_1 + X_2 := \{\overline{x} \in X : \exists \overline{x}_1 \in X_1 \wedge \exists \overline{x}_2 \in X_2 : \overline{x} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2\}$$

Twierdzenie 8

Jeżeli: $(X, K, +, \cdot)$ – przestrzeń wektorowa
$(X_1, K, +, \cdot)$, $(X_2, K, +, \cdot)$ – podprzestrzenie przestrzeni X

To:

1) $(X_1+X_2, K, +, \cdot)$ – jest podprzestrzenią przestrzeni X.
2) $(X_1 \cap X_2, K, +, \cdot)$ – jest podprzestrzenią przestrzeni X

Uwaga

Unia dwóch podprzestrzeni $(X_1 \cup X_2)$ na ogół nie jest podprzestrzenią.

Przykład 9

$(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$

$X_1=\{(0, y): y \in \mathbb{R}\}$ $(X_1, \mathbb{R}, +, \cdot)$ – podprzestrzeń $\mathbb{R}^2$

$X_2=\{(x, 0): x \in \mathbb{R}\}$ $(X_2, \mathbb{R}, +, \cdot)$ – podprzestrzeń $\mathbb{R}^2$

$$\overline{e}_1 \in X_1 \quad \overline{e}_1 = (0,1) \Rightarrow \overline{e}_1 \in (X_1 \cup X_2)$$
$$\overline{e}_2 \in X_2 \quad \overline{e}_2 = (1,0) \Rightarrow \overline{e}_2 \in (X_1 \cup X_2)$$
$$\overline{e}_1 + \overline{e}_2 = (1,1) \notin (X_1 \cup X_2)$$

Def. 14

Z: $(X, K, +, \cdot)$ – przestrzeń wektorowa
$(X_1, K, +, \cdot)$, $(X_2, K, +, \cdot)$ – podprzestrzenie przestrzeni X

Sumą prostą podprzestrzeni $X_1 \oplus X_2$ nazywamy zbiór:

$$X_1 \oplus X_2 := \{\overline{x} \in X : \exists! \overline{x}_1 \in X_1 \wedge \exists! \overline{x}_2 \in X_2 : \overline{x} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2\}$$

Twierdzenie 9
Suma dwóch podprzestrzeni jest sumą prostą $\Leftrightarrow$ częścią wspólną podprzestrzeni jest wektor zerowy.
$$X_1 \oplus X_2 = X_1 + X_2 \Leftrightarrow X_1 \cap X_2 = \{\overline{0}\}$$

Def. 15
Z: $(X, K, +, \cdot)$ – przestrzeń wektorowa
X_1 – podprzestrzeń przestrzeni X oraz
X_2 taka podprzestrzeń przestrzeni X, że: X_2: $X=X_1 \oplus X_2$ to
X_2 nazywamy przestrzenią uzupełniającą przestrzeni X_1

Twierdzenie 10
Każda podprzestrzeń posiada przestrzeń uzupełniającą.

Twierdzenie 11
1) $\dim (X_1+X_2) = \dim X_1 + \dim X_2 - \dim (X_1 \cap X_2)$
2) $\dim (X_1 \oplus X_2) = \dim X_1 + \dim X_2$

Wniosek:
$X = X_1 \oplus X_2 \Rightarrow \dim X = \dim X_1 + \dim X_2$