RELACJE I ODWZOROWANIA

Definicja 1.

Dwuargumentową relacją określoną w iloczynie kartezjańskim $X \times Y$, $X \neq \emptyset \wedge Y \neq \emptyset$ nazywamy uporządkowaną trójkę $R = (X, grR , Y)$, gdzie $grR \subset X \times Y$.
Zbiór X nazywamy naddziedziną relacji.
Zbiór Y nazywamy zapasem relacji.
grR to wykres relacji.

Mówimy, że dwa elementy $x \in X \wedge y \in Y$ są w relacji R $\Leftrightarrow$ $(x, y) \in grR$

Definicja 2.

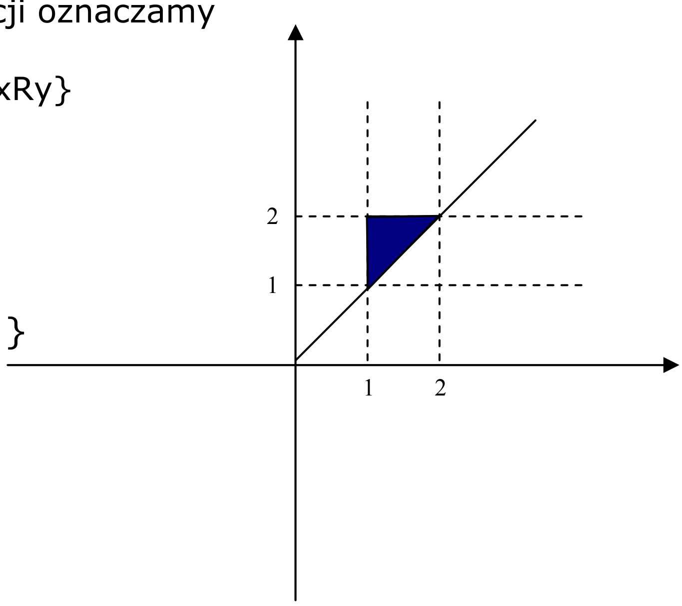
$R = (X, grR, Y)$
Dziedzinę relacji oznaczamy D_R
$D_R := \{ x \in X: \exists\, y \in Y: xRy \}$

Przeciwdziedzinę relacji oznaczamy

$\square$ R $:= \{y \in Y: \exists x \in X: xRy\}$

PRZYKŁAD 1.

$X=[1,2]$, $Y=[1,2]$
$grR = \{(x,y): x \leq y \}$



Definicja 3.

$R= (X, grR, Y)$
Relacją odwrotną do relacji R nazywamy relację $R^{-1} = (Y, grR^{-1}, X)$, gdzie $grR^{-1} = \{(x,y) \in Y \times X: (y,x) \in grR \}$

Definicja 4.

Niech R i S to następujące relacje:
R= (X, grR, U)
S= (U, grS, Y)
Złożeniem relacji R z relacją S nazywamy relację

$$(S\circ R):=\left(X,\mathrm{gr}(S\circ R),Y\right),\ \text{gdzie}$$

$$\mathrm{gr}(S\circ R):=\left\{(x,y)\in X\times Y:\underset{u\in U}{\exists}:xRu\wedge uSy\right\}$$

PRZYKŁAD 2.

$$R=(\mathbb{N},grR,\mathbb{N})$$
$$grR=\{(2,1),(3,1),(4,2),(4,5),(5,3)\}$$
$$S=(\mathbb{N},grS,\mathbb{N})$$
$$grS=\{(1,3),(4,1),(3,6),(6,8),(6,7)\}$$
$$D_R=\{2,3,4,5\}\subset\mathbb{N}$$
$$\text{ᗡ}_R=\{1,2,3,5\}\subset\mathbb{N}$$
$$S\circ R=(\mathbb{N},gr(S\circ R),\mathbb{N})\wedge$$
$$gr(S\circ R)=\{(2,3),(3,3),(5,6)\}$$
$$R\circ S=(\mathbb{N},gr(R\circ S),\mathbb{N})\wedge$$
$$gr(R\circ S)=\{(1,1)\}$$

Definicja 5.

R = (X, grR , Y) $\wedge$ X=Y $\neq \varnothing$ relacje, czyli
R = (X, grR , X)

Relacja jest relacją równoważności, gdy spełnione są warunki:

1° Relację nazywamy zwrotną: $\Leftrightarrow \forall x\in X$: xRx
2° Relację nazywamy symetryczną: $\Leftrightarrow \forall x,y\in X$: xRy $\Rightarrow$ yRx
3° Relację nazywamy przechodnią: $\Leftrightarrow \forall x,y,z\in X$: xRy $\wedge$ yRz $\Rightarrow$ xRz
Przyjmujemy oznaczenie (X,R)

Definicja 6.

Jeżeli (X,R) jest zbiorem z relacją równoważności i x$\in$ X to klasą równoważności elementu x nazywamy zbiór:
[x]:={y$\in$X: xRy }

PRZYKŁAD 3.
R jest relacją równości w zbiorze liczb rzeczywistych.
R=($\mathbb{R}$,=), xRy $\Leftrightarrow$ x=y

1° $\forall x\in\mathbb{R}$ $x=x \Rightarrow xRx$

2° $\forall x,y\in\mathbb{R}$ $xRy \Rightarrow x=y \Rightarrow y=x \Rightarrow yRx$

3° $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ $xRy \wedge yRz \Rightarrow x=y \wedge y=z \Rightarrow x=z \Rightarrow xRz$

PRZYKŁAD 4.

$X=\{\overrightarrow{AB}\}$

$\overrightarrow{AB}$ R $\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|\overrightarrow{CD}\right\| \wedge \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ (wektory są zgodnie równoległe)

Z wasnosci *wektorów*

1°$\overrightarrow{AB}$ R $\overrightarrow{AB}$, gdyż $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \wedge \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$

2° $\overrightarrow{AB}$ R $\overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD}$ R $\overrightarrow{AB}$

3° $\overrightarrow{AB}$ R $\overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{CD}$ R $\overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ R $\overrightarrow{CD}$

$\left[\overrightarrow{AB}\right]=\{\overrightarrow{CD} : \overrightarrow{AB} \text{ R } \overrightarrow{CD}\}$

W tej relacji klasą równoważnoci $\overrightarrow{AB}$ jest wektor swobodny.

Definicja 7.
(X,R) – zbiór z relacją równoważności
Zbiór klas równoważności relacji nazywamy zbiorem ilorazowym i oznaczamy $X/_R := \{[x]: x\in X\}$

TWIERDZENIE 1.
Z: (X,R) – zbiór z relacją równoważności
T:
1° $\forall x\in X: [x]\neq\emptyset$
2° $\forall [x],[y]\in X/_{\mathbf{R}} : [x]\neq[y]\Rightarrow[x]\cap[y]=\emptyset$
3° $\forall [x]\in X/_{\mathbf{R}} : \mathbf{x}=X$

WNIOSEK

Relacja równoważności w zbiorze X dzieli ten zbiór na podzbiory niepuste, rozłączne, dające w sumie cały zbiór X.

Definicja 8.
(X,R) – zbiór z relacją równoważności

1° Relację nazywamy antysymetryczną: $\Leftrightarrow \forall x,y \in X: xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y$
2° Relacja nazywamy asymetryczną: $\Leftrightarrow \forall x,y \in X: xRy \Rightarrow \neg(yRx)$
3° Relacja nazywamy spójną: $\Leftrightarrow \forall x,y \in X: xRy \vee yRx \vee x=y$

Definicja 9.

A) Jeśli dwuelementowa relacja (X,R) jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia to nazywamy ją relacją słabego porządku częściowego. Jeżeli dodatkowo jest spójna to nazywamy ją relacją słabego porządku totalnego albo liniowego.
B) Jeżeli dwuelementowa relacja (X,R) jest asymetryczna i przechodnia to nazywamy ją relacją silnego porządku częściowego, jeżeli ponadto jest spójna to jest to relacja silnego porządku liniowego lub totalnego.
C) Jeżeli w zbiorze X określona jest którakolwiek z powyższych relacji, to zbiór nazywamy uporządkowanym
   - Częściowo, jeżeli R jest relacją porządku częściowego,
   - Totalnie, jeżeli R jest relacją porządku liniowego.

PRZYKŁAD 5.

$(\mathbb{R}, R)$, xRy: $\Leftrightarrow x \le y$

Sprawdzamy, czy relacja $(\mathbb{R}, \le)$ jest relacją porządku.

Z własnosci liczb rzeczywistych

1° $\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} x \le x$

2° $\underset{x,y\in\mathbb{R}}{\forall} x \le y \wedge y \le x \Rightarrow x = y$

3° $\underset{x,y,z\in\mathbb{R}}{\forall} x \le y \wedge y \le z \Rightarrow x \le z$

4° $\underset{x,y\in\mathbb{R}}{\forall} x \le y \vee y \le x \vee x = y$

Re*lacja* jest relacją słabego porządku liniowego.

PRZYKŁAD 6.

$(2^E, R)$ A R B $\Leftrightarrow$ A $\subset$ B

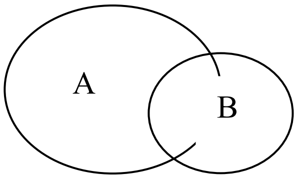
1° $\underset{A\in 2^E}{\forall}$ $A \subset A$

2° $\underset{A,B\in 2^E}{\forall}$ $A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$

3° $\underset{A,B,c\in 2^E}{\forall}$ $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset B$

Jest to relacja slabego porządku częsciowego.

Relacja nie jest spójna na przykład dla zbiorów z



ELEMENTY WYRÓŻNIONE ZBIORU UPORZĄDKOWANEGO

Definicja 10.
(X,R) –zbiór uporządkowany
1° $M\in X$, M nazywamy elementem największym zbioru słabouporządkowanego: $\Leftrightarrow$ $\forall x\in X$ xRM (dla silnego porządku $M\neq x$)

2° $m\in X$, m nazywamy elementem najmniejszym zbioru słabouporządkowanego: $\Leftrightarrow$ $\forall x\in X$ mRx (dla silnego porządku $m\neq x$)

TWIERDZENIE 2.

(X,R) – zbiór uporządkowany
Jeżeli w zbiorze X istnieje element największy (najmniejszy) to jest on jedyny.

Definicja 11.
(X,R) – zbiór uporządkowany
1° $\xi\in X \wedge \xi\neq x$, ξ nazywamy elementem maksymalnym zbioru słabouporządkowanego: $\Leftrightarrow$ $\neg(\exists x\in X: \xi R x)$ (dla silnego porządku $\xi\neq x$)

2° $\eta\in X \wedge \eta\neq x$, η nazywamy elementem minimalnym zbioru uporządkowanego: $\Leftrightarrow$ $\neg(\exists x\in X: xR\eta)$ (dla silnego porządku $\eta\neq x$)

PRZYKŁAD 8.

$\left(\mathbb{N}^*, |\right)$ x|y: $\Leftrightarrow \underset{k\in\mathbb{N}}{\exists}: \ \frac{y}{x} = k \Leftrightarrow y = kx$

1° $\underset{x\in\mathbb{N}^*}{\forall}$ x|x bo x=1x

2° x|y $\wedge$ y|x $\Rightarrow$ x=y

Warunek ten jest w formie twierdzenia

Z:

$\underset{k_1\in\mathbb{N}}{\exists}: y = k_1 x$

$\underset{k_2\in\mathbb{N}}{\exists}: x = k_2 y$

T: x=y

D:

$$\left.\begin{matrix} y=k_1 x \\ x = k_2 y \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = k_1 k_2 y \wedge k_1 k_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow k_1 k_2 = 1 \Rightarrow k_1 = 1 \wedge k_2 = 1 \Rightarrow x = y$$

3° x|y $\wedge$ y|z $\Rightarrow$ x|z

Z:

$\underset{k_1\in\mathbb{N}}{\exists}$: y=$k_1 x$

$\underset{k_2\in\mathbb{N}}{\exists}: x = k_2 y$

T:

$\underset{k_3\in\mathbb{N}}{\exists}: z = k_3 x$

D: z=$k_2 y$

z=$k_2 k_1 x$

$z = k_3 x$

$k_3 = k_2 k_1 \in \mathbb{N}$

*R*elacja nie jest spójna, bo na przykład dla liczb 2 $\wedge$ 3

$\neg(2|3) \wedge \neg(3|2) \wedge \neg(2 = 3)$

$\underset{x_1, y\in\mathbb{N}^*}{\forall} x \mid y \ \cup \ y \mid x' \ \cup$ x=y

Jest to więc relacja słabego porządku częściowego.

PRZYKŁAD 9.

a) (A, |) – relacja podzielności w zbiorze A tzn. x,y$\in$A :xRy $\Leftrightarrow$ x|y

A={1,2,4,8,16}

m=1   bo 1|2, 1|4, 1|8, 1|16
M=16 bo 1|16 ,2|16, 4|16, 8|16

b) (B, |)

B={1,2,3,4,5,6,7,8}

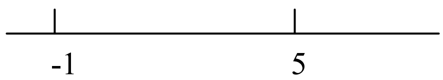
m=1

η=1

ξ=8
ξ=7
ξ=6
ξ=5

Definicja 12.
(X,R) –zbiór uporządkowany , $A \subset X$, $A \neq \emptyset$

1° $\nu \in X$ ν nazywamy majorantą zbioru uporządkowanego A: $\Leftrightarrow$ $\forall x \in A$: $xR\nu$



$(\mathbb{R}, \leq)$ Majorantą jest np. 6

2° $\zeta \in X$, ζ nazywamy minorantą zbioru uporządkowanego A: $\Leftrightarrow$ $\forall x \in A$: $\zeta R x$

Definicja 13.

Jeżeli zbiór A posiada co najmniej jedną majorantę, to mówimy, że jest on ograniczony od góry.

Jeżeli zbiór A posiada co najmniej jedną minorantę, to mówimy, że jest on ograniczony od dołu.

(X,R), $A \subset X$, (A,R)
Kresem górnym zbioru A w zbiorze X nazywamy, o ile istnieje, element najmniejszy zbioru majorant i oznaczamy go supA.

(X,R), $A\subset X$, (A,R)
Kresem dolnym zbioru A w zbiorze X nazywamy, o ile istnieje, element największy zbioru minorant i oznaczamy go infA.

Definicja 14.
$R=(X,grR,Y)$ - relacja

1° relację nazywamy relacją prawostronnie jednoznaczną (funkcją):$\Leftrightarrow$
$\forall x\in X \wedge \forall y_1,y_2\in Y$: $xRy_1 \wedge xRy_2 \Rightarrow y_1=y_2$

2° relację nazywamy relacją lewostronnie jednoznaczną (injektywną) :$\Leftrightarrow$
$\forall x_1,x_2\in X \wedge \forall y\in Y$: $x_1Ry \wedge x_2Ry \Rightarrow x_1=x_2$

3° relację R nazywamy surjektywną: $\Leftrightarrow$ ᗡ$_R=Y$

4° relację R nazywamy wszędzie określoną: $\Leftrightarrow$ $D_R=X$

5° relację wszędzie określoną i prawostronnie jednoznaczną (funkcję wszędzie określoną) nazywamy odwzorowaniem.

6° odwzorowanie, które jest injektywne i surjektywne nazywamy odwzorowaniem bijektywnym.