# STRUKTURY ALGEBRAICZNE

## Definicja 1

Z: niech A oznacza zbiór, $A \neq \emptyset$

Działaniem wewnętrznym (działaniem) określonym w zb. A nazywamy każde odwzorowanie:

h: $A \times A \to A$. Wartość tego odwzorowania h(a, b) nazywamy wynikiem działania

Oznaczenia: (A, h) lub (A, $\circ$)

Zamiast h(a, b) piszemy $a \circ b$

**Uwaga:**

Zapis $a \circ b$ utożsamiamy z wynikiem działania.

## Przykład 1

a).

h: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

h(n, k) = n + k (n + k) $\in \mathbb{Z}$

Piszemy: ($Z$, +)

b).

$\mathbb{Z}$* h(n, k) = $\frac{n}{k}$

Powyższe działanie nie jest działaniem określonym w $\mathbb{Z}$*.

## Definicja 2

Dane są zbiory F, X takie, że: $F, X \neq \emptyset$

Działaniem zewnętrznym w zbiorze X nazywamy każde odwzorowanie g: $F \times X \to X$

Oznaczamy: $g(\alpha, a)$, gdzie $\alpha \in F, a \in X$

$$g(\alpha, a) = \alpha * a$$.

## Przykład 2

$X \to$ zbiór wektorów zaczepionych na płaszczyźnie

F = R

* działanie mnożenia wektora przez liczbę (wynikiem wektor).

Własności działania wewnętrznego:

Z: $(A, \circ)$, $\circ$ - jest działaniem wewnętrznym w zbiorze A

1) Działanie $\circ$ jest łączne jeśli: $\forall x, y \in A : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$
2) Działanie $\circ$ jest przemienne jeśli: $\forall x, y \in A : x \circ y = y \circ x$
3) $e \in A$ jest elementem neutralnym działania jeśli: $\forall x \in A : x \circ e = e \circ x = x$

## Twierdzenie 1
Jeżeli w zbiorze A z działaniem wewnętrznym $\circ$ istnieje element neutralny to jest on jedyny.

4) Jeśli istnieje element neutralny $e \in A$ to elementem przeciwnym (odwrotnym, symetrycznym) do $x \in A$ nazywamy taki element $x' \in A$, że: $x \circ x' = x' \circ x = e$

## Uwaga:
Jeśli działanie jest łączne i istnieje element neutralny tego działania to jeśli jakiś element posiada element odwrotny to jest on jedyny i wówczas: $(x')' = x$.

## Przykład 2
Z: ($\mathbb{Z}$, +), e = 0

$\forall x = k \in \mathbb{Z}\ \exists x' = -k : x + x' = 0$ (każdy element x zb. $\mathbb{Z}$ posiada element odwrotny –x)

## Definicja. 3
Z: $(A, \circ)$, A $\neq \emptyset$ , $\circ$- działanie wewnętrzne w zb. A.

Strukturę $(A, \circ)$ nazywamy GRUPĄ jeżeli spełnione są warunki:

1) $\forall x, y, z \in A : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$
2) $\exists e \in A \wedge \forall x \in A : x \circ e = e \circ x = x$
3) $\forall x \in A\ \exists x' \in A : x \circ x' = x' \circ x = e$

Jeżeli dodatkowo zachodzi warunek:

4) $\forall x, y \in A : x \circ y = y \circ x$

to GRUPĘ nazywamy GRUPĄ PRZEMIENNĄ (ABELOWĄ).

## Przykład 3
(Z, +) jest grupą abelową ponieważ:

- + jest działaniem wewnętrznym w Z
- dodawanie jest łączne
- elementem neutralnym tego działanie jest e = 0
- każda liczba całkowita posiada liczbę przeciwną (całkowitą)

## Przykład 4
$(Q^*, \cdot)$ jest grupą abelową ponieważ:

- mnożenie jest działaniem wewnętrznym w Q*
- elementem neutralnym tego działania jest e = 1
- $\forall x \in Q^*\ \exists x' = \frac{1}{x} : x \cdot \frac{1}{x} = 1$
- mnożenie jest przemienne

## Przykład 5
Z: A = [-1,1], (A, +)

W tym przypadku + nie jest działaniem wewnętrznym w A ponieważ $\exists x, y \in A : (x+y) \notin A$

Np. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$ $\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \in A$ $\frac{5}{4} \notin A$

**Definicja 4**

Z: $(P, \circ, *)$, $P \neq \emptyset$, $\circ$, $*$ - działania wewnętrzne w zbiorze A.

Strukturę $(P, \circ, *)$ nazywamy PIERŚCIENIEM jeśli spełnione są warunki:

1) struktura $(P, \circ)$ jest grupą abelową
2) $\forall x, y, z \in P : (x * y) * z = x * (y * z)$
3) $\forall x, y, z \in P : (x \circ y) * z = (x * z) \circ (y \circ z) \wedge$ $x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$

**Definicja 5**

Z: $(P, \circ, *)$ - pierścień

Działanie ze względu na które pierścień jest grupą abelową nazywamy działaniem addytywnym i oznaczamy je +. Element neutralny tego działania nazywamy zerem, oznaczamy **0**.

Drugie działanie nazywamy działaniem multiplikatywne, oznaczamy je „·"

**Przykład 6**

Struktura ($\mathbb{Z}$, +, ·)- jest pierścieniem ponieważ:

- ($\mathbb{Z}$, +) – jest grupą abelową (sprawdziliśmy wcześniej)
- mnożenie jest łączne
- mnożenie jest rozdzielne względem dodawania

**Definicja 6**

Z: $(P, \circ, *)$ - pierścień

a). Jeżeli oprócz warunków z definicji 4 istnieje element neutralny ze względu na działania multiplikatywne to element ten nazywamy jedynką, oznaczamy **1** i mówimy, że mamy pierścień z jednością.

b). Jeżeli: $\forall x, y \in P : x \cdot y = y \cdot x$ to mówimy, że jest to pierścień przemienny.

c). x, y nazywamy dzielnikami **0** $:\Leftrightarrow \exists x, y \in P : x \cdot y = \mathbf{0} \wedge x \neq \mathbf{0} \wedge y \neq \mathbf{0}$.

d) Jeżeli istnieją dzielniki **0** w pierścieniu mówimy, że jest to pierścień z dzielnikami zera.

e) Pierścień przemienny, z jednością i bez dzielników zera nazywamy pierścieniem całkowitym.

**Przykład 7**

Z: ($\mathbb{Z}$, +, ·) pierścień

$k \cdot n = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee n = 0$
Czyli w tym pierścieniu nie istnieją dzielniki zera.

**Definicja. 7**
Z: Działania + i $\cdot$ to działania wewnętrzne w zbiorze K
Strukturę (K, +, $\cdot$) nazywamy CIAŁEM jeśli spełnione są warunki:
1) Struktura (K, +) jest grupą abelową
2) Struktura (K-{0}, $\cdot$) jest grupą
3) $\forall x, y \in K : (x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z) \wedge$ $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

Jeżeli ponadto spełniony jest warunek:
4) $\forall x, y \in K : x \cdot y = y \cdot x$

mówimy, że ciało jest ciałem przemiennym.

**Uwaga:**
Często mając na myśli ciało przemienne mówimy tylko: ciało.

**Przykład 8**
($\mathbb{R}$, +, $\cdot$) – ciało liczb rzeczywistych
($\mathbb{C}$, +, $\cdot$) – ciało liczb zespolonych

Obydwa w/w ciała są ciałami przemiennymi.