UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH

Definicja 1.
Układ równań liniowych to następujący układ:

$$(1)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

a_{ij}, b_i – dane
x_i – szukane

Rozwiązaniem układu 1 nazywamy każdą „emke" liczb które spełniają każde z równań.

Definicja 2.
Jeżeli wszystkie elementy po prawej są równe zero to jest to układ nazywamy jednorodnym. W przeciwnym przypadku jest to układ niejednorodny.

$$\forall_{i=1,2,\dots,n} : b = 0$$

Definicja 3.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Macierz A nazywamy macierzą współczynników układu (1).
Gdy: $\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{matrix}$ - jest kolumną wyrazów wolnych

to:

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{bmatrix}$$

Macierz U nazywamy macierzą uzupełnioną układu (1)

Uwaga:
Jeżeli:

$$\overline{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix} \quad \overline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$ to układ zapisujemy: $A \cdot \overline{X} = \overline{b}$

Definicja 4:
Jeżeli układ (1) posiada nieskończenie wiele rozwiązań to układ nazywamy nieoznaczonym.

Definicja 5:
Jeżeli układ (1) nie posiada rozwiązań to jest to układ sprzeczny.

Definicja 6:
Jeżeli w układzie (1) ilość niewiadomych jest równa ilości równań to jest to układ kwadratowy.

Definicja 7:
Układ (1) jest układem Cramera jeżeli:
1^o $A_{n \times n}$
2^o $\det A \neq 0$

Twierdzenie 1.
Jeżeli układ jest układem Cramera to posiada dokładnie 1 rozwiązanie i:

$$x_i = \frac{D_{x_i}}{\det A}$$

D_{x_i} - wyznacznik macierzy powstałej z macierzy A przez zastąpienie i-tej kolumny (kolumny współczynnika przy x_i) przez wyrazy wolne

Uwaga
Układ Cramera można rozwiązywać stosując wzór Cramera.

WNIOSEK
1^o $A_{n \times m}$ i $A \cdot \overline{X} = \overline{0}$ układ jednorodny nie jest sprzeczny.

2^o $A_{n \times n}$ i $A \cdot \overline{X} = \overline{0}$ układ ma nieskończenie wiele rozwiązań $\Leftrightarrow \det A = 0$

PRZYKŁAD 1.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \det A = 4 + 9 - 1 - 3 - 2 + 6 = 13$$

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 17$$

$$D_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$D_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{17}{13} \\ x_2 = -\frac{6}{13} \\ x_3 = \frac{3}{13} \end{cases}$$

Twierdzenie 2. Kroneckera-Capelliego

Z:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} & b_n \end{bmatrix}$$

T:
Układ ten posiada co najmniej 1 rozwiązanie <=> rzA=rzU

Twierdzenie 3.

a) Układ ten posiada dokładnie 1 rozwiązanie jeżeli rzA=rzU=m gdzie m jest ilością niewiadomych
b) Jeżeli rzA=rzU=r gdzie r<m to układ ten posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od m-r parametrów (to znaczy, że m-r niewiadomych można przyjąć dowolnie).

PRZYKŁAD 2.

$$\begin{cases} x - 3y - 3z = 9 \\ x - y - z = 4 \\ -x - y - 2z = 4 \end{cases}$$

$$rz\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right] = rz\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & -3 & 5 & 13 \end{array}\right] = rz\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \Rightarrow rzA = rzU = 3$$

układ ten posiada dokładnie 1 rozwiązanie

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ \quad y - 2z = -5 \\ \quad -z = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 7 \\ y = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

PRZYKŁAD 3.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 2x + y - z = 4 \\ x - y - 2z = -1 \end{cases}$$

$$rz\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right] = rz\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \end{array}\right] = rz\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

rzA=2 rzU=2

Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od 1 parametru.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ \quad - 3y - z = -6 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}$$

Uwaga

1 niewiadomą można przyjąć dowolnie ale nie zawsze dowolną niewiadomą.

$$\begin{cases} z = \alpha \\ y = 2 - \alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases}$$

Uwaga

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} \qquad \overline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix} \qquad \overline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Traktujemy A jako macierz odwzorowania $A=M_f$ $f:K^n \to K^m$

1^o $A \cdot \overline{X} = \overline{b}$ $f\left(\overline{X}\right) = \overline{b}$

Rozwiązać ten układ to znaczy znaleźć przeciwobraz b

$$f^{-1}\left(\left\{\overline{b}\right\}\right) = \left\{\overline{X} : f\left(\overline{X}\right) = \overline{b}\right\}$$

2^o Jądro odwzorowania znajdujemy rozwiązując układ:

$$A \cdot \overline{X} = \overline{0}$$

Przykład 4

$$(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}, +, \cdot) \quad (\mathbb{R}^4, \mathbb{R}, +, \cdot)$$

$$f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$$

$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5, 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5,$
$-3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5, 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5)$

Znajdź jądro.

$$Kerf = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0,0,0,0)\}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Do rozwiązania tego układu należy zastosować metodę eliminacji Gaussa.
Po przekształceniach otrzymujemy:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ - x_2 - x_3 = 0 \\ - 8x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Układ ten ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od 2 parametrów

$$\begin{cases} x_1 = -\alpha + \frac{1}{4}\beta \\ x_2 = -\alpha \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = 2\alpha + \frac{5}{4}\beta \\ x_5 = \beta \end{cases}$$

Czyli ostatecznie:

$$Kerf = \left\{\left((-\alpha + \frac{1}{4}\beta, -\alpha, \alpha, 2\alpha + \frac{5}{4}\beta, \beta)\right), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$$