Wartości i wektory własne endomorfizmu (macierzy). Diagonalizacja macierzy.

Def. 1

Z: $(X, K,+, \cdot)$ – przestrzeń wektorowa
 f: $X \to X$ – endomorfizm

$\lambda \in K$ nazywamy wartością własną endomorfizmu f $:\Leftrightarrow$ istnieje $\overline{v} \in X, \overline{v} \neq \overline{0}$ taki, że $f(\overline{v}) = \lambda \overline{v}$

Jeżeli λ jest wartością własną endomorfizmu f to każdy wektor $\overline{u} \in X$, taki że $f(\overline{u}) = \lambda \overline{u}$ nazywamy wektorem własnym endomorfizmu f odpowiadającym wartości własnej λ.

Λ - zbiór wartości własnych nazywamy widmem endomorfizmu.

$X_\lambda := \{\overline{v} \in X : f(x) = \lambda \overline{v}\}$

Twierdzenie 1

Z: $(X, K,+, \cdot)$ – przestrzeń wektorowa
 f: $X \to X$ – endomorfizm
 λ - wartość własna endomorfizmu
T: $(X_\lambda, K,+, \cdot)$ – jest podprzestrzenią przestrzeni X

Def. 2

$(X_\lambda, K,+, \cdot)$ – nazywamy przestrzenią własną endomorfizmu f.
Wniosek: $\dim X_\lambda \geq 1$

Przykład 1

Z: $(C^\infty_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ $(C^\infty_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}, +, \cdot)$-zbiór funkcji różniczkowalnych
D: $C^\infty \to C^\infty$
$D(f) = f'$
$\lambda \in \mathbb{R}$

f: $f(x) = a \cdot e^{\lambda x}$ a – ustalona liczba
$(D(f))(x)$
 $f'(x) = \lambda a e^{\lambda x}$
$(D(f))(x) = \lambda a e^{\lambda x} = \lambda \cdot f(x)$

Np. Dla $\lambda=3$: $X_3 = \{f: f(x) = a \cdot e^{3x}, a \in \mathbb{R}\}$

Twierdzenie 2

Z: $(X, K,+, \cdot)$ – przestrzeń wektorowa
 f: $X \to X$ – endomorfizm
T: Jeden niezerowy wektor własny endomorfizmu odpowiada dokładnie jednej wartości własnej.

Twierdzenie 3
Z: $(X, K,+, \cdot)$ – przestrzeń wektorowa
f: $X\to X$ – endomorfizm
$\dim X=n$
$B=(\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n)$ - baza
$A=M_f(B,B)$
T: $\lambda\in K$ jest wartością własną endomorfizmu $\Leftrightarrow$ $\det(A - \lambda I)=0$

Def. 3
Z: $A_{n\times n}=[a_{ij}]$ – macierz
λ - nazywamy wartością własną macierzy A $:\Leftrightarrow$ $\det(A - \lambda I)=0$.

Jeśli λ jest wartością własną macierzy A to każdy wektor $\overline{x}: (A-\lambda I)\cdot\overline{x} = \overline{0}$ nazywamy wektorem własnym macierzy A dopowiadającym wartości własnej λ macierzy A.

Wniosek:

1. $A=M_f(B, B)$ Np. f: $K^n\to K^n$
   λ - jest wartością własną macierzy A $\Leftrightarrow$ jest wartością własną endomorfizmu f.
2. $\overline{x}$ - jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ macierzy A $\Leftrightarrow$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ endomorfizmu.

Uwaga
Ze względu na ścisły związek między λ endomorfizmu, a λ macierzy wszystkie twierdzenia udowodnione dla endomorfizmu są prawdziwe dla macierzy.

Def. 4

$$\det(A-\lambda I)=\det(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}) = \det \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= \pm\lambda+\beta_{n-1}\lambda^{n-1}+\beta_{n-2}\lambda^{n-2}+...+\beta_1\lambda+\beta_0 = \Delta(\lambda)$$

$\Delta(\lambda)$ - nazywamy wielomianem charakterystycznym macierzy A (endomorfizmu).
Wartości własne macierzy (endomorfizmu) są pierwiastkami jego wielomianu charakterystycznego.

Uwaga
Wartości własne endomorfizmu nie zależą od wyboru bazy przestrzeni (są niezmiennikami endomorfizmu).

Przykład 2

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \qquad f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{(baza kanoniczna)}$$

$$\Delta(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda)$$

$$\Delta(\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda_1=2 \vee \lambda_2=1 \vee \lambda_3=-1$$

$$k_1=1 \qquad k_2=1 \qquad k_3=1$$

Szukamy przestrzeni własnych.
Dla $\lambda=2$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Zbiór rozwiązań powyższego równania to przestrzeń własna.

$$\begin{cases} -x_1+2x_2 = 0 \\ -2x_1-2x_2-3x_3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1+2x_2 = 0 \\ -6x_2-3x_3=0 \end{cases}$$

$$x_1=2\alpha$$

$$x_2=\alpha$$

$$x_3=-2\alpha$$

Czyli: $X_2=\{(2\alpha,\alpha,-2\alpha)\}=\{\alpha(2,1,-2)\ \alpha\in\mathbb{R}\}$
Analogiczne rozumowanie należy przeprowadzić dla pozostałych wartości λ.

Twierdzenie 4

Z: $(X,K,+,\cdot)$ – przestrzeń wektorowa
f: $X \to X$ endomorfizm
$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p$: $\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow i \neq j$ $\quad \lambda_i$ – wartości własne endomorfizmu
$\overline{v}_1,\overline{v}_2,\ldots,\overline{v}_p : \overline{v}_i \neq 0$ -wektory własne odpowiadające wartościom własnym λ_i

T: $\overline{v}_1,\overline{v}_2,\ldots,\overline{v}_p$ - są liniowo niezależne

Diagonalizowalność

Def. 5

$(X,K,+,\cdot)$ – przestrzeń wektorowa

$f: X\to X$ endomorfizm

f – nazywamy endomorfizmem diagonalizowalnym $:\Leftrightarrow$ istnieje B – baza przestrzeni X, względem której macierz tego endomorfizmu jest diagonalna,

Twierdzenie 5

Z: $(X,K,+,\cdot)$ – przestrzeń wektorowa
$f: X\to X$ endomorfizm

T: f – jest endomorfizmem diagonalizowalnym $\Leftrightarrow$ w przestrzeni X istnieje baza złożona z wektorów własnych tego endomorfizmu.

Wnioski:

$(X,K,+,\cdot)$ – przestrzeń wektorowa $\qquad f: X\to X \qquad$ endomorfizm

1. Jeśli endomorfizm f jest diagonalizowalny to w macierzy $M_f(B,B)$ na przekątnej głównej znajdują się (niekoniecznie różne) wartości własne endomorfizmu, a poza tym elementami macierzy są zera.
2. Warunkiem wystarczającym, ale nie koniecznym diagonalizowalności endomorfizmu jest, aby miał w przestrzeni n – wymiarowej n – wartości własnych.

Def. 6

$A_{n\times n}$ – o elementach z ciała K nazywamy diagonalizowalną jeżeli jest podobna do pewnej macierzy diagonalnej ($\exists P$ – nieosobliwa $\wedge$ $\exists D$ – diagonalna takie, że: $D=P^{-1}\cdot A\cdot P$)

Wniosek:

$A=M_f(B,B)$ $\qquad$ f - endomorfizm

1. Z def. 2 wynika, że A jest diagonalizowalna $\Leftrightarrow$ f jest endomorfizmem diagonalizowalnym.
2. Ze względu na ścisły związek macierzy i endomorfizmów twierdzenia dotyczące twierdzenia dotyczące diagonalizwalności endomorfizmu są prawdziwe dla macierzy i na odwrót.

Przykład 3

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ Sprawdzić, czy A – diagonalizowalna.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -1 \\ 3 & 2-\lambda & 3 \\ -3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda+2)$$

$\lambda_1=2 \qquad k_1=2$

$\lambda_2=-2 \qquad k_2=1$

λ_2=-2

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 \quad -x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_1 \quad +3x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 \quad -x_3 = 0 \\ 4x_2 + 6x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = \alpha \\ x_2 = -\frac{3}{2}\alpha \\ x_1 = \alpha \end{cases}$$

$X_{-2} = \{\alpha(1,-\frac{3}{2},1),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$

dim X_{-2}=1

λ_1=2

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x_1 \quad -x_3 = 0 \\ 3x_1 \quad +3x_3 = 0 \\ -3x_1 \quad -x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = \beta \end{cases}$$

$X_2=\{\beta(0,1,0),\ \beta \in \mathbb{R}\}$

dim X_2=1

Wniosek: Macierz nie jest diagonalizowalna ponieważ w $\mathbb{R}^3$ nie istnieje baza wektorów własnych.

Twierdzenie 6

Z: $(X,K,+,\cdot)$ – przestrzeń wektorowa dim X=n

f: $X \to X$ endomorfizm

$\Delta(\lambda)=\pm(\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_p)^{k_p}$

$\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow i \neq j$

$k_1+k_2+\ldots+k_p=n$

T_1: $\forall i=1,2,...,p:\ 1 \le \dim X_{\lambda_i} \le k_i$

T_2: (WKW) f – jest diagonalizowalny $\Leftrightarrow \forall i=1,2,...,p$: dim $X_{\lambda i}=k_i$

Przykład 4

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Delta(\lambda)=\det(A-\lambda I)=-(\lambda-2)^2(\lambda+4)$

Sprawdzić, czy macierz A jest diagonalizowalna.
$\lambda_1=2 \quad k_1=2$
$\lambda_2=-4 \quad k_2=1$

dla $\lambda_1=2$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x_1 & -3x_3 = 0 \\ 3x_1 & +3x_3 = 0 \\ -3x_1 & -3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x_1 & -3x_3 = 0 \\ & 0=0 \\ & 0=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_1 = -\alpha \end{cases}$$

$X_2=\{\alpha(-1,0,1)+\beta(0,1,0),\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$
$\dim X_2=2$
$B=(v_1=(-1,0,1),v_2=(0,1,0);u_3)$

Wniosek: $D=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

Dla $\lambda_2=4$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 3 & 6 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 & & -3x_3 = 0 \\ 3x_1 & + 6x_2 & +3x_3 = 0 \\ -3x_1 & & 3x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 & & -3x_3 = 0 \\ & 6x_2 & +6x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = \gamma \\ x_2 = -\gamma \\ x_1 = \gamma \end{cases}$$

$X_{-4}=\{\gamma(1,-1,1),\ \gamma\in\mathbb{R}\}$
$u_3=(1,1,1)=[1,-1,1]$
$B=(v_1=(-1,0,1),v_2=(0,1,0);u_3=(1,-1,0))$

$$P=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$