Wektory główne endomorfizmu (macierzy). Postać Jordana.

Definicja 1.

$A_{n\times n}$ $\quad W(\lambda)=a_m\lambda^m+a_{m-1}\lambda^{m-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0$

Wielomian $W(\lambda)$ nazywamy wielomianem anulującym macierzy A

$:\Leftrightarrow W(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\ldots+a_1A+a_0\cdot I=\mathbf{0}$

Twierdzenie 1.

Z: $A_{n\times n}$; $\quad \Delta(\lambda)=\det(A-\lambda I)$

T: $\Delta(\lambda)=\mathbf{0}$ wielomian charakterystyczny macierzy A jest anulujący

Definicja 2.

Wielomianem minimalnym macierzy $A_{n\times n}$ nazywamy wielomian anulujący taj macierzy stopnia najniższego o współczynniku 1 przy najwyższej potędze.

Twierdzenie 2.

Z: $A_{n\times n}$; $m(\lambda)$ - wielomian minimalny macierzy A

T: wielomian $m(\lambda)$ jest jedyny

Twierdzenie 3.

Z: $A_{n\times n}$; $m(\lambda)$ - wielomian minimalny macierzy A

$W(\lambda)$ - wielomian anulujący macierzy A

T: wielomian minimalny macierzy A jest podzielnikiem każdego wielomianu anulującego macierzy A.

$W(\lambda)=p(\lambda)\cdot m(\lambda)$

Twierdzenie 4.

Z: $A_{n\times n}$ - macierz

$\Delta(\lambda)=\pm(\lambda-\lambda_1)^{k_1}\cdot(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_p)^{k_p}$ - wielomian charakterystyczny macierzy A

$k_1+k_2+\ldots+k_p=n$

$m(\lambda)$ - wielomian minimalny

T: Każda wartość własna macierzy A jest pierwiastkiem wielomianu minimalnego.

WNIOSEK

$A_{n\times n}$ jeżeli $\Delta(\lambda)=\pm(\lambda-\lambda_1)^{k_1}\cdot(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_p)^{k_p}$ to

$$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{s_1}\cdot(\lambda-\lambda_2)^{s_2}\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_p)^{s_p}$$

i $s_i \le k_i$

$i=1,\ldots,p$

Przykład 1.

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -3\\ 3 & 2 & 3\\ -3 & 0 & -1\end{bmatrix} \qquad \Delta(\lambda)=-(\lambda-2)^2\cdot(\lambda+4)$$

znaleźć wielomian minimalny

$$m(\lambda)=-(\lambda-2)\cdot(\lambda+4)$$

$$m(A)=-(A-2I)\cdot(A+4I)$$

$$m(A)=\begin{bmatrix}-3 & 0 & -3\\ 3 & 0 & 0\\ -3 & 0 & -3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 0 & -3\\ 3 & 6 & 3\\ -3 & 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow m(A)$ - wielomian anulujący

Wektory główne

Umowa zapisu:

W zapisie utożsamiamy wektor z jego współrzędnymi i w zależności od kontekstu $\overline{v}$ oznacza albo wektor, albo jego współrzędne w bazie.

Definicja 3.

$A_{n\times n}$ -macierz λ - wartość własna macierzy

Wektor własny $\overline{v}$ odpowiadający tej wartości własnej nazywamy wektorem głównym rzędu pierwszego i oznaczamy: $\overline{v}^{(1)}$

Wektor $\overline{v}^{(2)},\overline{v}^{(2)}\neq\overline{0}$ nazywamy wektorem głównym rzędu drugiego odpowiadającego wartości własnej λ jeżeli:

$$(A-\lambda I)\left(\overline{v}^{(2)}\right)=\overline{v}^{(1)} \qquad \overline{v}^{(1)}\neq\overline{0}$$

itd.

wektor $\overline{v}^{(k)}\neq\overline{0}$ nazywamy wektorem głównym rzędu k macierzy A jeżeli:

$$(A-\lambda I)\left(\overline{v}^{(k)}\right)=\overline{v}^{(k-1)}$$

$$\overline{v}^{(k-1)}\neq\overline{0}$$

UWAGA
Wektor zerowy jest wektorem głównym każdego rzędu odpowiadającego każdej wartości własnej

WNIOSEK
$A = M_f$ f - endomorfizm

$\overline{v}^{(i)} \neq \overline{0}$

$i = 1, \ldots, k$

$$(A - \lambda I)\overline{v}^{(1)} = \overline{v} \Leftrightarrow A \cdot \overline{v}^{(1)} - \lambda \overline{v}^{(1)} = \overline{0} \Leftrightarrow A \cdot \overline{v}^{(1)} = \lambda \overline{v}^{(1)} \Leftrightarrow f\left(\overline{v}^{(1)}\right) = \lambda \overline{v}^{(1)}$$

$$(A - \lambda I)\overline{v}^{(2)} = \overline{v}^{(1)} \Leftrightarrow A \cdot \overline{v}^{(2)} - \lambda \overline{v}^{(2)} = v^{(1)} \Leftrightarrow A \cdot \overline{v}^{(2)} = \overline{v}^{(1)} + \lambda \overline{v}^{(2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\overline{v}^{(2)}\right) = \overline{v}^{(1)} + \lambda \overline{v}^{(2)}$$

$\vdots$

$$(A - \lambda I)\overline{v}^{(k)} = \overline{v}^{(k-1)} \Leftrightarrow A \cdot \overline{v}^{(k)} - \lambda \overline{v}^{(k)} = v^{(k-1)} \Leftrightarrow A \cdot \overline{v}^{(k)} = \overline{v}^{(k-1)} + \lambda \overline{v}^{(k)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\overline{v}^{(k)}\right) = \overline{v}^{(k-1)} + \lambda \overline{v}^{(k)}$$

Przykład 2.
Znaleźć wektory główne macierzy A.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad A = M_f(B, B) \qquad f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3$$

$\lambda_1 = 2$

$k_1 = 3$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$X_2 = \{(\alpha, \beta, 0), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$\dim X_2 = 2$ macierz nie jest diagonalizowalna

$$\overline{v}_1^{(1)} = (\alpha, \beta, 0)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha \neq 0 \vee \beta \neq 0$$

$$\begin{cases} 0 = \alpha \\ x_3 = \beta \Rightarrow \beta \neq 0 (bo : \alpha = 0) \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\overline{v}_1^{(1)} = (0, \beta, 0) \wedge \beta \neq 0$$

$$\left(np. : \overline{v}_1^{(1)} = (0,1,0)\right)$$

$$\begin{cases} 0 = 0 & x_1 = t \\ x_3 = 1 & x_2 = s \\ 0 = 0 & \end{cases}$$

$$\overline{v}_1^{(2)} = \{(t, s, 1), t, s \in \mathbb{R}\}$$

ogólnie: $\overline{v}_1^{(2)} = \{(t, s, \beta), t, s \in \mathbb{R} \wedge \beta \neq 0\}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ s \\ \beta \end{bmatrix} \wedge \beta \neq 0$$

$$\begin{cases} 0 = t \\ x_3 = s \\ 0 = \beta \end{cases}$$

sprzeczność!!

nie istnieją wektory główne rzędu wyższego niż 2.

$np.$

$$\beta = 1$$

$$\overline{v}_1^{(1)} = (0,1,0), \overline{v}_1^{(2)} = (0,0,1), \overline{v}_2^{(1)} = (1,0,0)$$

wektory liniowo niezależne

$$B = \left(\overline{v}_1^{(1)} = (0,1,0), \overline{v}_1^{(2)} = (0,0,1); \overline{v}_2^{(1)} = (1,0,0)\right)$$

$$f\left(\overline{v}_1^{(1)}\right) = 2\overline{v}_1^{(1)} = [2,0,0]_{B'}$$

$$f\left(\overline{v}_1^{(2)}\right) = \overline{v}_1^{(1)} + 2\overline{v}_1^{(2)} = [1,2,0]_{B'}$$

$$f\left(\overline{v}_2^{(1)}\right) = 2\overline{v}_2^{(1)} = [0,0,2]_{B'}$$

$$M_f = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

w bazie B

Definicja 4.

$(X,K,+,\cdot)$ - przestrzeń wektorowa

$f: X \to X$ B - baza

$A = M_f(B,B)$

Zbiór wszystkich wektorów głównych macierzy A wszystkich dowolnych rzędów, również $\overline{0}$, odpowiadających wartości własnej λ nazywamy przestrzenią charakterystyczną i oznaczamy V_λ

Twierdzenie 5.

Z: $(X,K,+,\cdot)$ - przestrzeń wektorowa

$f: X \to X$ B - baza

T: $(V_\lambda,K,+,\cdot)$ -podprzestrzeń przestrzeni X

Definicja 5.

$(V_\lambda,K,+,\cdot)$ nazywamy przestrzenią charakterystyczną macierzy A (endomorfizmu f)

Twierdzenie 6.

Z: $A_{n\times n}$, λ -wartość własna

T: Niezerowy wektor $\overline{v}^{(k)}$ jest wektorem głównym rzędu k macierzy A

$$\Leftrightarrow (A-\lambda I)^k \cdot \overline{v}^{(k)} = \overline{0} \ \wedge \ (A-\lambda I)^{k-1} \cdot \overline{v}^{(k)} \neq \overline{0}$$

Twierdzenie 7.

Z: $A_{n\times n} = M_f$

λ wartość własna

$\overline{v}^{(1)}, \overline{v}^{(2)}, \dots, \overline{v}^{(k)}$ - wektory główne różnych rzędów

$\overline{v}^{(i)} \neq \overline{0}, \quad i = 1,\dots,k$

T: $\overline{v}^{(1)}, \overline{v}^{(2)}, \dots, \overline{v}^{(k)}$ wektory liniowo niezależne

niezerowe wektory główne różnych rzędów odpowiadające tej samej wartości własnej są liniowo niezależne.

Twierdzenie 8.

Z: $f: X \to X$ f - endomorfizm

$\dim X = n$

$\Delta(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{\alpha_1} \cdot (\lambda-\lambda_2)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda-\lambda_p)^{\alpha_p}$ wielomian charakterystyczny

$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = n$

$V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \dots, V_{\lambda_p}$ podprzestrzenie charakterystyczne odpowiadające wartościom własnym

T: $X = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_p}$ - suma prosta

WNIOSKI:
1) $\overline{v}_i^{(k)} \neq \overline{0}, \quad \overline{v}_j^{(l)} \neq \overline{0} \qquad i \neq j$
wektory główne różnych rzędów odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne.

2) $\forall_{i=1,2,\ldots,p} \dim V_{X_i} = \alpha_i$
wymiar każdej przestrzeni charakterystycznej jest równy krotności odpowiedniej wartości własnej.

WNIOSEK:
w X istnieje baza złożona z wektorów głównych endomorfizmu f

UWAGA
Analogiczne twierdzenia są prawdziwe dla macierzy.

Definicja 6.
$(X, K, +, \cdot)$ - przestrzeń wektorowa
B - baza
$f : X \to X$

$A = M_f(B, B)$

$\dim X = n$

$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_p)^{\alpha_p}$

$B' = (\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n)$

$J = M_f(B', B')$
Macierz odwzorowania względem bazy wektorów własnych nazywamy macierzą Jordana, a dla macierzy A mówi się, że jest to postać Jordana macierzy A (macierz J do której macierz A jest podobna)

UWAGA
$A_{n \times n}$
Jeżeli macierz jest diagonalizowalna, to postać Jordana pokrywa się z postacią diagonalną. Jeżeli macierz nie jest diagonalna, to szukamy wektorów głównych.

Przykład 3.
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$\Delta(\lambda) = -(\lambda + 1)^3$

$\lambda_1 = -1, \quad k_1 = 3$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_3 = 0 \\ -2x_1 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od 2 parametrów

$x_3 = \alpha$

$x_1 = -2\alpha$

$x_2 = \beta$

$X_{-1} = \{(-2\alpha, \beta, \alpha), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(-2,0,1) + \beta(0,1,0), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

wektory generują przestrzeń i są liniowo niezależne

$\dim X_{-1} = 2$

macierz nie jest diagonalizowalna

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} \qquad \alpha \neq 0 \ \vee \ \beta \neq 0$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_3 = -2\alpha \\ 3x_1 + 6x_3 = \beta \\ -2x_1 - 4x_3 = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = -\frac{1}{2}\alpha \\ 0 = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\beta \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$(\alpha \neq 0 \vee \beta \neq 0) \wedge \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\beta = 0$$

$np. \quad \alpha = 2 \quad \beta = -3$

$B' = \left(\overline{v}_1^{(1)} = (-4,-3,2), \overline{v}_1^{(2)} = (-1,0,0); \overline{v}_2^{(1)} = (0,1,0)\right)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = -1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$x_3 = s$

$x_1 = -1 - 2s$

$x_2 = t$

$\left\{ \overline{v}_1^{(2)} = (-1-2s, t, s), t, s \in \mathbb{R} \right\}$ t=0, s=0 (ale może też inne wartości)

nie mogą istnieć wektory rzędów wyższych, bo wymiar jest równy 3

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$J = P^{-1} \cdot A \cdot P$

Omówienie postaci Jordana macierzy

1) $A_{n\times n} = [a_{ij}] \qquad \Delta(\lambda) = \pm(\lambda - \lambda_1)^{k_1}$

$\dim X_{\lambda_1} = 1$

$B' = \left(\overline{v}_1^{(1)}, \overline{v}_1^{(2)}, \overline{v}_1^{(3)}, \ldots, \overline{v}_1^{(k_1)}\right) \qquad A = M_f(B, B)$

$f\left(\overline{v}_1^{(1)}\right) = \lambda_1 \cdot \overline{v}_1^{(1)} = [\lambda_1, 0, 0, \ldots, 0]_{B'}$

$f\left(\overline{v}_1^{(2)}\right) = \overline{v}_1^{(1)} + \lambda_1 \cdot \overline{v}_1^{(2)} = [1, \lambda_1, 0, \ldots, 0]_{B'}$

$f\left(\overline{v}_1^{(3)}\right) = \overline{v}_1^{(2)} + \lambda_1 \cdot \overline{v}_1^{(3)} = [0, 1, \lambda_1, \ldots, 0]_{B'}$

$\vdots$

$f\left(\overline{v}_1^{(n)}\right) = \overline{v}_1^{(n-1)} + \lambda_1 \cdot \overline{v}_1^{(n)} = [0, \ldots, 0, 1, \lambda_1]_{B'}$

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

2) $A_{n\times n}$; $\Delta(\lambda) = \pm(\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdot (\lambda - \lambda_3)^{k_p}$

$$
J = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & & & & & k_1 & & & & & k_1+k_2 & & & & & k_1+k_2+k_3
\end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc|ccccc|ccccc}
\lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \lambda_1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & 0 & \lambda_1 & \ddots & \cdots & 0 & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & & \ddots & 1 & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda_1 & 0 & 0 & & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & & & 0 & \lambda_2 & 1 & & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \lambda_2 & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \lambda_2 & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \lambda_3 & 1 & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & 0 & \lambda_3 & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda_3
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Zaznaczone fragmenty macierzy Jordana nazywamy klatkami Jordana.