NAZEWNICTWO:

$:\Leftrightarrow$ równoważność z definicji

$:=$ równość z definicji

$\forall$ dla każdego

$\exists$ istnieje

$\exists!$ istnieje dokładnie jeden

ZBIORY

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$

$\mathbb{Z}$ - całkowite $\mathbb{Z}^*$ - całkowite bez zera

$\mathbb{Q}$ - wymierne $\mathbb{Q}_-$ - ujemne plus zero

$\mathbb{R}$ - rzeczywiste

$\mathbb{C}$ - zespolone

$A \subset B$ - zawieranie słabe

$\bigcup_{i \in J} A_i := \left\{ x : \underset{i \in J}{\exists} : x \in A_i \right\}$ - suma zbiorów, unia zbiorów

$\bigcap_{i \in J} A_i := \left\{ x : \underset{i \in J}{\forall} : x \in A_i \right\}$ - iloczyn zbiorów

J – zbiór iteratorów

Zbiór podzbiorów zbioru E $2^E := \left\{ A : A \subset E \right\}$

$E;$ $A \in 2^E;$

ILOCZYN KARTEZJAŃSKI ZBIORÓW

Definicja 1.
Parą lub dwójką elementów nazywamy z definicji zbiór

$$(a,b) := \{\{a\},\{a,b\}\}$$

Uwaga:

$$(b,a) := \{\{b\},\{a,b\}\}$$

$$(a,b) \neq (b,a)$$

Definicja 2.

$$(a,b)$$

pierwszy element pary (a nie: pierwsza współrzędna pary!)

drugi element pary (a nie: druga współrzędna pary!)

Twierdzenie 1.
Dwie pary są równe wtedy i tylko wtedy gdy odpowiednie elementy są równe

$$(a,b) = (c,d) <=> a = c \wedge b = d$$

Definicja 3.
Trójki elementów to zbiór

$$(a,b,c) := ((a,b),c)$$

n–ka (enka) to zbiór

$$(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{n-1},a_n) := ((a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{n-1}),a_n)$$

Uwaga
Dwie enki są równe wtedy i tylko wtedy gdy odpowiednie elementy są równe.

Definicja 4.

1^o $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$

$$A \times B := \{(x,y) : x \in A \wedge y \in B\}$$

2^o $A = \emptyset \vee B = \emptyset$

$$A \times B := \emptyset$$

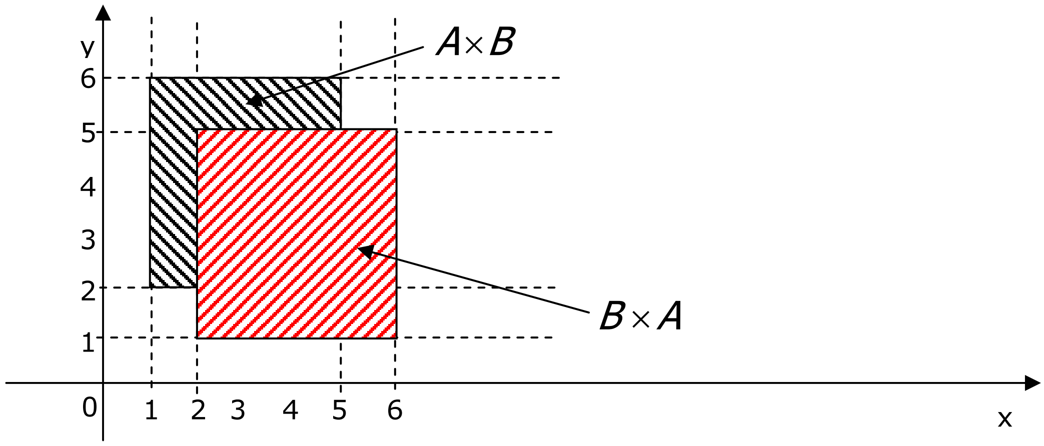
czytamy A razy B lub A po kartezjańsku B

Przykład 1.

A=[1, 5]

B=[2, 6]

$$A\times B:=\{(x,y): x\in[1;5]\wedge y\in[2;6]\}$$



$$B\times A:=\{(x,y): x\in[2;6]\wedge y\in[1;5]\}$$

Wniosek: Iloczyn kartezjański nie jest przemienny.

Definicja 5.

1^o $\quad A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \wedge \underset{i=1,2,\ldots,n}{\forall} A_i \neq \emptyset$

$$A_1\times A_2\times A_3\times\ldots\times A_n := \{(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n,) \underset{i=1,2,\ldots,n}{\forall} x_i\in A_i\}$$

2^o $\quad \underset{i}{\exists}: A_i=\emptyset$ to

$$A_1\times A_2\times A_3\times\ldots\times A_n := \emptyset$$

Definicja 5.

$$A\neq 0$$

$$\underbrace{A\times A\times A\times\ldots\times A}_{n} := A^n$$

Oznaczenie:

$$\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^3=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

LICZBY ZESPOLONE

Definicja 1.

Liczbą zespoloną ***z*** nazywamy parę liczb $\mathbb{R}$. Pierwszy element pary to część rzeczywista liczby zepolonej ***z*** (Re***z***) a drugi nazywamy częścią urojoną ***z*** (Im***z***)

$z:=(x, y)$ $\qquad x,y \in \mathbb{R}$
$x=\mathrm{Re}z,\ \ y=\mathrm{Im}z,$

$i:=(0, 1)$ – jednostka urojona

DZIAŁANIA NA LICZBACH ZESPOLONYCH

$z_1=(x_1, y_1)$ $\qquad\qquad z_2=(x_2, y_2)$

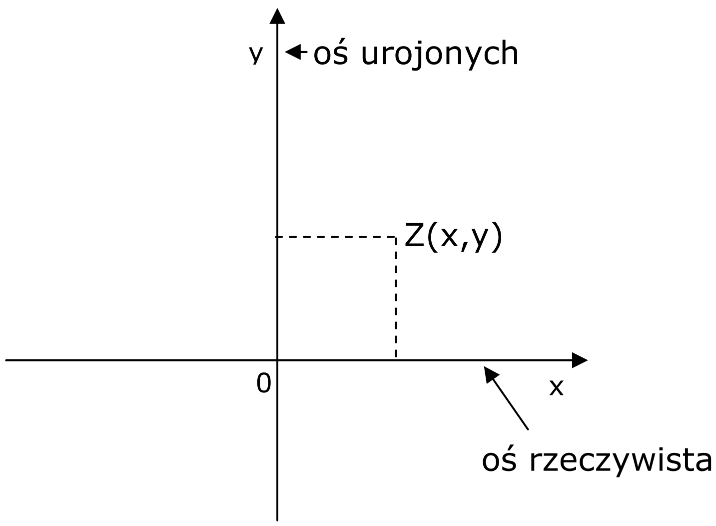
$1^o \quad z_1= z_2 \quad :\Longleftrightarrow x_1=x_2 \wedge y_1=y_2$

$2^o \quad z_1+ z_2 \quad :\Longleftrightarrow (x_1=x_2, y_1+y_2)$

$3^o \quad z_1* z_2 \quad :\Longleftrightarrow (x_1x_2- y_1y_2, x_1y_2- x_2y_1)$

UWAGA

Przyjmując oznaczenie $z=(x, 0)=x$ zauważmy, że:
$z_1=(x_1, 0)= x_1$, $z_2=(x_2, 0)= x_2$
to: $\qquad z_1+z_2=(x_1+x_2, 0)= x_1+x_2$
$\qquad\qquad z_1*z_2=(x_1x_2, 0)= x_1x_2$



Uwaga:

1) $z=(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = z = x+iy$
   Jest to postać algebraiczna liczby zespolonej.

2) $i^2=i*i=(0, 1)(0, 1) = (-1, 0) =-1$

WŁASNOŚCI DZIAŁAŃ NA LICZBACH ZESPOLONYCH

1° Dodawanie i mnożenie liczb zespolonych jest przemienne.
$z_1+ z_2= z_2+ z_1 \quad \wedge \quad z_1z_2= z_2z_1$

2° Dodawanie i mnożenie liczb zespolonych jest łączne.
$(z_1+ z_2)+z_3= z_1+ (z_2 + z_3) = z_1+ z_2 + z_3$
$(z_1z_2)z_3= z_1(z_2z_3) = z_1z_2z_3$

3° Mnożenie jest rozdzielne względem dodawania
$(z_1+z_2)z_3= z_1z_3+z_1z_3$

WNIOSEK

Wszystkie własności i twierdzenia dla $\mathbb{R}$ wynikające z powyższych własności są również prawdziwe dla $\mathbb{C}$.

PRZYKŁAD 1.

$z_1=2-3i$
$z_2=1+2i$
$z_1*z_1 = (2-3i)(1+2i)=2 + 4i - 3i - 6i^2 = 8 + i$

UWAGA

1) $x, y \in \mathbb{R} \quad x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy)$

2) $z^n = \underbrace{z*z*z*...*z}_{n} \qquad n \in \mathbb{N}$ i $n \geq 2$

3) $i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = i^2 i = -i$
$i^4 = i^2\, i^2 = 1$
$i^5 = i^4 i = i$

4) $z = (x, y) = x + iy$
$-z = (-x, -y) = -x - iy$ - liczba przeciwna

5) DZIELENIE

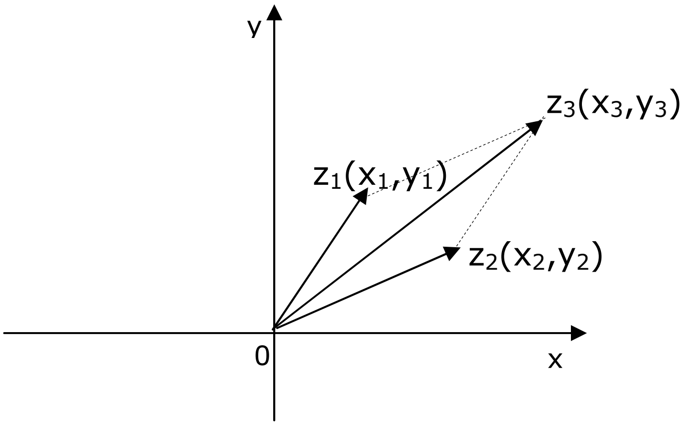
$z_1 = (x_1, y_1) \qquad z_1 = x_1 + iy_1$

$z_2 = (x_2, y_2) \wedge z_2 \neq 0 \qquad z_2 = x_2 + iy_2$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 + x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

PRZYKŁAD 1.

$$\frac{3+2i}{1-i}=\frac{(3+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{3+3i+2i+2i^2}{1-i^2}=\frac{1+5i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$$



$z_3=z_2+z_1$

Definicja 2.

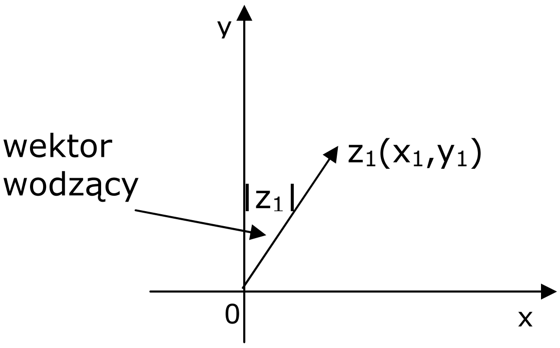
z=(x, y) = x + iy

$|z|:=\sqrt{x^2+y^2}$ moduł z ***z***

Twierdzenie 1.

$|z|=0 <=> z=(0,0)=0$

UWAGA:



$|z_1 - z_2|$ = odległość liczb jako punktów na płaszczyźnie

Definicja 3.

$z=(x,y)=x+iy$

$\overline{z}=(x,y):=x-iy$ Liczba <u>sprzężona</u> do liczby ***z***

WŁASNOŚCI

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ $\quad\quad$ $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} * \overline{z_2}$ $\quad\quad$ $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ $\quad\quad$ $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

$\overline{\overline{z}} = z$ $\quad\quad$ $z\overline{z} = |z|^2$

UWAGA

W operacjach na liczbach zespolonych nie rozróżniamy nierówności oraz liczb ujemnych (są tylko liczby przeciwne).

PRZYKŁAD 2.

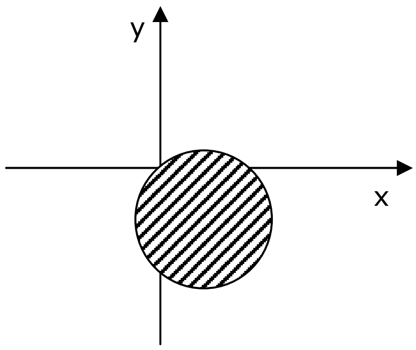
$\{z : |z - 1 + 2i| < 2\} \quad z = x + iy$

$|x + iy - 1 + 2i| < 2$

$|(x-1) + i(y+2)| < 2$

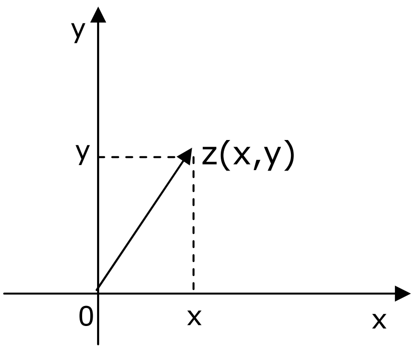
$\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} < 2$

$(x-1)^2 + (y+2)^2 < 4$



POSTAĆ TRYGONOMETRYCZNA LICZBY ZESPOLONEJ

z = x+iy=(x, y) $z \neq 0$



(1) $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{|z|} \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{|z|} \end{cases}$

Definicja 1.

Argumentem liczby zespolonej ***z*** równej (x, y) $\neq 0$ nazywamy każdą liczbę rzeczywista φ (miarę łukową kąta) spełniającą układ (1) i oznaczamy Argz. Dla liczby z=0 nie określamy albo przyjmujemy dowolną.

UWAGA:

$$\varphi + 2k\pi = Argz \qquad k \in \mathbb{Z}$$

1) $\varphi = Argz$ to

$(\varphi \in Argz$ to $\varphi + 2k\pi \in Argz)$

2) $\varphi_1 = Argz \quad \varphi_2 = Argz$ to $\underset{k}{\exists} \in \mathbb{Z} \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$

Definicja 2.

Argumentem głównym liczby zespolonej $z \neq 0$ nazywamy tę spośród liczb spełniających układ (1) która należy do przedziału $[0, 2\pi)$.

argz – argument główny

$z \neq 0 \quad z = x + iy$

(1) => $x = |z| \cos\varphi$

$y = |z| \sin\varphi$

$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (2)

Definicja 3

a) Postać (2) liczby zespolonej ***z*** to jej postać trygonometryczna. Każdą liczbę zespoloną w tym 0 można przedstawić w postaci trygonometrycznej.
b) φ nie musi być argumentem gł. ale w konretnych zadaniach przyjmujemy Arg=arg.

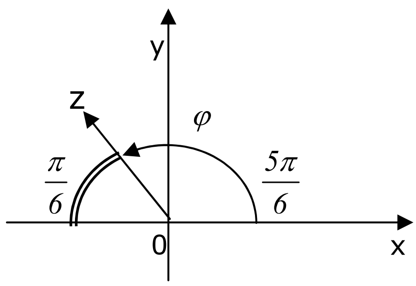
PRZYKŁAD 3:

$$z = -\sqrt{3} + i = (-\sqrt{3}, 1)$$

$$|z| = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\varphi = \frac{1}{2} \qquad \varphi = \frac{5\pi}{6}$$



Niektóre działania na liczbach zespolonych w postaci trygonometrycznej:

1) $z_1 = z_2 \iff |z_1| = |z_2| \wedge \varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

2) $z_1 z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$

$= |z_1||z_2|[(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$

3) $\dfrac{z_1}{z_1} = \dfrac{|z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}[(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$

WNIOSEK:

$$z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

$$z^n=\underbrace{z*z*z*...*z}_{n}$$

$$z^n=|z|^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

PRZYKŁAD 4:

$$\left(-\sqrt{3}+i\right)^n=|2|^{25}[\cos(25\cdot\frac{5}{6}\pi)+i\sin(25\cdot\frac{5}{6}\pi)]$$

Definicja 4 (pierwiastkowanie)

$$z\in\mathbb{C}\qquad \sqrt[n]{z}:=w:<=>w^n=z\qquad \begin{matrix} n\in\mathbb{N} & i & w\in\mathbb{C} \\ n\geq 2 & & \end{matrix}$$

UWAGA:

$$z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

$$w=|w|(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$\sqrt[n]{z}=w$$

$$w^n=z<=>|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)=|w|^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

$$|z|=|w|^n\wedge n\theta=\varphi+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

$$<=>|w|=\sqrt[n]{|z|}\wedge\theta=\frac{\varphi+2k\pi}{n}$$

WNIOSEK

Jeżeli $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

$$\sqrt[n]{z}=w_k=\sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n})$$

UWAGA

k=0,1,2,3,…,n-1

Dla liczby zespolonej z istnieje n pierwiastków $\sqrt[n]{z}$

Przykład 5.

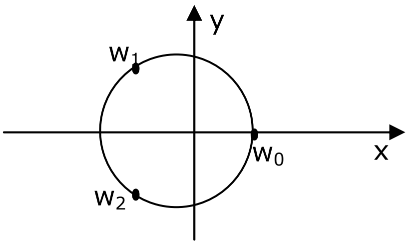
$$\sqrt[3]{1} = w_k = \sqrt[3]{|1|}(\cos\frac{0+2k\pi}{3} + i\sin\frac{0+2k\pi}{3}) \quad k = 0,1,2$$

$$w_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

$$w_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$w_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

UWAGA:



Pierwiastków $\sqrt[n]{z}$ jest n i wszystkie one leżą na okręgu o środku w (0, 0) i promieniu równym $\sqrt[n]{|z|}$ i dzielą ten okrąg na n równych części.

RÓWNANIA

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0 \quad z \in \mathbb{C} \quad a_n \neq 0 \quad (1)$$
$$a \in \mathbb{C}$$

UWAGA

Można udowodnić, że

1) W $\mathbb{C}$ te równanie (1) ma dokładnie n pierwiastków (licząc krotności).

2) Jeśli $\underset{i=1,..,n}{\forall} : a_i \in \mathbb{R}$ można udowodnić, że jeżeli z_1 jest pierwiastkiem równania to liczba $\overline{z_1}$ też jest pierwiastkiem tego równania.

PRZYKŁAD 6.

$z^2 + iz + z = 0$

$\triangle = i^2 - 8 = -9$

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9i^2} = \begin{cases} 3i \\ -3i \end{cases}$$

$$z_1 = \frac{-2-3i}{2} \qquad z_2 = \frac{-2-3i}{2}$$

$$z_1 = -2i \qquad z_2 = i$$

PRZYKŁAD 7

$z^2 + (2+i)z - 1 + 7i = 0$

$$\Delta = (2+i)^2 - 4(-1+7i) = 4 + 4i - 1 + 4 - 28i = 7 - 24i$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{7-24i} = x + iy$$

$$|\Delta| = \sqrt{49-576} = 25$$

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{7}{25} \\ \sin\varphi = -\frac{24}{25} \end{cases}$$

Nie jesteśmy w stanie w prosty sposób rozwiązać tego układu równań. Należy zatem wrócić do pierwiastka z delty:

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{7-24i} = x + iy \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$7 - 24i = (x+iy)^2$$

$$7 - 24i = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ 2xy = -24 \end{cases}$$

$$x = 4 \vee x = -4$$

$$y = -3 \vee y = 3$$

Zatem

$$\sqrt{\Delta} = \begin{cases} 4 - 3i \\ -4 + 3i \end{cases}$$

$$z_1 = -3 + i$$

$$z_1 = 1 - 2i$$