Wyznacznik macierzy

Uwaga
Wyznacznik definiujemy tylko dla macierzy kwadratowych:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, \cdots, a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, \cdots, a_{nn} \end{bmatrix}$$ - macierz A

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, \cdots, a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, \cdots, a_{nn} \end{vmatrix}$$ - wyznacznik macierzy A

Wyznacznik macierzy A to wyznacznik n wektorów, które stanowią kolumny tej macierzy.
Czyli:

$$\det A=\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\delta) a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

Własności wyznacznika macierzy:

1) Wyznacznik macierzy to liczba przyporządkowana macierzy (różne macierze mogą mieć ten sam wyznacznik).

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \det A=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=5$$

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det B=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=5$$

2) Wyznacznik macierzy A^T jest równy wyznacznikowi macierzy A.
$\det A^T=\det A$
3) Możemy dodać wyznaczniki tego samego stopnia z dwóch macierzy nie licząc ich. Można to zrobić $\Leftrightarrow$ macierze różnią się dokładnie jednym wierszem (dokładnie jedną kolumną).
Wówczas:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2i}+b_{2i} & & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}+b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2i} & & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & b_{2i} & & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_i+\overline{x}_i',\ldots,\overline{x}_n)=\det(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_i,\ldots,\overline{x}_n)+\det(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_i',\ldots,\overline{x}_n)$$

4) Aby pomnożyć wyznacznik przez liczbę (nie licząc go) mnożymy 1 wiersz (albo 1 kolumnę) wyznacznika przez tą liczbę.

$$\alpha\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2i} & & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1i} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2i} & & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

5) Jeżeli kolumny (albo wiersze) (jako wektory) są liniowo zależne to wyznacznik jest równy 0.
6) Zamiana kolejności kolumn albo wierszy powoduje odpowiednią zmianę znaku wyznacznika.
7) Wartość wyznacznika nie zmieni się jeżeli do wiersza (albo kolumny) dodamy kombinację liniową pozostałych wierszy (albo kolumn).
8) Można uzasadnić, że dla macierzy $A_{n\times n}$ i $B_{n\times n}$ zachodzi:
   $\det(A \cdot B)=\det A \cdot \det B$
9) Z: $A_{n\times n}$ – nieosobliwa
   T: $\det A \neq 0 \wedge \det A^{-1}=\frac{1}{\det A}$

Def 1.

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2i} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ - wyznacznik macierzy A

Podwyznacznikiem macierzy A nazywamy wyznacznik macierzy powstałej z macierzy A przez skreślenie w tej macierzy pewnej liczby wierszy i tej samej ilości kolumn.

Def 2.
Minorem M_{ij} macierzy A przynależnym elementowi a_{ij} nazywamy wyznacznik macierzy powstałej z macierzy A przez skreślenie i – tego wiersza oraz j-tej kolumny.

Def 3.
Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} nazywamy minor M_{ij} pomnożony przez $(-1)^{i+j}$, czyli $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Twierdzenie 1 (Laplace'a)
Z: $A_{n\times n}=[a_{ij}]$ – macierz
T: Wyznacznik macierzy A jest równy sumie iloczynów elementów dowolnie wybranego wiersza (albo kolumny) przez ich dopełnienia algebraiczne.
$\det A = a_{1j}\cdot A_{1j}+a_{2j}\cdot A_{2j}+\ldots+a_{nj}\cdot A_{nj}$
(jest to rozwinięcie względem j-tejkolumny)

$\det A = a_{i1}\cdot A_{i1}+a_{i2}\cdot A_{i2}+\ldots+a_{in}\cdot A_{in}$
(jest to rozwinięcie względem i-tego wiersza)

Przykład 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 1 & 0 & \boxed{0} & 1 \end{vmatrix} = 0\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+1\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{4+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0-1+1+0=0$$

Przykład 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \ddots & a_{ii} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \ddots & a_{ii} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}\cdot a_{22}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \ddots & a_{ii} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$$

W szczególności dla macierzy diagonalnej:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$$

Przykład 3

Rozwiązać równanie:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

Liczymy wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x-1 & 1 \\ 1-x & 1-x & 1-x & x \end{vmatrix} = (x-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x+3 \end{vmatrix} = (x-1)^3\cdot(x+3)$$

Podstawiając do równania otrzymujemy:

$(x-1)^3(x+3)=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-3$

Twierdzenie 2

Z: $A_{m\times n}$, det $A \neq 0$

T: A – jest macierzą nieosobliwą i $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^D)^T$

Gdzie A^D jest macierzą dopełnień algebraicznych wszystkich elementów macierzy A

$$A^D = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

<u>Wniosek:</u> $A_{n\times n}$ – jest macierzą nieosobliwą $\Leftrightarrow$ det $A \neq 0$.

Przykład 4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$$ - macierz jest nieosobliwa

$$A^D = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Czyli:

$$A^D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (A^D)^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\tfrac{1}{2}(A^D)^T=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Uwaga

Lepiej jest stosować metodę macierzy odwrotnej jako macierzy odwzorowania odwrotnego.
Czyli:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad -x_3 = y_1 \\ -x_1 + x_2 \quad\quad = y_2 \\ \quad\quad x_2 + x_3 = y_3 \end{cases}$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy:

$$x_1 = -\tfrac{1}{2}y_1 - \tfrac{1}{2}y_2 + \tfrac{1}{2}y_3$$
$$x_2 = \tfrac{1}{2}y_1 + \tfrac{1}{2}y_2 + \tfrac{1}{2}y_3$$
$$x_3 = -\tfrac{1}{2}y_1 - \tfrac{1}{2}y_2 + \tfrac{1}{2}y_3$$

Czyli: $A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Def 4.

Z: $A_{n\times m}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$ - macierz

Podwyznacznikiem (minorem) macierzy A nazywamy wyznacznik macierzy utworzonej z macierzy A przez skreślenie w niej pewnej liczby wierszy (i kolumn) w taki sposób aby otrzymana macierz była kwadratowa.
det $B_{k\times k}$ – minor stopnia k wyjęty z macierzy A.
Np.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ - minor stopnia 3 wyjęty z macierzy A

Twierdzenie 5

Z: $A_{n\times m}$ – macierz
T: Rząd macierzy A jest równy największemu ze stopni minorów niezerowych.

Poniższy przykład pokazuje, że na ogół nie warto stosować tego twierdzenia.

Przykład 5

Policzyć rząd macierzy.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 6 & 3 \\ 3 & 10 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$rzA=rz\begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 6 & 3 \\ 3 & 10 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}=rz\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 6 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & 6 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & 6 & 3 \end{bmatrix}=rz\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=2$$

Czyli rzA = 2. Co oznacza, że wszystkie minory stopnia 4 oraz stopnia 3 są równe 0.