Zmiana bazy przestrzeni wektorowej

Definicja 1.

$(X, K, +, \cdot)$ - przestrzeń wektorowa nad ciałem K

$B = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n)$ - stara baza

$B' = (\overline{e}_1', \overline{e}_2', \ldots, \overline{e}_n')$ - nowa baza

Macierzą przejścia P od B do B′ nazywamy macierz odwzorowania Identycznościowego $P_{B \to B'}$ przestrzeni X w siebie wyjściowo traktowanej z bazą B′, a docelowo z bazą B

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{IdX} & X \\ B' & & B \end{array}$$

$$P = M_{IdX}(B', B)$$

WNIOSEK:

$$IdX(\overline{e}_1') = \overline{e}_1' = a_{11}\overline{e}_1 + a_{21}\overline{e}_2 + \ldots + a_{n1}\overline{e}_n = [a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{n1}]_B$$

$$IdX(\overline{e}_2') = \overline{e}_2' = a_{12}\overline{e}_1 + a_{22}\overline{e}_2 + \ldots + a_{n2}\overline{e}_n = [a_{12} + a_{22} + \ldots + a_{n2}]_B$$

$$\vdots$$

$$IdX(\overline{e}_n') = \overline{e}_n' = a_{1n}\overline{e}_1 + a_{2n}\overline{e}_2 + \ldots + a_{nn}\overline{e}_n = [a_{1n} + a_{2n} + \ldots + a_{nn}]_B$$

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Pierwszą kolumnę macierzy przejścia stanowią współrzędne pierwszego wektora nowej bazy względem starej bazy.
Drugą kolumnę macierzy przejścia stanowią współrzędne drugiego wektora nowej bazy względem starej bazy.

$\vdots$

n-tą kolumnę macierzy przejścia stanowią współrzędne n-tego wektora nowej bazy względem starej bazy.

Przykład 1.

$(X, K, +, \cdot)$ - przestrzeń wektorowa

$\dim X = 3$

$B = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ - stara baza

$B' = (\overline{e}_1', \overline{e}_2', \overline{e}_3')$ - nowa baza

$$\overline{e}_1\,' = \overline{e}_1$$
$$\overline{e}_2\,' = \overline{e}_1 + \overline{e}_2$$
$$\overline{e}_3\,' = \overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3$$

Sprawdzamy, ze B′ jest bazą:

$$\alpha\overline{e}_1\,' + \beta\overline{e}_2\,' + \gamma\overline{e}_3\,' = \overline{0}$$
$$\alpha\overline{e}_1 + \beta\left(\overline{e}_1 + \overline{e}_2\right) + \gamma\left(\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3\right) = \overline{0}$$
$$\left(\alpha + \beta + \gamma\right)\overline{e}_1 + \left(\beta + \gamma\right)\overline{e}_2 + \left(\gamma\right)\overline{e}_3 = \overline{0}$$

$\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ - wektory liniowo niezależne

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

i dimX=3, więc B′ jest bazą

$$\overline{e}_1\,' = 1\overline{e}_1 + 0\overline{e}_2 + 0\overline{e}_3 = [1,0,0]_B$$
$$\overline{e}_2\,' = 1\overline{e}_1 + 1\overline{e}_2 + 0\overline{e}_3 = [1,1,0]_B$$
$$\overline{e}_2\,' = 1\overline{e}_1 + 1\overline{e}_2 + 1\overline{e}_3 = [1,1,1]_B$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

WNIOSEK

1) macierz P jest macierzą nieosobliwą $P_{B \to B'}$ oraz $P^{-1}_{B' \to B}$ jest macierzą odwrotną

2) $\overline{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]_B = [x_1\,', x_2\,', \ldots, x_n\,']_B$

$$\overline{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \overline{X}\,' = \begin{bmatrix} x_1\,' \\ x_2\,' \\ \vdots \\ x_n\,' \end{bmatrix}$$

Na podstawie postaci macierzowej: $\overline{X} = P \cdot \overline{X}\,' \Rightarrow \overline{X}\,' = P^{-1} \cdot \overline{X}$

Przykład 1′.

$\overline{x} = \overline{e}_1 - 2\overline{e}_2 + 3\overline{e}_3 = [1,-2,3]_B = [x_1\,', x_2\,', x_3\,']_{B'}$ ⊜

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1\,' \\ x_2\,' \\ x_3\,' \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x_1\,' + x_2\,' + x_3\,' = 1 \\ x_2\,' + x_3\,' = -2 \\ x_3\,' = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1\,' = 3 \\ x_2\,' = -5 \\ x_3\,' = 3 \end{cases}$$

⊜ $[3,-5,3]_{B'}$

Twierdzenie 1. (o zmianie macierzy odwzorowania przy zmianie baz przestrzeni)

Z: $(X,K,+,\cdot),(Y,K,+,\cdot)$ - przestrzenie wektorowe

$$\dim X = m \qquad \left.\begin{aligned} B_1 &= (\overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_m) \\ B_1' &= (\overline{e}_1',\overline{e}_2',\ldots,\overline{e}_m') \end{aligned}\right\}\text{bazy w X} \qquad \left.\begin{aligned} B_2 &= (\overline{l}_1,\overline{l}_2,\ldots,\overline{l}_n) \\ B_2' &= (\overline{l}_1',\overline{l}_2',\ldots,\overline{l}_n') \end{aligned}\right\}\text{bazy w Y}$$

$$\dim Y = n$$

$$P = P_{B_1 \to B_1'} \qquad Q = Q_{B_2 \to B_2'}$$

$f: X \to Y$ f jest odwzorowaniem liniowym

$$A = M_f(B_1, B_2)$$

$$B = M_f(B_1', B_2')$$

T: $B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$

Przykład 2.

$(X,K,+,\cdot)$

$B_1 = (\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3)$

$B_1' = (\overline{e}_1',\overline{e}_2',\overline{e}_3')$

$\overline{e}_1' = \overline{e}_1 + \overline{e}_2$

$\overline{e}_2' = \overline{e}_2 + \overline{e}_3$

$\overline{e}_3' = \overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3$

$(Y,K,+,\cdot)$

$B_2 = (\overline{l}_1,\overline{l}_2)$

$B_2' = (\overline{l}_1',\overline{l}_2')$

$\overline{l}_1' = -\overline{l}_1 + \overline{l}_2$

$\overline{l}_2' = \overline{l}_1 + \overline{l}_2$

$f: X \to Y$

$f(e_1) = -\overline{l}_1 + \overline{l}_2$

$f(e_2) = 3\overline{l}_2$

$f(e_3) = \overline{l}_1 + \overline{l}_2$

$$A = M_f(B_1, B_2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = M_f(B_1', B_2')$$

$$P_{B_1 \to B_1'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_{B_2 \to B_2'} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$$

Macierz Q^{-1} znajdujemy rozwiązując układ: $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

WNIOSEK:

$(X, K, +, \cdot)$

$f : X \to X$ f- endomorfizm

$B_1 \quad B_1$

$B_1' \quad B_1'$

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

$A = M_f(B_1, B_1)$

$B = M_f(B_1', B_1')$

$P_{B_1 \to B_1'}$

Definicja 2.

a) macierze $A_{n\times m}, B_{n\times m}$ nazywamy macierzami równoważnymi

$$:\Leftrightarrow \exists_{P,Q-nieosobliwe} : B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$$

b) macierze $A_{n\times n}, B_{n\times n}$ nazywamy macierzami podobnymi

$$:\Leftrightarrow \exists_{P-nieosobliwa} : B = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

WNIOSEK:

1) dwie macierze tego samego odwzorowania liniowego względem różnych baz są równoważne

2) dwie macierze tego samego endomorfizmu w różnych bazach są podobne

UWAGA

Można udowodnić, że dwie macierze równoważne reprezentują to samo odwzorowanie liniowe w odpowiednio wybranych i ustalonych przestrzeniach i bazach, oraz że dwie macierze podobne reprezentują ten sam endomorfizm w odpowiednio wybranych i ustalonych przestrzeniach i bazach.

Definicja 3.
Rzędem macierzy $A_{n\times n}$ nazywamy maksymalną ilość kolumn liniowo niezależnych (traktowanych jako wektory w przestrzeni K^n)

UWAGA
Maksymalna ilość kolumn i wierszy jest taka sama

WNIOSEK:
1) a) $A_{n\times m}: \mathrm{rz}A \le \min\{n,m\}$
   b) $\mathrm{rz}A^T = \mathrm{rz}A$
2) $A = M_f \Rightarrow \mathrm{r}f = \mathrm{rz}A$
3) a) macierze ***A,B*** są równoważne $\Leftrightarrow \mathrm{rz}A = \mathrm{rz}B$
   b) macierze $A_{n\times n}, B_{n\times n}$ są podobne $\Leftrightarrow \mathrm{rz}A = \mathrm{rz}B$
4) rząd macierzy nie zmieni się, jeżeli
   a) macierz pomnożymy przez $\alpha \neq 0$
   b) zmienimy kolejność wierszy albo kolejność kolumn
   c) do jednego wiersza albo kolumny dodamy kombinacją liniową pozostałych

Przykład 3.
$$\mathrm{rz}A = \mathrm{rz}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \mathrm{rz}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \end{bmatrix} = \mathrm{rz}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$\mathrm{rz}A = 2$