



AGH

Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica
w Krakowie

Dziedzina nauk ścisłych i przyrodniczych
Dyscyplina: Matematyka

Rozprawa doktorska

Komputerowo wspierany dowód dyfuzji w problemie trzech ciał

Natalia Wodka-Cholewa

Promotor rozprawy:
prof. dr hab. Maciej Capiński

Praca wykonana:
Akademia Górniczo-Hutniczo im. Stanisława Staszica
Wydział Matematyki Stosowanej
Katedra Równań Różniczkowych

Kraków 2024

Spis treści

Streszczenie	2
Abstract	3
Podziękowania	4
Wstęp	5
Rozdział 1. Preliminaria	9
1.1. Twierdzenie Krawczyka	9
1.2. Normalnie hiperboliczne rozmaitości niezmiennicze	10
1.3. Twierdzenie KAM	12
1.4. Mechanizm dyfuzji	13
1.4.1. Dyfuzja dla dyskretnych układów dynamicznych	14
1.4.2. Dyfuzja dla okresowych perturbacji układów hamiltonowskich	16
1.5. Ograniczony problem trzech ciał	19
Rozdział 2. Główny wynik rozprawy	21
Rozdział 3. Dowód głównego twierdzenia	23
3.1. Metoda strzałów równoległych dla orbit symetrycznych	23
3.2. Oszacowania orbit Lyapunova	25
3.3. Oszacowania stabilnej i niestabilnej rozmaitości orbit Lyapunova	26
3.4. Przecięcie rozmaitości stabilnej i niestabilnej orbit Lyapunova	36
3.5. Przetwarzanie rodziny orbit Lyapunova po perturbacji	39
3.6. Dowód głównego twierdzenia	41
Rozdział 4. Zakończenie	51
Dodatek A. Dowody lematów i niektórych własności	52
A.1. Własności symplektyczne odwzorowań Poincarégo	52
A.2. Dowód Lematu 3.7	54
A.3. Dowód Lematu 3.8	54
A.4. Oszacowanie stałej Lipschitza dla członu perturbacyjnego	55
Bibliografia	58

Streszczenie

Vladimir Arnold udowodnił w 1964 roku, że nawet przy bardzo małej perturbacji całkowalnego układu hamiltonowskiego możemy otrzymać dowolnie duże zmiany energii. Zjawisko to, które obecnie nazywamy dyfuzją Arnolda ma miejsce w problemie trzech ciał. W rozprawie wykażemy, że istotnie, dla dostatecznie małej perturbacji można otrzymać orbity, które zmieniają energię o pewną stałą niezależną od wielkości perturbacji.

W tej rozprawie doktorskiej przedstawiamy komputerowo wspierany dowód dyfuzji w eliptycznym ograniczonym problemie trzech ciał na płaszczyźnie. Konstrukcja bazuje na rozważeniu kołowego ograniczonego problemu trzech ciał na płaszczyźnie i wprowadzeniu mimośrodowo trajektorii większych ciał jako zaburzającego parametru. Przez taką perturbację otrzymujemy problem eliptyczny. Niezaburzony układ zachowuje energię, lecz dla dostatecznie małej perturbacji istnieją orbity ze zmianą energii, która nie zależy od rozmiaru tej perturbacji. W dowodzie badamy przecięcia rozmaitości stabilnej i niestabilnej normalnie hiperbolicznego cylindra wykorzystując odwzorowanie rozpraszające oraz teorię śledzenia. Konstrukcja prowadzi do istnienia ‘pseudo-orbit’, dla których występują wymagane zmiany energii. Za pomocą śledzenia, z tych pseudo-orbit, wykazujemy istnienie właściwych orbit układu, dla których istnieją interesujące nas zmiany energii.

Atutem przedstawionej metody jest to, że ma ona charakter konstrukcyjny i może być stosowana dla modelu o fizycznych parametrach, w naszym przypadku dla układu Słońce-Jowisz, który jest z dala od zakresu dostępnego dla technik w pełni perturbacyjnych.

Słowa kluczowe

dowód wspierany komputerowo, problem trzech ciał, dyfuzja Arnolda, normalnie hiperboliczna rozmaitość, twierdzenie o własności śledzenia, odwzorowanie rozpraszające, układ hamiltonowski

Abstract

Vladimir Arnold proved in 1964, that even with a very small perturbation of an integrable hamiltonian system we can obtain large energy changes, which are independent of the size of the perturbation. Such phenomenon has been given the name of Arnold's diffusion. It has been shown that it can occur in three body problem. In this thesis we show a mechanism for proving Arnold's diffusion. We want to show that for a sufficiently small perturbation we can obtain orbits that change energy by some constant independent on the size of perturbation.

In this thesis we present the computer assisted proof of diffusion in the Planar Elliptic Restricted Three Body Problem. We consider a Planar Circular Restricted Three Body Problem. We perturb it introducing a parameter, that is the eccentricity of the trajectories of the primaries and obtain in this way the Planar Elliptic Restricted Three Body Problem. The unperturbed system preserves energy, but for sufficiently small perturbations there exist orbits with energy changes, that do not depend on the size of that perturbation. In the proof we study intersections of stable and unstable manifolds of a normally hyperbolic cylinder using scattering map and shadowing theory. We prove that intersections are transversal and we show explicit energy changes for 'pseudo-orbits'. We then prove the existence of real orbits of the system, which shadow the pseudo-orbits. Such orbits exhibit the required energy changes.

The main advantage of the presented method is its explicit and constructive nature. It allows us to treat the model with real life parameters, in our case the Jupiter-Sun system, which is unattainable to purely perturbative techniques.

Key words

computer assisted proof, three body problem, Arnold diffusion, normally hyperbolic manifold, shadowing lemma, scattering map, Hamiltonian system

Podziękowania

Wielkie podziękowania należą się mojemu promotorowi prof. dr hab. Maciejowi Capińskiemu, bez którego ta praca by nie powstała. Jego cierpliwość do popełnianych przeze mnie błędów i determinacja w wielokrotnym tłumaczeniu trudnych zagadnień sprawiły, że udało się stworzyć tę rozprawę. Wszystkie dyskusje, merytoryczne komentarze, wymiany wiadomości oraz spotkania zaowocowały moim rozwojem naukowym jak i osobistym. Jestem wdzięczna, że trafiłam na tak utalentowanego i zaangażowanego a jednocześnie wyrozumiałego promotora.

Wstęp

W niniejszej rozprawie rozważamy autonomiczny układ hamiltonowski. Taki układ ma całkę ruchu określoną przez Hamiltonian. Całkę tą będziemy często nazywali energią. Będziemy rozważać ograniczony problem trzech ciał na płaszczyźnie. Problem opisuje ruch małego ciała o znikomej masie pod wpływem sił grawitacyjnych dwóch dużych ciał, które poruszają się po orbitach Keplera. Dla rozróżnienia te ciała będziemy nazywać większymi a małe ciało jako punkt. Ruch punktu odbywa się w tej samej płaszczyźnie co trajektorie większych ciał. Będziemy wyróżniać dwa problemy. Gdy orbity Keplera są okręgami mówimy o kołowym organicznym problemie trzech ciał na płaszczyźnie (ang. *Planar Circular Restricted Three Body Problem* - PCR3BP). Rozważamy układ w takich zmiennych, aby współrzędne poruszały się razem z ruchem większych ciał, tak aby w nowych zmiennych pozostawały w miejscu. Wtedy Hamiltonian takiego układu jest niezależny od czasu. Gdy orbity są eliptyczne, problem nazywamy eliptycznym ograniczonym problemem trzech ciał na płaszczyźnie (ang. *Planar Elliptic Restricted Three Body Problem* - PER3BP), którego Hamiltonian zależy od czasu. Omawiając układ będziemy często używać skrótów dla uproszczenia.

Układ, który badamy przed perturbacją posiada normalnie hiperboliczną rozmaitość niezmienniczą, której stabilna i niestabilna rozmaitość przecinają się transwersalnie. Oznacza to, że rozważany układ jest chaotyczny. (Jest to prostszy problem niż taki, który jest w pełni całkowalny tak jak w znanym przykładzie Arnolda [2].) Mechanizm dyfuzji opiera się na udowodnieniu istnienia trajektorii, które śledzą przecięcia rozmaitości stabilnej i niestabilnej oraz zmianie ich energii pod wpływem zaburzenia.

Głównym wynikiem tej rozprawy jest wynik z pracy [11]. Opiera się on na wynikach geometrycznych oraz tych dotyczących śledzenia, które otrzymali Delshams, Gidea, de la Llave oraz Seara [12, 13]. Narzędziem wykorzystywanym przy dowodzie i konstrukcji jest odwzorowanie rozpraszające (ang. *scattering map*) [13], czyli takie które punktowi z normalnie hiperbolicznej rozmaitości przypisuje inny punkt z tej rozmaitości, jeśli stabilna i niestabilna wiązka tych punktów przecina się w sposób nietrywialny. Są dwie korzyści z badania odwzorowania rozpraszającego. Po pierwsze można wykorzystać techniki perturbacyjne do badania wpływu parametru na to odwzorowanie. Zwykle odbywa się to za pomocą całek Melnikowa w przypadku układów ciągłych lub sum Melnikowa w przypadku układów dyskret-

nych [13, 15]. Po zbadaniu tego jak wpływa perturbacja na odwzorowanie, drugą korzyścią jest istnienie orbit, które śledzą pseudo-orbitę odwzorowania rozpraszającego [19]. Oznacza to, że jeśli udowodnimy istnienie pseudo-orbit, które mają makroskopowe zmiany energii, to istnieją rzeczywiste trajektorie układu, które również zmieniają tak energię.

Aby udowodnić dyfuzję w naszej rozprawie będziemy stosować schemat opracowany w pracach [13, 15, 19, 20]. Głównym narzędziem jest wcześniej wspomniane odwzorowanie rozpraszające [13] wraz z lematami dotyczącymi śledzenia z [19]. W dowodzie skorzystamy z wyników uzyskanych w [10], gdzie sformułowane są metody, które można zaimplementować do przeprowadzenia dowodu wspieranego komputerowo. Główną cechą która przemawia za wykorzystaniem twierdzeń z [10] jest to, że założenia które należy zweryfikować aby uzyskać mechanizm dyfuzji możemy przeprowadzić w skończonej liczbie kroków poprzez obliczanie pewnych oszacowań dotyczących własności układu.

W naszej rozprawie przeprowadzimy dowód w następujący sposób. Znajdziemy oszacowanie na rodzinę orbit Lyapunova w kołowym problemie trzech ciał (PCR3BP), która stanowi rozmaitość normalnie hiperboliczną. (Od teraz rozmaitości normalnie hiperboliczne będziemy oznaczać jako NHIM; ang. *normally hyperbolic invariant manifold*.) Następnie otrzymamy oszacowanie na lokalne rozmaitości NHIM, stabilną i niestabilną oraz udowodnimy, że przecinają się transversalnie. Sprawdzimy również czy odwzorowanie rozpraszające jest dobrze zdefiniowane i otrzymamy dokładne oszacowanie na jego dynamikę. Zweryfikujemy założenia skrętu (ang. *twist condition*) na podstawie których można stwierdzić, że NIHM po perturbacji zawiera zbiór Cantora KAM-torusów (twierdzenie KAM od nazwisk Andrieja Kołmogorowa, Władimira Arnolda i Jürgena Mosera, udowodnione dla układów hamiltonowskich przez Arnolda w 1963 roku [4]). Następnie wykorzystamy twierdzenia z [10] aby udowodnić dyfuzję. Wszystkie kroki dowodu można przeprowadzić z pomocą oszacowań opartych na arytmetyce przedziałowej z użyciem komputera.

Aby udowodnić dyfuzję w problemie eliptycznym (PER3BP) nie jest konieczne opieranie się na dowodach wspieranych komputerowo. W pracy [14] można znaleźć analityczne dowody dyfuzji dla tego problemu. Użyto tam również teorii odwzorowania rozpraszającego oraz mechanizmu śledzenia. Aby jednak przeprowadzić analityczny dowód w pracy [14] jedna z mas większych ciał jest przyjęta jako znacznie mniejsza od drugiej oraz moment pędu punktu o znikomej masie jest wystarczająco duży. Różnica w naszym podejściu jest taka, że możemy pracować z dokładnie określoną masą Jowisza oraz konkretną wartością energii punktu, która odpowiada energii komety Oterma. Podobnie jak w [14] musimy założyć, że mimośród dla układu jest dostatecznie mały. Zatem odchylenie od kołowej orbity jest niewielkie.

W pracy [9] autorzy wykorzystują dokładne wartości mas i energii oraz przedział dla mimośródów zaczynający się od zera aż do wartości mającej znaczenie fizyczne. W pracy użyto konstrukcji komputerowo wspieranego dowodu z odpowiednio ułożonymi „oknami”. Różnica jest taka, że w naszym podejściu szukamy przecięć rozmaitości nieperturbowanego układu i sprawdzamy założenia z pracy [10]. Orbity śledzące dostajemy automatycznie z [19] i nie musimy zajmować się do-

kładną konstrukcją okien jak w [9]. Jednakże nasz wynik jest trochę słabszy niż uzyskany w [9].

Nasza konstrukcja geometryczna jest bardzo podobna do metody w pracach [7, 8]. Jest jednak kilka różnic, z których główną jest to, że używamy odwzorowań Poincarégo i obliczamy skończone sumy Melnikova zamiast całek Melnikova. Planowaliśmy wykorzystać taką samą konstrukcję jak w [7], ale okazało się że obliczanie dokładnych oszacowań na całki wzdłuż trajektorii jest dużo trudniejsze niż obliczenie oszacowań na sumy wzdłuż dyskretnych orbit odwzorowania Poincarégo.

Istotna różnica pomiędzy naszym podejściem a [7] jest taka, że w [7] niektóre z założeń twierdzeń dzięki którym dyfuzja została udowodniona są sprawdzone poprzez nieściśle obliczenia. W niniejszej rozprawie przeprowadzimy dowód wykorzystując ściśle obliczenia w arytmetyce przedziałowej. Zostały one wykorzystane w dowodzie wspieranym komputerowo istnienia normalnie hiperbolicznej rozmaitości niezmienniczej oraz sprawdzenia warunków „skrętu”, potrzebnych aby wykorzystać klasyczne twierdzenie KAM przy rozmaitości. Przeprowadziliśmy także dowód wspierany komputerowo tego, że odwzorowanie rozpraszające jest dobrze zdefiniowane, poprzez znalezienie transversalnego przecięcia stabilnej i niestabilnej rozmaitości. Z użyciem ścisłej arytmetyki przedziałowej oszacowaliśmy sumy Melnikova dzięki czemu można było udowodnić dyfuzję.

Głównym narzędziem, które zostało przez nas wykorzystane przy implementacji dowodu wspieranego komputerowo jest biblioteka CAPD (ang. *Computer Assisted Proofs in Dynamics*¹, [24, 25]). W rozprawie zostały zastosowane następujące techniki dowodowe: istnienie rodziny orbit Lyapunova jak i dowód ich orbit homoklinicznych przeprowadzony jest wykorzystując symetrię w PCR3BP wraz z metodą strzałów równoległych (ang. *parallel shooting*) i metodą Krawczyka. Aby otrzymać oszacowanie na stabilną i niestabilną rozmaitość oraz udowodnić transversalność przecięcia potrzebną do upewnienia się, że odwzorowanie rozpraszające jest dobrze zdefiniowane używamy stożków. Założenia twierdzeń z pracy [10] dzięki którym otrzymujemy dyfuzję można sprawdzić poprzez obliczenie odpowiednich sum wzdłuż skończonej ilości fragmentów orbity homoklinicznej. Kod jest dostępny na stronie https://github.com/NataliaWodka/Drift_Orbits_3bp.git.

Opiszemy teraz jak rozprawa została podzielona i co zawierają poszczególne rozdziały. W pierwszym rozdziale rozprawy znajdują się pojęcia wstępne. Zostały tam przytoczone podstawowe twierdzenia oraz klasyczne definicje pojęć potrzebnych do dowodów. Wprowadzono również oznaczenia oraz opis układu, który nas interesuje w tej pracy.

W rozdziale 2 sformułowany został główny wynik rozprawy doktorskiej.

Kolejny rozdział zawiera plan oraz szczegółową konstrukcję dowodu wraz z odpowiednimi lematami pomocniczymi. Opisane zostały narzędzia użyte przy dowodzie wspieranym komputerowo. Są one standardowymi metodami używanymi w tego typu dowodach. Każdy z kolejnych kroków dowodu został opisany wraz z wynikiem w osobnym podrozdziale. Ostatni podrozdział zawiera dowód głównego twierdzenia opisanego w rozdziale 2.

¹ <http://capd.ii.uj.edu.pl>

W ostatnim rozdziale rozprawy znajduje się posumowanie.

Dodatek do rozprawy zawiera techniczne dowody niektórych lematów dotyczące głównie oszacowań.

Preliminaria

Dla każdego zbioru U w przestrzeni topologicznej będziemy używać standardowej notacji na wnętrze, domknięcie i brzeg odpowiednio: $\text{int}U$, $\overline{U}$, ∂U . Torus k -wymiarowy będziemy oznaczać symbolem $\mathbb{T}^k$ i będzie on zawsze 2π -okresowy, tj. $\mathbb{T} = \mathbb{R} \bmod 2\pi$.

Dla punktu $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, jego rzut na i -tą współrzędną będzie oznaczany jako $\pi_i p = p_i$ lub $\pi_{p_i} p = p_i$. Dla przykładu, dla punktu $p = (x, y)$ oznaczamy rzuty przez $\pi_x p$, $\pi_y p$.

1.1. Twierdzenie Krawczyka

Zbiorem przedziałowym lub kostką będziemy nazywać produkt kartezjański przedziałów w $\mathbb{R}^n$. Dla zbioru $U \subset \mathbb{R}^n$ będziemy oznaczać jako $[U]$ zbiór przedziałowy taki, że $U \subset [U]$ i nazywać go *otoczką przedziałową* U (ang. *enclosure of* U). Taka otoczka nie jest jednoznacznie wyznaczona. W naszych badaniach układów dynamicznych będziemy rozważać otoczki punktów stałych, orbit okresowych i homoklinicznych oraz rozmaitości niezmienniczych. Im mniejszą mamy otoczkę zawierającą dany obiekt, tym lepsze przybliżenie tego obiektu uzyskujemy.

Macierz przedziałowa $A \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ jest macierzą, której elementy są przedziałami. Rozważmy funkcję $f \in C^1$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Zbiór $[DF(X)] \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ będziemy nazywać przedziałową otoczką macierzy pochodnych funkcji F na zbiorze X , to znaczy

$$[DF(x)] = \left\{ A = (a_{i,j}) : a_{i,j} \in \left[\inf_{x \in X} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x), \sup_{x \in X} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right] \right\}.$$

Poniższe twierdzenie, nazywane *metodą Krawczyka* można wykorzystać do znalezienia oszacowania na miejsca zerowe danej funkcji.

Twierdzenie 1.1. [1] Niech $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie funkcją C^1 . Niech $X \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem przedziałowym, $x \in X$, niech $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ będzie liniowym izomorfizmem oraz

$$K(x, X, F) := x - CF(x) + (I - C[DF(X)])(X - x),$$

gdzie I jest macierzą identyczności. Jeśli

$$K(x, X, F) \subset \text{int } X,$$

to istnieje dokładnie jeden punkt $x^* \in X$ taki, że

$$F(x^*) = 0.$$

Zauważmy, że po modyfikacji funkcji F na $F(x) - x$ poszukiwanie miejsca zerowego sprowadza się do poszukiwania punktu stałego (na przykład orbity okresowej dla danego odwzorowania).

1.2. Normalnie hiperboliczne rozmaitości niezmiennicze

Wprowadzimy teraz standardowe definicje, oznaczania i twierdzenia teorii dotyczącej normalnej hiperboliczności [18, 23] oraz odwzorowania rozpraszające go (ang. *scattering map*) [13].

Niech M będzie gładką n -wymiarową riemannowską rozmaitością i $f : M \rightarrow M$ będzie dyfeomorfizmem klasy C^r , dla $r > 1$. Niech $\Lambda \subset M$ będzie zwartą rozmaitością bez brzegu, niezmienniczą dla f , tj. $f(\Lambda) = \Lambda$. Mówimy, że Λ jest *normalnie hiperboliczną rozmaitością niezmienniczą* (ang. *normally hyperbolic invariant manifold* skąd pochodzi skrót NHIM), jeśli są spełnione warunki hiperbolicznej zbieżności: istnieje stała $C > 0$ oraz $0 < \lambda < \mu^{-1} < 1$ i następująca dekompozycja na wiązki wektorowe jest Tf -niezmiennicza

$$T_x M = E_x^u \oplus E_x^s \oplus T_x \Lambda$$

oraz dla każdego $x \in \Lambda$

$$v \in E_x^u \Leftrightarrow \|Df^k(x)v\| \leq C\lambda^{-k} \|v\|, \quad k \leq 0, \quad (1.1)$$

$$v \in E_x^s \Leftrightarrow \|Df^k(x)v\| \leq C\lambda^k \|v\|, \quad k \geq 0, \quad (1.2)$$

$$v \in T_x \Lambda \Rightarrow \|Df^k(x)v\| \leq C\mu^{|k|} \|v\|, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.3)$$

Powyższe warunki to warunki zbieżności w czasie w tył i w przód (ang. *rate conditions*).

Niech $d(x, \Lambda)$ oznacza odległość pomiędzy punktem x i rozmaitością Λ . Rozważmy normalnie hiperboliczną rozmaitość niezmienniczą oraz $U \subset M$, odpowiednio małe otoczenie cylindryczne. Możemy zdefiniować lokalną rozmaitość niestabilną i lokalną rozmaitość stabilną [23] jako

$$W_\Lambda^u(f, U) = \{y \in M \mid f^k(y) \in U, d(f^k(y), \Lambda) \leq C_y \lambda^{|k|}, k \leq 0\},$$

$$W_\Lambda^s(f, U) = \{y \in M \mid f^k(y) \in U, d(f^k(y), \Lambda) \leq C_y \lambda^k, k \geq 0\},$$

gdzie $C_y > 0$ jest stałą, która tak jak zaakcentowano indeksem może zależeć od y . Globalną niestabilną i stabilną rozmaitość definiujemy następująco

$$W_\Lambda^u(f) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(W_\Lambda^u(f, U)), \quad W_\Lambda^s(f) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W_\Lambda^s(f, U)).$$

Dla rozmaitości $W_\Lambda^u(f, U)$, $W_\Lambda^s(f, U)$, $W_\Lambda^u(f)$ i $W_\Lambda^s(f)$ zachodzi foliacja [18] na włókna

$$\begin{aligned} W_x^u(f, U) &= \{y \in M \mid f^k(y) \in U, d(f^k(y), f^k(x)) \leq C_{x,y} \lambda^{|k|}, k \leq 0\}, \\ W_x^s(f, U) &= \{y \in M \mid f^k(y) \in U, d(f^k(y), f^k(x)) \leq C_{x,y} \lambda^k, k \geq 0\}, \end{aligned}$$

gdzie $x \in \Lambda$ oraz $C_{x,y} > 0$ jest stałą, która może zależeć od x i y . Możemy zapisać rozmaitości następująco

$$W_x^u(f) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(W_{f^{-n}(x)}^u(f, U)), \quad W_x^s(f) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W_{f^n(x)}^s(f, U)).$$

Niech

$$l < \min \left\{ r, \frac{|\log \lambda|}{\log \mu} \right\}. \quad (1.4)$$

Rozmaitość Λ jest klasy C^l , rozmaitości $W_\Lambda^u(f)$, $W_\Lambda^s(f)$ są klasy C^{l-1} oraz $W_x^u(f)$, $W_x^s(f)$ są klasy C^r [13].

Klasyczne twierdzenie o istnieniu i stabilności rozmaitości normalnie hiperbolicznych [16–18, 23] mówi, że jeśli Λ jest rozmaitością normalnie hiperboliczną dla zadanego odwzorowania, to istnieje jej rozmaitość stabilna i niestabilna oraz ich foliacja. Gładkość tych obiektów jest taka, jak zaznaczone wyżej. Co więcej, twierdzenie o istnieniu i stabilności rozmaitości normalnie hiperbolicznych mówi, że dla odpowiednio małej perturbacji normalnie hiperboliczna rozmaitość, jak również jej stabilna i niestabilna rozmaitość oraz włókna przetrwają, zachowując swoje własności, i są C^{l-1} blisko niesperturbowanych obiektów.

Jako (M, ω) będziemy oznaczać gładką rozmaitość symplektyczną. Złożmy, że $\Lambda \subset M$ jest normalnie hiperboliczną rozmaitością niezmienniczą dla symplektycznego odwzorowania klasy C^r , $f : M \rightarrow M$, gdzie $r > 1$. Założmy, że Λ ma wymiar parzysty i jest symplektyczna z formą $\omega|_\Lambda$, oraz że $f|_\Lambda$ jest symplektyczne na Λ . Możemy zdefiniować dwa odwzorowania [13]

$$\begin{aligned} \Omega_+ : W_\Lambda^s(f) &\rightarrow \Lambda, \\ \Omega_- : W_\Lambda^u(f) &\rightarrow \Lambda, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \Omega_+(x) &= x_+ \Leftrightarrow x \in W_{x_+}^s(f), \\ \Omega_-(x) &= x_- \Leftrightarrow x \in W_{x_-}^u(f). \end{aligned}$$

Mówimy, że rozmaitość $\Gamma \subset W_\Lambda^u(f) \cap W_\Lambda^s(f)$ jest *kanalem homoklinicznym* dla Λ jeśli są spełnione następujące warunki:

(i) dla każdego $x \in \Gamma$

$$T_x W_\Lambda^s(f) + T_x W_\Lambda^u(f) = T_x M, \quad (1.5)$$

$$T_x W_\Lambda^s(f) \cap T_x W_\Lambda^u(f) = T_x \Gamma, \quad (1.6)$$

(ii) włókna Λ przecinają Γ transwersalne w następującym sensie

$$T_x \Gamma \oplus T_x W_{x_+}^s(f) = T_x W_\Lambda^s(f), \quad (1.7)$$

$$T_x \Gamma \oplus T_x W_{x_-}^u(f) = T_x W_\Lambda^u(f), \quad (1.8)$$

dla każdego $x \in \Gamma$,

(iii) odwzorowania $(\Omega_\pm)|_\Gamma : \Gamma \rightarrow \Lambda$ są dyfeomorfizmami na swoje obrazy.

Wprowadzimy teraz odwzorowanie, które jest jednym ze standardowych narzędzi [13, 19] służących do dowodów dyfuzji. Załóżmy, że Γ jest kanałem homoklinicznym dla Λ oraz przyjmijmy oznaczenie $\Omega_\pm^\Gamma := (\Omega_\pm)|_\Gamma$. Definiujemy *odwzorowanie rozpraszające* (ang. *scattering map*) $\sigma^\Gamma : \Omega_-^\Gamma(\Gamma) \rightarrow \Omega_+^\Gamma(\Gamma)$ dla kanału homoklinicznego Γ jako

$$\sigma^\Gamma := \Omega_+^\Gamma \circ (\Omega_-^\Gamma)^{-1}. \quad (1.9)$$

Odwzorowanie to pierwszy raz wprowadził Delshams w 2000 roku [12].

Patrząc na definicję odwzorowania rozpraszającego nie zauważamy, aby odzwierciedlało ono prawdziwą dynamikę układu. W (1.9) punktowi x_- przyporządkowujemy punkt x_+ , jeżeli ich włókna przecinają się na Γ . Nie oznacza to, że istnieje trajektoria układu, przechodząca przez Γ , startująca z punktu x_- i kończąca się w punkcie x_+ . Zauważmy nawet, że z racji tego, że $x_-, x_+ \in \Lambda$, gdzie Λ jest niezmienniczą oraz $\Gamma \cap \Lambda = \emptyset$ taka trajektoria nie może istnieć.

Na pierwszy rzut oka odwzorowanie rozpraszające wydaje się być nieco sztuczną konstrukcją, która nie jest bezpośrednio powiązana z zachowaniem trajektorii. W sekcji 1.4 pokażemy, że nawet jeśli trajektorie układu nie pokrywają się z odwzorowaniem rozpraszającym, mogą one „śledzić” jego zachowanie. Będzie to dla nas ważny fakt, dający nam podstawowe narzędzie do dowodów dyfuzji.

1.3. Twierdzenie KAM

Wprowadzimy teraz klasyczne twierdzenie używane do dowodów przetrwania torusów niezmienniczych. Dla naszych zastosowań w ograniczonym problemie trzech ciał wystarczy, że skupimy się na odwzorowaniu symplektycznym na pierścieniu.

Twierdzenie 1.2 (KAM). [12, Twierdzenie 4.8] *Niech $g : [0, 1] \times \mathbb{T}^1 \rightarrow [0, 1] \times \mathbb{T}^1$ będzie dokładnie symplektycznym (ang. exact symplectic) odwzorowaniem klasy C^l , dla $l \geq 6$. Załóżmy, że $g = g_0 + \varepsilon g_1$, gdzie $\varepsilon \in \mathbb{R}$,*

$$g_0(I, \varphi) = (I, \varphi + A(I)),$$

A jest C^l , $|\frac{dA}{dI}| \geq M$ oraz $\|g_1\|_{C^l} \leq 1$. Wtedy dla każdego dostatecznie małego ε dla zbioru liczb diofantycznych σ o wykładniku $\theta = (\frac{5}{4})^6$, istnieją niezmiennicze torusy, względem odwzorowania g_ε , które są wykresami funkcji klasy C^{l-3} zależącej od φ , $u_\sigma = u_\sigma(\varphi)$, a ruch na nich jest C^{l-3} -sprzężony do rotacji przez σ . Co więcej, torusy niezmiennicze tworzą zbiór Cantora, który pokrywa cały pierścień poza zbiorem o mierze mniejszej niż $O(M^{-1}\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$.

1.4. Mechanizm dyfuzji

Następujące twierdzenie jest głównym narzędziem wykorzystanym do otrzymania mechanizmu dyfuzji. Jest to tak zwane twierdzenie śledzące (ang. *shadowing lemma*).

Twierdzenie 1.3. [19] *Złóżmy, że $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest dostatecznie gładkim odwzorowaniem, $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ jest normalnie hiperboliczną rozmaitością niezmienniczą mającą stabilną i niestabilną rozmaitość, które przecinają się transversalnie wzdłuż kanału homoklinicznego $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, oraz σ jest odwzorowaniem rozpraszającym odpowiadającym Γ .*

Złóżmy, że f zachowuje miarę absolutnie ciągłą względem miary Lebesgue'a na Λ oraz σ przekształca zbiory o dodatniej mierze w zbiory o dodatniej mierze. Niech $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ będzie ustalonym ciągiem liczb. Niech $\{x_i\}_{i=0, \dots, n}$ będzie skończoną pseudo-orbitą w Λ , w postaci

$$x_{i+1} = f^{m_i} \circ \sigma(x_i), \quad i = 0, \dots, n-1, n \geq 1, \quad (1.10)$$

zawartą w pewnym otwartym zbiorze $\mathcal{U} \subset \Lambda$ z prawie każdym punktem z $\mathcal{U}$ powracającym dla $f|_{\Lambda}$. Punkty $\{x_i\}_{i=0, \dots, n}$ nie muszą być powracające same w sobie.

Wtedy dla każdego $\delta > 0$ istnieje orbita $\{z_i\}_{i=0, \dots, n}$ dla odwzorowania f w $\mathbb{R}^n$, gdzie

$$z_{i+1} = f^{k_i}(z_i)$$

dla pewnego $k_i > 0$, taka że $d(z_i, x_i) < \delta$ dla każdego $i = 0, \dots, n$.

Uwaga 1.4. Powyższy wynik można rozszerzyć na przypadek, kiedy mamy skończoną ilość odwzorowań rozpraszających $\sigma_1, \dots, \sigma_L$ do śledzenia orbity

$$x_{i+1} = f^{m_i} \circ \sigma_{\alpha_i}(x_i), \quad i = 0, \dots, l-1, l \geq 1,$$

dla dwóch ciągów $m_1, \dots, m_l \in \mathbb{N}$ oraz $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in \{1, \dots, L\}$; (patrz [19, Twierdzenie 3.7]).

Dla ograniczonego problemu trzech ciał Λ będzie normalnie hiperbolicznym cylindrem bez brzegu. Oznacza to, że nie będzie rozmaitością zwartą. Aby uzyskać zwartość zanurzymy ją w dwuwymiarowym torusie. Będzie to możliwe dzięki konstrukcji przedstawionej w sekcji 1.4.2.

Uwaga 1.5. Gdy Λ ma skończoną miarę i f jest odwzorowaniem zachowującym miarę na Λ , to na podstawie twierdzenia rekurencyjnego Poincaré [22] możemy przyjąć $\mathcal{U} = \Lambda$.

Twierdzenie 1.3 będzie przez nas wykorzystane w następujący sposób. Będziemy rozważać układ zachowujący pewną zmienną. W układach hamiltonowskich tą zachowywaną zmienną jest energia. Naszym celem będzie pokazanie, że pod wpływem dowolnie małych perturbacji zaburzone odwzorowanie traci zasadę zachowania a zachowywana wcześniej zmienna będzie mogła ulegać makroskopowym zmianom, niezależnym od rozmiarów perturbacji. Tego typu własność będziemy nazywać własnością dyfuzji. Własność dyfuzji będzie przez nas dowodzona poprzez wykazanie, że zachodzi ona dla pseudo-orbit postaci (1.10). Twierdzenie 1.3

zagwarantuje, że jeśli wykażemy istnienie dyfuzji dla pseudo-orbit, to występuje ona również dla prawdziwych trajektorii układu.

1.4.1. Dyfuzja dla dyskretnych układów dynamicznych

W tej części pracy przywołamy wyniki z pracy [10]. Bazują one na [19], ale są one podane w formie, dzięki której można na ich podstawie przeprowadzać komputerowo wspierane dowody dyfuzji.

Niech

$$f_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2$$

będzie rodziną gładkich odwzorowań, które są gładko parametryzowane przez $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Zmienne w których będziemy pracować będą oznaczone jako $(u, s, I, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2$. Zmienne u i s odpowiadają niestabilnej i stabilnej współrzędnej dla Λ_0 oraz T, θ będą odpowiadały za „centralny” kierunek.

Zakładamy, że dla $\varepsilon = 0$ współrzędna I nie zmienia się pod działaniem odwzorowania, to znaczy

$$\pi_I f_0(z) = \pi_I z \quad \text{dla każdego } z \in \mathbb{R}^n. \quad (1.11)$$

Zakładamy również, że

$$\Lambda_0 = \{(u, s, I, \theta) : u = s = 0, I \in \mathbb{T}, \theta \in \mathbb{T}\} \quad (1.12)$$

jest normalnie hiperboliczną rozmaitością niezmienniczą dla odwzorowania f_0 . Załóżmy, że Λ_0 jest dwuwymiarowym torusem, stąd jest zwartą rozmaitością bez brzegu.

Na mocy twierdzenia o normalnie hiperbolicznej rozmaitości niezmienniczej [16–18, 23] dla dostatecznie małych ε rozmaitość Λ_0 zostanie perturbowana $O(\varepsilon)$ bliskiej rozmaitości Λ_ε , niezmienniczej dla f_ε . Będziemy zakładać, że f_ε zachowuje miarę na Λ_ε .

Zdefiniujmy funkcję $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{T}$ następująco

$$\begin{aligned} g(0, x) &:= \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial \varepsilon}(x)|_{\varepsilon=0}, \\ g(\varepsilon, x) &:= \frac{1}{\varepsilon} (f_\varepsilon(x) - f_0(x)) \quad \text{dla } \varepsilon \neq 0. \end{aligned}$$

Wtedy

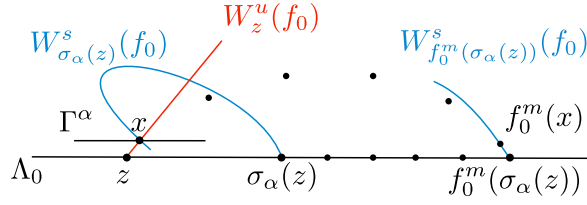
$$f_\varepsilon(x) = f_0(x) + \varepsilon g(\varepsilon, x).$$

Poniższe twierdzenie, które przytoczymy zadaje warunki, dla których dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ istnieje punkt x_ε oraz liczba iteracji n_ε dla których

$$\pi_I(f_\varepsilon^{n_\varepsilon}(x_\varepsilon) - x_\varepsilon) > 1. \quad (1.13)$$

Najpierw wprowadzimy definicję.

Rozważmy topologię na $\Lambda_0 \cap \{I \in [0, 1]\}$ indukowaną przez Λ_0 . Przypomnijmy, że torus jest 2π -okresowy, zatem $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi$. Wtedy $[0, 1]$ jest domkniętym przedziałem w $\mathbb{T}$.



Rysunek 1.1. Zobrazowanie założeń Twierdzenia 1.7. [10]

Definicja 1.6. Mówimy, że zbiór otwarty $S \subset \Lambda_0 \cap \{I \in [0, 1]\}$ jest paskiem w Λ_0 , jeżeli

$$S \cap \{z \in \Lambda_0 : \pi_I z = \eta\} \neq \emptyset \quad \text{dla każdego } \eta \in [0, 1].$$

Poniższe twierdzenie daje nam warunki pod którymi mamy pewność, że pod wpływem dowolnie małej perturbacji $\varepsilon > 0$ będziemy mieć makroskopowy wzrost na zmiennej I . Intuicja dla założeń poniższego twierdzenia znajduje się w Rysunku 1.1.

Twierdzenie 1.7. [10] Załóżmy, że mamy otoczenie U zbioru Λ_0 oraz stałą $L_g > 0$ taką, że dla każdego $z \in \Lambda_0, x_u \in W_z^u(f_0, U), x_s \in W_z^s(f_0, U)$,

$$\begin{aligned} |\pi_I(g(0, x_u) - g(0, z))| &\leq L_g \|x_u - z\|, \\ |\pi_I(g(0, x_s) - g(0, z))| &\leq L_g \|x_s - z\|. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Założmy, że istnieją stałe $C > 0, 0 < \lambda < 1$ takie, że dla każdego $z \in \Lambda_0$ i każdego punktu $x_u \in W_z^u(f_0, U), x_s \in W_z^s(f_0, U)$ zachodzi

$$\begin{aligned} \|f_0^n(z) - f_0^n(x_u)\| &< C\lambda^{|n|} \quad \text{for all } n \leq 0, \\ \|f_0^n(z) - f_0^n(x_s)\| &< C\lambda^n \quad \text{for all } n \geq 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Założmy również, że dla $\varepsilon = 0$ mamy ciąg odwzorowań rozpraszających $\sigma_\alpha : \text{dom}(\sigma_\alpha) \rightarrow \Lambda_0$ dla $\alpha = 1, \dots, L$. Niech $S^+ \subset \Lambda_0$ będzie paskiem. Załóżmy, że dla każdego $z \in \bar{S}^+$

1. istnieje $\alpha \in \{1, \dots, L\}$ dla którego $z \in \text{dom}(\sigma_\alpha)$, oraz istnieje stała $m \in \mathbb{N}$ taka, że

$$f_0^m \circ \sigma_\alpha(z) \in S^+, \quad (1.16)$$

2. istnieje punkt $x \in W_z^u(f_0, U) \cap W_{\sigma_\alpha(z)}^s(f_0)$ taki, że $f_0^m(x) \in W_{f_0^m(\sigma_\alpha(z))}^s(f_0, U)$ oraz zachodzi

$$\sum_{j=0}^{m-1} \pi_I g(0, f_0^j(x)) - \frac{1+\lambda}{1-\lambda} L_g C > 0. \quad (1.17)$$

(Wybór m i α może zależeć od z .)

Wtedy dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ istnieje x_ε oraz $n_\varepsilon > 0$ takie, że

$$\pi_I(f_\varepsilon^{n_\varepsilon}(x_\varepsilon) - x_\varepsilon) > 1. \quad (1.18)$$

Następne twierdzenie, analogiczne do poprzedniego, może być wykorzystane do znalezienia orbit układu perturbowanego, których współrzędna I zmniejsza swoją wartość.

Twierdzenie 1.8. [10] Załóżmy, że spełnione są warunki (1.14) i (1.15) oraz dla $\varepsilon = 0$ mamy ciąg odwzorowań rozpraszających $\sigma_\alpha : \text{dom}(\sigma_\alpha) \rightarrow \Lambda_0$ dla $\alpha = 1, \dots, L$. Niech $S^- \subset \Lambda_0$ będzie paskiem. Załóżmy, że dla każdego $z \in S^-$

1. istnieje $\alpha \in \{1, \dots, L\}$ dla którego $z \in \text{dom}(\sigma_\alpha)$, oraz istnieje stała $m \in \mathbb{N}$ taka, że

$$f_0^m \circ \sigma_\alpha(z) \in S^-,$$

2. istnieje punkt $x \in W_z^u(f_0, U) \cap W_{\sigma_\alpha(z)}^s(f_0)$ taki, że $f_0^m(x) \in W_{f_0^m(\sigma_\alpha(z))}^s(f_0, U)$ oraz zachodzi

$$\sum_{j=0}^{m-1} \pi_I g(0, f_0^j(x)) + \frac{1+\lambda}{1-\lambda} L_g C < 0.$$

(Wybór m i α może zależeć od z .)

Wtedy dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ istnieje x_ε i $n_\varepsilon > 0$ takie, że

$$\pi_I(x_\varepsilon - f_\varepsilon^{n_\varepsilon}(x_\varepsilon)) > 1. \quad (1.19)$$

Jeśli rozważymy oba paski S^+ i S^- będziemy mogli śledzić dowolny ustalony ciąg współrzędnej I . Podamy twierdzenie, które będzie ważnym narzędziem przy dowodzie głównego wyniku tej rozprawy.

Twierdzenie 1.9. [10] Załóżmy, że paski S^+ i S^- spełniają odpowiednio założenia Twierdzenia 1.7 i 1.8. Jeśli dodatkowo

1. dla każdego $z \in \overline{S^+}$ istnieje takie n , które może zależeć od z , dla którego $f_0^n(z) \in S^-$,
2. dla każdego $z \in \overline{S^-}$ istnieje takie n , które może zależeć od z , dla którego $f_0^n(z) \in S^+$,

to istnieje $\mathcal{M}$ takie, że dla każdego ustalonego ciągu $\{I_k\}_{k=0}^N$ i ustalonego $\delta > 0$, dla dostatecznie małego ε istnieje orbita dla f_ε , która $\varepsilon\mathcal{M}$ -śledzi I_k ; to znaczy istnieje punkt z_0^ε i ciąg liczb $n_1^\varepsilon \leq n_2^\varepsilon \leq \dots \leq n_N^\varepsilon$ takie, że

$$\left\| \pi_I f_\varepsilon^{n_k^\varepsilon}(z_0^\varepsilon) - I_k \right\| < \varepsilon \mathcal{M}. \quad (1.20)$$

1.4.2. Dyfuzja dla okresowych perturbacji układów hamiltonowskich

Rozważmy następującą rodzinę układów hamiltonowskich $H_\varepsilon : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ parametryzowaną przez $\varepsilon \in \mathbb{R}$ w sposób gładki, która generuje następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych w rozszerzonej przestrzeni fazowej

$$\begin{aligned} x' &= J \nabla_x H_\varepsilon(x, t), \\ t' &= 1, \end{aligned} \quad (1.21)$$

gdzie

$$J = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -Id & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{dla} \quad Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Niech Φ_t^ε będzie potokiem dla (1.21). Dla nas H_0 będzie Hamiltonianem układu przed perturbacją, a H_ε dla $\varepsilon > 0$ będzie Hamiltonianem układu po perturbacji. Zakładamy, że

$$H_{\varepsilon=0}(x, t) = H(x),$$

gdzie $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$; to znaczy zakładamy, że układ bez perturbacji jest autonomiczny, a co za tym idzie H jest całkowitą pierwszą układu.

Rozważmy lokalną sekcję Poincarégo Σ w $\mathbb{R}^4$ dla układu $x' = J\nabla H(x)$ oraz sekcję $\tilde{\Sigma} = \Sigma \times \mathbb{T}$ w perturbowanym układzie (1.21) w rozszerzonej przestrzeni fazowej. Rozważmy rodzinę odwzorowań Poincarégo

$$f_\varepsilon : \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{\Sigma}, \quad (1.22)$$

zdefiniowanych jako

$$f_\varepsilon(x, t) := \Phi_{\tau(\varepsilon, x, t)}^\varepsilon(x, t)$$

gdzie

$$\tau(\varepsilon, x, t) := \inf\{s > 0 : \Phi_s^\varepsilon(x, t) \in \tilde{\Sigma}\}.$$

Jako, że nasz układ jest hamiltonowski, odwzorowanie f_ε jest symplektyczne z odpowiednią formą symplektyczną ω_ε na $\tilde{\Sigma}$. Współrzędne na $\tilde{\Sigma}$ możemy utożsamiać z $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{T}$.

Przyjmijmy teraz oznaczenie $\theta \in \mathbb{T}$ jako współrzędną czasową w rozszerzonej przestrzeni fazowej. Dzięki temu pisząc $\Phi_t^\varepsilon(x, \theta)$ będziemy rozróżniać podwójną rolę, którą spełnia rozszerzona współrzędna: czasu t oraz chwili początkowej dla całkowania θ .

Jako jedną ze współrzędnych na $\tilde{\Sigma}$ będziemy przyjmować energię, która jest wyrażona za pomocą Hamiltonianu $H = H_0$. Tą współrzędną będziemy oznaczać jako I . Dla $\varepsilon = 0$, ponieważ układ jest autonomiczny, mamy zasadę zachowania energii, zatem

$$\pi_I f_0(z) = \pi_I z \quad \text{dla wszystkich } z \in \tilde{\Sigma}.$$

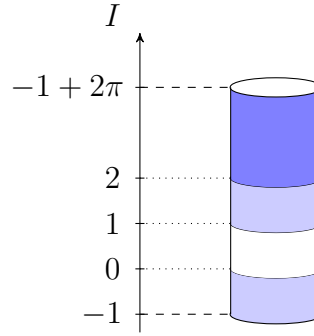
Zakładamy, że dla $\varepsilon = 0$ odwzorowanie $f_{\varepsilon=0}$ ma normalnie hiperboliczną rozmaitość niezmienniczą $\Lambda_0 \subset \tilde{\Sigma}$. Zakładamy, że Λ_0 jest parametryzowane przez θ, I . Pozostałe dwie współrzędne na $\tilde{\Sigma}$ będziemy oznaczać jako u oraz s . Zakładamy, że zachodzi

$$\Lambda_0 = \{(u, s, I, \theta) : u = s = 0, I \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{T}\},$$

oraz że $\omega_{\varepsilon=0}|_{\Lambda_0}$ jest niezdegenerowana.

Rozmaitość Λ_0 jest cylindrem, ale naszym celem jest udowodnić, że po perturbacji mamy zmianę w energii $H = I$ dla $I \in [0, 1]$. Przedstawimy teraz podobną konstrukcję do tej opisanej w [7] w której zanurzymy $\Lambda_0 \cap \{I \in [0, 1]\}$ w torusie. To pozwoli nam zakładać, że Λ_0 jest torusem.

Konstrukcja polega na tym, że dla $I \in [0, 1]$ przyjmujemy wszystko bez zmian. Następnie wprowadzamy sztuczną modyfikację układu, tak aby na brzegach $I \in$



Rysunek 1.2. Na rysunku został zobrazowany wyjściowy fragment dla $I \in [-1, -1 + 2\pi]$. Dzięki funkcji typu „bump” przechodzimy płynnie między obszarami oraz sklejamy cylinder w torus utożsamiając ze sobą końce $I = -1 \bmod 2\pi$ [10].

$[-1, 2]$, to znaczy dla $I = 2$ i $I = -1$ była spełniona równość $\tilde{f}_\varepsilon = f_0$. Na pozostałym fragmencie, czyli dla $I \notin (-1, 2)$ „zatrzymamy” układ dla danej wartości $\tilde{f}_\varepsilon = f_0$. Jeśli rozważymy układ dla $I \in \mathbb{R}/2\pi$ to będzie on sklejony końcami, tj. utożsamiany ze sobą w ten sposób koniec $I = -1$ oraz $I = -1 + 2\pi$. To sprawia, że Λ_0 staje się torusem. Schematyczna konstrukcja została przedstawiona na Rysunku 1.4.2.

Dokładniej, rozważamy gładką funkcję¹ $b : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ dla której

$$\begin{aligned} b(I) &= 0 & \text{for } I \in \mathbb{R} \setminus (-1, 2), \\ b(I) &= 1 & \text{for } I \in [0, 1], \end{aligned}$$

oraz odwzorowanie $\tilde{f}_\varepsilon$ jako odwzorowanie Poincarégo dla zmodyfikowanego układu opisanego za pomocą

$$x' = J\nabla_x (H(x) + b(H(x))(H_\varepsilon(x, t) - H(x))).$$

Otrzymujemy następujący lemat

Lemat 1.10. [10, Lemat 35] *Jeśli dla $\tilde{f}_\varepsilon|_{\Lambda_\varepsilon}$ mamy zbiór Cantora KAM-torusów niezmienniczych na Λ_ε , oraz spełnione są założenia Twierdzenia 1.7 (lub odpowiednio założenia Twierdzenia 1.8, Twierdzenia 1.9) dla $\tilde{f}_\varepsilon$, to istnieje x_ε dla którego spełnione są warunki (1.18) (lub odpowiednio warunki (1.19), (1.20)) dla f_ε .*

Dzięki temu, że operujemy $\tilde{f}_\varepsilon$ możemy traktować Λ_0 jako zwartą rozmaitość bez brzegu. (Ściśle rzecz biorąc Λ_0 jest dwuwymiarowym torusem.) Zatem możemy posłużyć się standardową wersją twierdzenia o normalnie hiperbolicznej rozmaitości niezmienniczej [23]. Co więcej, na mocy Uwagi 1.5 dostajemy rekurencyjność na Λ , która jest potrzebna do spełnienia założeń Twierdzenia 1.3.

¹ Przykładowo może to być $b(x) = \exp(-(1 - x^2)^{-1} + 1)$ dla $x \in [-1, 0]$, $b(x) = 1$ dla $x \in [0, 1]$, $b(x) = \exp(-(1 - (1 - x)^2)^{-1} + 1)$ dla $x \in [1, 2]$ oraz 0 wpp.

1.5. Ograniczony problem trzech ciał

Eliptyczny ograniczony problem trzech ciał na płaszczyźnie (PER3BP; ang Planar Elliptic Restricted Three Body Problem) opisuje ruch punktu, którego masa jest zaniedbywalna (na przykład asteroidy lub satelity, którego masa jest bardzo mała w stosunku do mas pozostałych obiektów w układzie - na przykład planet) pod wpływem grawitacji dwóch dużych obiektów - ciał niebieskich. Zakładamy, że poruszają się one po płaszczyźnie wzdłuż eliptycznych orbit Keplera o mimośrodku ε . Punkt pozbawiony masy porusza się w tej samej płaszczyźnie i nie ma żadnego znaczącego wpływu na orbity dużych ciał.

Możemy przeskalować wielkości tak, aby masy dwóch większych obiektów były równe μ oraz $1 - \mu$. Będziemy rozważali taki układ współrzędnych, który „kręci się” razem z większymi ciałami. Nasz układ współrzędnych rotując wraz z nimi „pulsuje” tak, aby odległość między dwoma dużymi ciałami była stale równa jeden, oraz tak, aby ich położenia były ustalone i znajdowały się na osi x [28]. W naszej pracy będziemy rozważać współczynnik μ , który odpowiada układowi Słońce–Jowisz. Oznacza to, że μ to znormalizowana masa Jowisza a $1 - \mu$ to znormalizowana masa Słońca.

W takim układzie współrzędnych trajektoria punktu materialnego jest opisana za pomocą następującego Hamiltonianu $H_\varepsilon : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} H_\varepsilon(X, Y, P_X, P_Y, \theta) &= \frac{(P_X + Y)^2 + (P_Y - X)^2}{2} - \frac{\Omega(X, Y)}{1 + \varepsilon \cos(\theta)}, \\ \Omega(X, Y) &= \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) + \frac{(1 - \mu)}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}, \\ r_1^2 &= (X - \mu)^2 + Y^2, \\ r_2^2 &= (X - \mu + 1)^2 + Y^2. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Równania Hamiltona mają postać

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\theta} &= \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial P_X}, & \frac{dP_X}{d\theta} &= -\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial X}, \\ \frac{dY}{d\theta} &= \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial P_Y}, & \frac{dP_Y}{d\theta} &= -\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial Y}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

gdzie $X, Y \in \mathbb{R}$ są współrzędnymi położenia punktu materialnego, oraz $P_X, P_Y \in \mathbb{R}$ są odpowiednio pędami dla współrzędnych.

Przyjmujemy konwencję, że we współrzędnych X, Y Jowisz leży na lewo od środka układu współrzędnych, w punkcie $(\mu - 1, 0)$, oraz Słońce jest na prawo od środka układu współrzędnych w punkcie $(\mu, 0)$. Zmienna $\theta \in \mathbb{T}$ jest dla nas anomalią prawdziwą orbit Keplera dużych ciał, gdzie $\mathbb{T}$ jest jednowymiarowym torusem.

Układ jest nieautonomiczny, zatem rozważamy go w rozszerzonej przestrzeni fazowej. Ma ona 5 wymiarów, gdzie θ jest niezależną zmienną. Potok fazowy (1.24) będziemy oznaczać jako Φ_t^ε w rozszerzonej przestrzeni, która uwzględnia $\theta \in \mathbb{T}$, to znaczy

$$\Phi_t^\varepsilon : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \mathbb{T}^1.$$

Gdy $\varepsilon = 0$ ciała niebieskie poruszają się po orbitach kołowych. Oznacza to, że problem eliptyczny zamienia się na kołowy ograniczony problem trzech ciał na płaszczyźnie (PCR3BP; ang. Planar Circular Restricted Three Body Problem). Jest tak gdyż mimośród $\varepsilon = 0$ oznacza kołową orbitę Keplerowską dwóch dużych mas. Potok fazowy kołowego problemu będziemy oznaczać Φ_t . Układ ten jest autonomiczny, zatem nie rozważamy go w rozszerzonej przestrzeni fazowej, co oznacza że dla $t \in \mathbb{R}$

$$\Phi_t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4.$$

Warto zauważyć, że zachodzi $\Phi_t(x) = \pi_x \Phi_t^0(x, \theta)$ (dla $\varepsilon = 0$ prawa strona nie zależy od wyboru θ).

W problemie kołowym układ posiada symetrię z odwracaniem czasu

$$\mathcal{R} \circ \Phi_t = \Phi_{-t} \circ \mathcal{R}, \quad (1.25)$$

gdzie

$$\mathcal{R}(X, Y, P_X, P_Y) = (X, -Y, -P_X, P_Y).$$

Mówimy, że orbita $x(t)$ jest $\mathcal{R}$ -symetryczna jeśli

$$x(-t) = \mathcal{R}(x(t)).$$

Zauważmy, że jeśli punkt startowy dla orbity symetrycznej ma znajdować się na sekcji $\{Y = 0\}$, to takie orbity powinny spełniać własność $\pi_Y x(0) = \pi_{P_X} x(0) = 0$.

Energia H_0 jest niezmiennikiem ruchu dla układu przed perturbacją, czyli gdy $\varepsilon = 0$. Będziemy przyjmować H_0 jako jedną ze współrzędnych na $\tilde{\Sigma}$ stosując zapis

$$I(x) := H_0(x).$$

Wiemy, że dla $\varepsilon = 0$ mamy $I(\Phi_t(x)) = I(x)$. Celem naszej pracy będzie pokazanie, że dla dowolnie małego $\varepsilon > 0$, w spertubowanym układzie występują makroskopowe zmiany I , których rozmiar jest niezależny od ε .

Rozdział 2

Główny wynik rozprawy

Głównym wynikiem tej rozprawy jest wynik uzyskany w pracy [11]. Sformujemy poniżej nasze główne Twierdzenie 2.1, którego dowód zostanie przedstawiony w kolejnym rozdziale.

Ograniczony kołowy problem trzech ciał (PCR3BP) ma pięć punktów libracyjnych (zwanymi też punktami Lagrange’a). Trzy z nich leżą na $\{Y = 0\}$, nazywamy je współliniowymi i oznaczamy jako L_1, L_2, L_3 . Jeden z tych punktów, który oznaczmy jako L_1 leży pomiędzy Słońcem a Jowiszem. Wokół tego punktu znajduje się rodzina okresowych *orbit Lyapunova* [27].

Każda z orbit Lyapunova ma inną wartość energii. Są one $\mathcal{R}$ -symetryczne i możemy wybrać punkt z takiej orbity w postaci $(X, 0, 0, P_X)$, wybierając odpowiednio X oraz P_X . Współrzędna P_X zależy od wyboru X , zatem będziemy stosować zapis $P_X = P_X(X)$. Zwróćmy uwagę, że indeks dolny pochodzi od oznaczenia pędu związanego ze współrzędną położenia X , a zależność w nawiasie oznacza zależność wyboru wartości.

Rozważane przez nas orbity będą parametryzowane przez X . Od teraz będziemy stosować zapis $\mathcal{X} \in \mathbb{R}$ aby wyróżnić, że mamy na myśli wartości $X = \mathcal{X}$, które determinują nam wybór punktu na orbicie Lyapunova $(\mathcal{X}, 0, 0, P_X(\mathcal{X}))$. W ten sposób rozróżnimy wartości $\mathcal{X}$, które parametryzują orbitę od współrzędnej X . W naszych rozważaniach bierzemy pod uwagę rodzinę orbit Lyapunova dla której

$$\mathcal{X} \in [-0.95, -0.95 + 10^{-9}]. \quad (2.1)$$

Energia takich orbit, wyrażona całką Jacobiego, jest równa około 3.03. Jest to wartość energii dla komety Oterma [27], która została zaobserwowana w układzie Jowisz-Słońce. Pracujemy z taką wartością energii, ponieważ ma ona znaczenie fizyczne, wiąże się z zaobserwowanym ciałem niebieskim, ale moglibyśmy wybrać inny przedział wartości dla $\mathcal{X}$ niż (2.1). Wybranie innego przedziału mogłoby ułatwić pewne aspekty dowodu wspieranego komputerowo (więcej na ten temat w

Uwagze 3.24). Wybieramy wartość energii znaną dla fizycznego obiektu aby pokazać, że metodę można zastosować dla zadanego konkretnego poziomu energii, i że nie musimy sztucznie dobierać parametrów żeby współpracowały z naszą metodą.

Dla każdego $\mathcal{X}$ z przedziału (2.1) odpowiadająca orbita Lyapunova ma inną wartość energii $I(\mathcal{X})$. Pokażemy, że dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$, to znaczy dla układu eliptycznego, możemy przejść przez dowolne wartości $I(\mathcal{X})$ dla $\mathcal{X}$ z przedziału (2.1). Będziemy nazywali je orbitami dyfuzyjnymi (ang. *diffusing orbits*). Zapiszemy teraz wynik w postaci formalnego twierdzenia.

Twierdzenie 2.1. [11] *Niech $I(\mathcal{X})$ oznacza energię orbity Lyapunova startującą z zadanego punktu, to znaczy*

$$I(\mathcal{X}) = H_0(\mathcal{X}, 0, 0, P_X(\mathcal{X})).$$

Istnieje stała $\mathcal{M} > 0$ taka, że dla dowolnego skończonego ciągu wartości $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_N$ z przedziału (2.1) oraz dostatecznie małego $\varepsilon > 0$, istnieje ciąg (wartości czasów) $t_1^\varepsilon, \dots, t_N^\varepsilon$ oraz punkt x^ε taki, że

$$\left\| H_0\left(\Phi_{t_i^\varepsilon}^\varepsilon(x^\varepsilon)\right) - I(\mathcal{X}_i) \right\| < \varepsilon \mathcal{M} \quad \text{dla } i = 1, \dots, N.$$

Przedział, który wybraliśmy (2.1) jest niewielki. W rzeczywistości fizyczna odległość pomiędzy dwoma punktami na orbitach Lyapunova na $\{Y = 0\}$, które odpowiadają końcom przedziału to około 1 km. Oznacza to, że dyfuzja jest na bardzo wąskim przedziale, ale nie jest zaniedbywalna.

Dowód został przeprowadzony z pomocą komputera i dla przedziału (2.1) obliczenia zajęły 17 minut, uruchomione na jednym wątku standardowego laptopa. Taki dowód wspierany komputerowo mógłby zostać wykonany również dla innych, szerszych przedziałów wartości $\mathcal{X}$, co sprawiłoby że otrzymalibyśmy dyfuzję na dłuższej odległości. Taki dowód mógłby być wykonany dla równoczesnych obliczeń na klastrze. Nas bardziej interesowała idea i matematyczne aspekty dowodu oraz pokazanie, że metoda ma zastosowania, niż „siłowe” równoległe obliczenia żeby uzyskać jak największe przedziały dyfuzji. Dlatego nie angażowaliśmy się w takie obliczenia.

Dowód głównego twierdzenia

Opisana w tym rozdziale konstrukcja z dowodem jest na podstawie pracy [11], zatem nie będziemy oznaczać każdorazowo lematów, wniosków i wyników numerycznych cytowaniem.

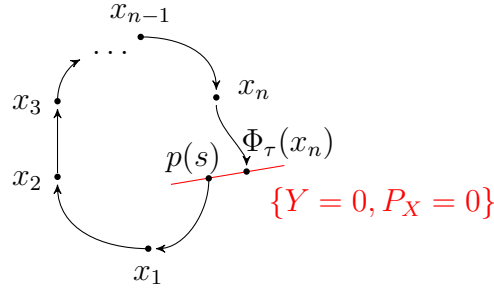
Dowód zostanie przeprowadzony w następujących krokach:

1. dowód istnienia i oszacowanie rodziny orbit Lyapunova, które tworzą normalnie hiperboliczną rozmaitość niezmienniczą Λ_0 ,
2. oszacowanie lokalnej stabilnej i niestabilnej rozmaitości Λ_0 ,
3. dowód na to, że rozmaitości stabilna i niestabilna Λ_0 przecinają się transwersalnie oraz, że mamy kanał homokliniczny wzdłuż tego przecięcia,
4. dowód, że dla małego $\varepsilon > 0$ rozmaitość Λ_0 przetrwa pod wpływem perturbacji i staje się rozmaitością Λ_ε , która zawiera zbiór Cantora KAM-torusów,
5. uzyskanie orbit dyfuzyjnych za pomocą Twierdzenia 1.9.

W rozdziale 3.1 opiszemy metodę strzałów równoległych (ang. *parallel shooting*), którą użyjemy następnie do dowodu powyżej wspomnianych punktów 1 i 3. w podrozdziale 3.2 oraz 3.4. W podrozdziałach 3.3, 3.5 i 3.6 zostały opisane odpowiednio kroki 2, 4 i 5.

3.1. Metoda strzałów równoległych dla orbit symetrycznych

Rozważmy kołowy problem trzech ciał (PCR3BP). Nasz potok jest oznaczony jako Φ_t i zdefiniowany w $\mathbb{R}^4$. Rozważmy funkcję $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ klasy C^1 . Na razie nie precyzujemy jaka to jest funkcja. W zależności od kontekstu będziemy dobierać stosowną funkcję p . Dobierzemy dwie różne funkcje p w sekcjach 3.2 oraz 3.4. Jedną do dowodu i uzyskania oszacowań na rodzinę orbit Lyapunova w sekcji 3.2, oraz drugą dla dowodu przecięcia się rozmaitości stabilnych i niestabilnych orbit Lyapu-



Rysunek 3.1. Metoda strzałów równoległych.

nova w sekcji 3.4. Metoda dla obu zastosowań jest jednak wspólna i przedstawiamy ją w tej sekcji.

Zdefiniujmy funkcję

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^4 \times \dots \times \mathbb{R}^4}_n \rightarrow \underbrace{\mathbb{R}^4 \times \dots \times \mathbb{R}^4}_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

w następujący sposób

$$F(s, \tau, x_1, \dots, x_n) := (\Phi_\tau(p(s)) - x_1, \Phi_\tau(x_1) - x_2, \dots, \Phi_\tau(x_{n-1}) - x_n, \pi_Y \Phi_\tau(x_n), \pi_{P_X} \Phi_\tau(x_n)). \quad (3.1)$$

Zauważmy, że jeśli znajdziemy punkt $\mathbf{x}^* = (s, \tau, x_1, \dots, x_n)$ dla którego

$$F(\mathbf{x}^*) = 0, \quad (3.2)$$

to biorąc $x_0 = p(s)$ i $x_{n+1} = \Phi_\tau(x_n)$ otrzymujemy

$$\Phi_\tau(x_i) = x_{i+1} \quad \text{for } i = 0, \dots, n.$$

Oznacza to, że uzyskana orbita startuje w x_0 i kończy się w x_{n+1} . Ponadto, skoro

$$\pi_Y x_{n+1} = \pi_Y \Phi_\tau(x_n) = 0, \quad \pi_{P_X} x_{n+1} = \pi_{P_X} \Phi_\tau(x_n) = 0,$$

to x_{n+1} jest punktem $\mathcal{R}$ -symetrycznym względem siebie, czyli $x_{n+1} = \mathcal{R}(x_{n+1})$. Idea została zobrazowana na Rysunku 3.1. Jeśli teraz zdefiniujemy

$$x_{n+k} = \mathcal{R}(x_{n+2-k}), \text{ dla } k = 2, \dots, n+2$$

to z (1.25) otrzymamy $\mathcal{R}$ -symetryczną orbitę $x(t)$, która startuje z punktu $x(0) = x_0$, i dla której zachodzi

$$\Phi_\tau(x_i) = x_{i+1} \quad \text{for } i = 0, \dots, 2n+1.$$

Aby rozwiązać równanie (3.2) możemy użyć metody Krawczyka opisanej w podrozdziale 1.1. Aby to zrobić, najpierw uzyskujemy przybliżenie rozwiązania (3.2) poprzez iterowanie operatora Newtona (przy użyciu nieściśłych obliczeń)

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - (DF(\mathbf{x}_i))^{-1} F(\mathbf{x}_i). \quad (3.3)$$

Po kilku iteracjach (3.3) otrzymujemy punkt $\mathbf{x}$, wokół którego konstruujemy wielowymiarową kostkę $\mathbf{X}$ o środku w punkcie $\mathbf{x}$. Następnie, za pomocą Twierdzenia 1.1 sprawdzamy czy rozwiązanie (3.2). Stosując Twierdzenie 1.1 możemy przyjąć C jako nieściśle obliczone przybliżenie $(DF(\mathbf{x}))^{-1}$.

n	X	Y	P_X	P_Y
0	-0.9499999995	0	0	-0.84134724633
1	-0.95011002908	0.010872319337	-0.012750492306	-0.84566628682
2	-0.95027977734	0.020942127841	-0.021798848297	-0.85701977629
3	-0.95016249921	0.02964511208	-0.02595601236	-0.87222441368
4	-0.94945269037	0.036681290981	-0.026117965229	-0.88881047965
5	-0.94799596417	0.041912835694	-0.023738329652	-0.90554260324
6	-0.94578584443	0.045275924414	-0.020027448005	-0.92194698888
7	-0.94292354313	0.046741951127	-0.015815875271	-0.93784624844
8	-0.93958019632	0.046310536541	-0.011642040196	-0.9531124603
9	-0.93596962345	0.044016227704	-0.0078569213076	-0.96756323289
10	-0.93232909834	0.039939546482	-0.0046935571959	-0.98092506113
11	-0.92890403848	0.034218254755	-0.0022984843476	-0.99282861416
12	-0.92593321085	0.027056429274	-0.00073280826007	-1.0028268728
13	-0.92363228182	0.018728871729	4.5125264188e-05	-1.0104387689
14	-0.92217533629	0.0095779013399	0.00019712976878	-1.0152203731
15	-0.92167641746	0	0	-1.0168530766

Tablica 3.2. Punkty środkowe dla otoczki przedziałowej punktów, przez które przechodzi rodzina orbit Lyapunova.

3.2. Oszacowania orbit Lyapunova

Niech wartość $\mathcal{X} \in \mathbb{R}$ będzie ustalona. Dla ustalonego $\mathcal{X}$ definiujemy funkcję $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ w następujący sposób

$$p(s) = (\mathcal{X}, 0, 0, s). \quad (3.4)$$

Wtedy używając metody z podrozdziału 3.1 otrzymamy ciąg punktów $x_0, \dots, x_{2n+2}$ wzdłuż $\mathcal{R}$ -symetrycznej orbity okresowej. Przypomnijmy, że z definicji F wynika

$$\Phi_{(n+1)\tau}(x_0) = x_{n+1},$$

oraz że punkt x_{n+1} jest względem siebie $\mathcal{R}$ -symetryczny. Z wyboru p w (3.4) wiadać, że również x_0 jest względem siebie $\mathcal{R}$ -symetryczny. Zatem z symetrii (1.25) otrzymujemy

$$\Phi_{(n+1)\tau}(x_{n+1}) = \Phi_{(n+1)\tau} \circ \mathcal{R}(x_{n+1}) = \mathcal{R} \circ \Phi_{-(n+1)\tau}(x_{n+1}) = \mathcal{R}(x_0) = x_0.$$

Zauważmy, że w takim razie punkt x_0 leży na $\mathcal{R}$ -symetrycznej orbicie okresowej o okresie $T = 2(n+1)\tau$.

Dużą zaletą tej metody jest to, że możemy otrzymać oszacowanie dla całej rodziny orbit Lyapunova. Rozważamy wtedy cały przedział wartości $\mathcal{X}$ do obliczeń.

W ten sposób otrzymujemy oszacowanie punktów, które leżą na orbitach rozważając wartości z przedziału $\mathcal{X}$. Dla przedziału (2.1) otrzymaliśmy następujący wynik

Lemat 3.1. *Niech $r := 3.633 \cdot 10^{-9}$. Dla każdego $\mathcal{X}$ z przedziału (2.1) istnieje*

$$s(\mathcal{X}) \in -0.84134724633 + [-r, r]$$

takie, że

$$x_0(\mathcal{X}) = (\mathcal{X}, 0, 0, s(\mathcal{X})) \quad (3.5)$$

jest punktem, który leży na orbicie Lyapunova, którą będziemy oznaczać $L_{\mathcal{X}}$. Ponadto mamy ciąg punktów wzdłuż $L_{\mathcal{X}}$, które są oddalone maksymalnie na r (w sensie normy maksimum) od punktów w Tabeli 3.2. Dodatkowo mamy następujące oszacowanie na okres $T(\mathcal{X})$ orbity $L_{\mathcal{X}}$

$$T(\mathcal{X}) \in [3.0417517493, 3.0417517846]. \quad (3.6)$$

W Tabeli 3.2 wypisaliśmy połowę punktów wzdłuż rodziny orbit okresowych, ponieważ druga połowa (czyli pozostałe 14 punktów) może być łatwo obliczona z symetrii $\mathcal{R}$.

3.3. Oszacowania stabilnej i niestabilnej rozmaitości orbit Lypaunova

W poprzednim podrozdziale pokazaliśmy jak otrzymać otoczkę przedziałową dla rodziny orbit $L_{\mathcal{X}}$ zawierającą punkty $x_0(\mathcal{X})$ postaci (3.5), dla $\mathcal{X}$ z przedziału (2.1). Rozważmy teraz ustaloną orbitę Lyapunova dla pewnego $\mathcal{X}$ z przedziału (2.1). Opiszemy jak otrzymać za pomocą obliczeń komputerowych otoczkę przedziałową rozmaitości niestabilnej dla takiej orbity. Wprowadźmy najpierw kilka oznaczeń.

Rozważmy sekcję Poincarégo $\Sigma = \{Y = 0\}$ i zdefiniujemy $\rho : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $\mathcal{P} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ jako

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \inf \{t > 0 : \Phi_t(x) \in \Sigma\}, \\ \mathcal{P}(x) &= \Phi_{\rho(x)}(x). \end{aligned}$$

Zatem ρ to czas wzdłuż potoku do sekcji, a $\mathcal{P}$ jest odwzorowaniem do sekcji wzdłuż potoku.

Czas ρ i odwzorowanie $\mathcal{P}$ nie muszą być globalnie zdefiniowane. Gdy używamy ich w dowodzie wspieranym komputerowo, biblioteka CAPD sprawdza czy rozważane zbiory znajdują się w dziedzinie odwzorowania i czy odwzorowania są dobrze zdefiniowane przez cały proces obliczeń. Jeśli jakiś zbiór znajdzie się poza dziedziną to program zwróci błąd i zakończy działanie z odpowiednim komunikatem.

Ustalmy wartość $\mathcal{X}$ z przedziału (2.1) oraz orbitę Lyapunova $L_{\mathcal{X}}$ zawierającą punkt $x_0 = x_0(\mathcal{X})$ zdefiniowany jak w (3.5). Oznaczmy jako okres tej orbity $T = T(\mathcal{X})$. Dla ułatwienia konstrukcji rozważamy $N = 2n + 2$, aby dla punktów $x_0, \dots, x_N$ na orbicie Lyapunova, których oszacowanie obliczyliśmy w Lemacie 3.1 zachodziło

$$\begin{aligned} \Phi_{T/N}(x_i) &= x_{i+1} \quad \text{dla } i = 0, \dots, N-1, \\ x_N &= x_0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Łatwo zauważyć, że z postaci (3.5) wynika $x_0 \in \Sigma$.

Rozważmy ciąg odwracalnych macierzy $A_i \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ dla $i = 0, \dots, N$, gdzie $A_0 = A_N$. Zdefiniujmy odwzorowania

$$f_i : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \text{dla } i = 1, \dots, N,$$

jako

$$\begin{aligned} f_i(v) &:= A_i^{-1}(\Phi_{T/N}(A_{i-1}v + x_{i-1}) - x_i), \quad \text{dla } i = 1, \dots, N-1, \\ f_N(v) &:= A_N^{-1}(\mathcal{P}(A_{N-1}v + x_{N-1}) - x_N) = A_0^{-1}(\mathcal{P}(A_{N-1}v + x_{N-1}) - x_0). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dla $i = 1, \dots, N-1$ rozważamy przesunięcie w czasie wzdłuż potoku, wyrażone za pomocą lokalnych zmiennych w otoczeniu x_i . Obraz odwzorowania f_N znajduje się na sekcji $\Sigma = \{Y = 0\} \subset \mathbb{R}^4$. To oznacza, że $(f_N \circ \dots \circ f_1)|_{\Sigma} : \Sigma \rightarrow \Sigma$. Z (3.7) wynika, że

$$f_i(0) = 0 \quad \text{dla } i = 1, \dots, N.$$

Niech $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ będzie zdefiniowane jako następujące złożenie

$$F = f_N \circ \dots \circ f_1. \quad (3.9)$$

Łatwo zauważyć, że środek układu współrzędnych jest punktem stałym dla F . Naszym celem będzie znalezienie otoczki przedziałowej rozmaitości niestabilnej punktu, który jest środkiem układu. Uzyskane w ten sposób oszacowanie będzie oszacowaniem na przecięcie rozmaitości niestabilnej orbity Lyapunova z sekcją Σ .

Zdefiniujemy teraz obiekt, który jest bardzo wygodny do reprezentacji przedziałowej otoczki w dowodzie wspieranym komputerowo. Będą to stożki.

Definicja 3.2. Niech $\|\cdot\|$ będzie normą w $\mathbb{R}^3$. Niech $Q : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną następująco

$$Q(v_1, \dots, v_4) = |v_1| - \|(v_2, v_3, v_4)\|. \quad (3.10)$$

Stożkiem zaczepionym w punkcie $v \in \mathbb{R}^4$ nazywamy zbiór

$$Q^+(v) := \{w \in \mathbb{R}^4 : Q(w - v) \geq 0\}.$$

Rozważmy ciąg stożków zdefiniowanych poprzez funkcje $Q_i : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, dla $i = 0, \dots, N$ i załóżmy, że

$$Q_N = Q_0.$$

Niech normy $\|\cdot\|_i$ dla Q_i z (3.10) będą postaci

$$\|(x_1, x_2, x_3)\|_i = \max\{|x_1|/a_{i,1}, \dots, |x_3|/a_{i,3}\}$$

gdzie $a_{i,k} \in (0, 1)$ są ustalonymi współczynnikami dla $i = 1, \dots, N$ i $k = 1, 2, 3$. Oznacza to, że będziemy używać różnych norm dla (3.10) do zdefiniowania stożków. Zauważmy, że $|y| \geq \|(x_1, x_2, x_3)\|_i$ jest równoważne z $a_{i,k}|y| \geq |x_k|$, dla $k = 1, 2, 3$. Zatem stożki $Q_i^+(v)$ można opisać w następujący sposób

$$Q_i^+(v) = \{v + (t, tx_1, tx_2, tx_3) : x_k \in [-a_{i,k}, a_{i,k}] \text{ dla } k = 1, 2, 3 \text{ i } t \in \mathbb{R}\}. \quad (3.11)$$

Uwaga 3.3. Forma (3.11) jest wygodna, ponieważ stożki $Q_i^+(v)$ mogą być reprezentowane w dowodzie wspieranym komputerowo przez zbiory postaci

$$V_i = [1] \times [-a_{i,1}, a_{i,1}] \times \dots \times [-a_{i,3}, a_{i,3}].$$

Można wtedy stożek zapisać jako

$$Q_i^+(v) = \{v + tw : w \in V_i, t \in \mathbb{R}\}. \quad (3.12)$$

Niech $B \subset \mathbb{R}^4$. Mówimy, że f_i spełnia warunki stożka w B wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $v \in B$

$$f_i(Q_i^+(v) \cap B) \subset Q_{i+1}^+(f_i(v)). \quad (3.13)$$

Poniższy lemat jest głównym narzędziem potrzebnym do otrzymania oszacowań na niestabilną rozmaitość środka układu współrzędnych odwzorowania (3.9).

Lemat 3.4. [6, Lemat 6.3] Niech $B := [-1, 1]^4 \subset \mathbb{R}^4$. Załóżmy, że $f_1, \dots, f_N$ spełniają warunki stożka w B . Niech $m > 1$ i załóżmy, że dla $F = f_N \circ \dots \circ f_1$ macierz $DF(0)$ ma wartość własną λ spełniającą nierówność $|\operatorname{Re} \lambda| > m$, natomiast pozostałe wartości spełniają $|\operatorname{Re} \tilde{\lambda}_k| < m$ dla $k = 1, 2, 3$. Jeśli dla każdego $v \in Q_i^+(0) \cap B$,

$$\|f_i(v)\| > m \|v\|, \quad (3.14)$$

to rozmaitość niestabilna początku układu współrzędnych dla odwzorowania F jest parametryzowana przez gładką krzywą $p^u : [-1, 1] \rightarrow B$, która spełnia następujące warunki

$$\begin{aligned} p^u(0) &= 0, \\ \pi_1 p^u &= Id, \\ p^u([-1, 1]) &\subset Q_0^+(p^u(u)), \quad \text{dla każdego } u \in [-1, 1], \end{aligned} \quad (3.15)$$

oraz zachodzi

$$\frac{d}{du} p^u(u) \in Q_0^+(0), \quad \text{dla każdego } u \in [-1, 1].$$

Zanim przedstawimy z kilkoma szczegółami dowód Lematu 3.4 zrobimy wprowadzenie i udowodnimy lemat pomocniczy. Dowód jest analogiczny jak w [6], z użyciem metody z przekształcaniem wykresu (ang. *graph transform*). W lemacie z pracy [6] odwzorowanie F jest pełnym obrotem wzdłuż orbity Lyapunova. W naszym przypadku mamy ciąg lokalnych odwzorowań, które po złożeniu tworzą pełny obrót. Modyfikacja, którą należy zastosować polega na tym, że musimy przekształcać wykres przez każde z odwzorowań $f_1, f_2, \dots, f_N$ tak, aby powróciło do lokalnych zmiennych. Każde pojedyncze przekształcenie wykresu dla f_i ma podobną konstrukcję jak w [6]. Po złożeniu przekształceń każdego f_i otrzymujemy przekształcenie wykresu dla F .

Rozważamy funkcję F zdefiniowaną jak w (3.9), tak jak w treści lematu. Przypomnijmy, że funkcja ta ma punkt stały, który zamianą zmiennych możemy zawsze przenieść do zera. Niech ten punkt będzie oznaczony p_1^* . Każdy z punktów stałych dla odwzorowań f_i oznaczmy jako odpowiednie p_i^* dla rozróżnienia w których lokalnych współrzędnych jest to środek.

Będziemy rozważać lokalne otoczenia zera. Abyśmy wiedzieli w otoczeniu którego punktu (czyli dla której funkcji f_i) pracujemy będziemy używać oznaczenia $p_i^* \in B_i^u \times B_i^r$, gdzie $B_i^u \subset \mathbb{R}$ oraz $B_i^r \subset \mathbb{R}^3$ są domkniętymi kulami o promieniu $r = 1$. Oczywiście w lokalnych zmiennych dla każdego $i = 1, \dots, N$ jest to otoczenie zera $B^u \times B^r \subset \mathbb{R}^4$. Litera u pochodzi od kierunku niestabilnego i wyraża jego wymiar, natomiast r oznacza wymiar reszty kierunków.

Dla każdego $i = 1, \dots, N$ konstruujemy inny stożek ze stałą α_i . Będziemy używać zapisu

$$Q_i^+ = Q^+(p_i^*) = \{p \in \mathbb{R}^4 : Q_i(p - p_i^*) \geq 0\}$$

do rozróżnienia stożków. Załóżmy, że stałe α_i są dostatecznie małe, tak aby $Q^+(p_i^*) \cap B_i^u \times B_i^r$ nie miało punktów wspólnych z $B_i^u \times \partial B_i^r$ dla każdego $i = 1, \dots, N$. Będziemy korzystać z warunku na stożki (3.13), który można zapisać dla odwzorowania f następująco

$$Q(q_1 - q_2) \geq 0 \implies \tilde{Q}(f(q_1) - f(q_2)) \geq 0.$$

dla każdego $q_1 - q_2 \in B^u \times B^r$.

W nawiązaniu do prac [6] oraz [29] wprowadzimy definicję dysku horyzontalnego. Mówimy, że funkcja $h : B^u \rightarrow B^u \times B^r$ jest *dyskiem horyzontalnym* w $B^u \times B^r$, jeżeli

1. $h(x^*) = p^*$, gdzie $p^* = (x^*, y^*)$;
2. dla każdego $x \in B^u$ $\pi_x h(x) = x$, gdzie $\pi_x(x, y) = x$;
3. dla każdego $x, \hat{x} \in B^u$, $x \neq \hat{x}$ mamy $Q_i(h(x) - h(\hat{x})) \geq 0$, dla każdego $i = 1, \dots, N$.

Przedstawimy teraz lemat pomocniczy wraz z dowodem.

Lemat 3.5. *Założmy, że mamy daną funkcję $f : B^u \times B^r \rightarrow \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^r$, $f(0) = 0$ dla której zachodzi implikacja*

$$Q(q_1 - q_2) \geq 0 \implies \tilde{Q}(f(q_1) - f(q_2)) \geq 0, \quad (3.16)$$

dla każdego $q_1, q_2 \in B^u \times B^r$ oraz

$$q \in Q^+(0) \implies |\pi_x f(q)| > m |\pi_x(q)|, \quad (3.17)$$

dla $m > 1$. Jeśli $h : D \rightarrow B^u \times B^r$, $h(0) = 0$ jest dyskiem horyzontalnym dla stożka Q^+ z dziedziną $D = [-d, d]$, to istnieje $h' : [-d', d'] \rightarrow B^u \times B^r$, takie że h' jest dyskiem horyzontalnym dla stożka $\tilde{Q}^+$ oraz $d' = md$.

Dowód. Dla każdych $x_1 \neq x_2 \neq 0$, $x_1, x_2 \in D$ takich, że $Q(h(x_1) - h(x_2)) > 0$ zachodzi

$$\tilde{Q}(f(h(x_1)) - f(h(x_2))) > 0. \quad (3.18)$$

Wynika to z założenia (3.16) oraz definicji dysku horyzontalnego. Korzystając z założenia (3.17) wiemy, że dla $x \in [-d, d] \setminus \{0\}$ zachodzi

$$|\pi_x f(h(x))| = |\pi_x(f(h(x)) - f(h(0)))| > m |\pi_x(h(x) - h(0))| = m |x|.$$

Wtedy $[-d', d'] \subset \pi_x f h([-d, d])$, gdzie $d' = md$, $m > 1$.

Rozważmy funkcję

$$x \mapsto \pi_x f(h(x)).$$

Założmy, że

$$\pi_x f(h(x_1)) = \pi_x f(h(x_2))$$

dla $x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$. Wtedy

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(f(h(x_1)) - f(h(x_2))) &= \tilde{\alpha} |\pi_x f(h(x_1)) - \pi_x f(h(x_2))|^2 \\ - \|\pi_y(f(h(x_1))) - \pi_y(f(h(x_2)))\|^2 &= - \|\pi_y(f(h(x_1))) - \pi_y(f(h(x_2)))\|^2 \leq 0, \end{aligned}$$

ponieważ (3.16). Otrzymujemy $x_1 = x_2$, czyli sprzeczność. Z tego wynika, że funkcja $\pi_x \circ f \circ h$ jest iniekcją na D .

Zdefiniujmy $h'(x') := f(h(x(x')))$. Dla $x' \in [-d', d']$ mamy

$$\pi_x h'(x') = \pi_x \circ f \circ h((\pi_x \circ f \circ h)^{-1}(x')) = x'.$$

z iniektywności. Zatem istnieje $x = x(x')$ takie, że $\pi_x f(h(x')) = x'$. Ponadto, $h'(0) = 0$ z definicji oraz h' zawiera się w stożku $\tilde{Q}^+$ na podstawie założenia (3.18). To oznacza, że h' jest dyskiem horyzontalnym dla stożka $\tilde{Q}^+$ z dziedziną $[-d', d']$. $\square$

Zauważmy, że własności (3.15) to warunki na to, aby $p^u(u)$ było dyskiem horyzontalnym na $[-1, 1] = B$. Warunek (3.14) możemy zapisać w naszych oznaczeniach jako

$$\begin{aligned} |\pi_x(f_i(p_i) - f_i(p_i^*))| &> m_i |\pi_x(p_i - p_i^*)|, \text{ dla } i = 1, \dots, N, \\ m_i &> 1 \text{ dla każdego } i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.19)$$

dla $p_i \in B_i^u \times B_i^r \cap Q^+(p_i^*)$, $p_i \neq p_i^*$.

Przeprowadzimy teraz dowód Lematu 3.4.

Dowód. Istnieje lokalnie jednowymiarowe włókno rozmaitości niestabilnej $W_{p_1^*}^{u,loc}(F)$ jako rozmaitość niestabilna początku układu współrzędnych (mamy $p_1^* = 0$ we współrzędnych lokalnych). Rozważmy przestrzeń własne $DF(p_1^*)$. Z definicji przestrzeni własnej odpowiadająca λ to

$$X_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\} : (DF(p_1^*))v = \lambda v\}.$$

Zakładamy, że dla każdego punktu $p = (x, y) \in \mathbb{R}^4$ współrzędna x jest kierunkiem silnie „niestabilnym”, to znaczy odpowiada rozciąganiu. Wtedy przestrzeń własna $X_\lambda = \text{span}\{(1, 0, 0, 0)\}$ jest jednowymiarowa. Dla $v \in X_\lambda$ mamy

$$Q_1(v) = \alpha_1 |v_x|^2 - \|v_y\|^2 = \alpha_1 |v_x|^2 - \|(0, 0, 0)\|^2 = \alpha_1 |v_x|^2 > 0,$$

ponieważ $\alpha_i > 0$ dla $i = 1, \dots, N$ z definicji stożka. Zatem przestrzeń X_λ zawiera się w stożku $Q^+(p_1^*)$. $W_{p_1^*}^{u,loc}(F)$ jest styczna w punkcie p_1^* do niestabilnej przestrzeni własnej, zatem zawiera się w stożku $Q^+(p_1^*)$.

$W_{p_1^*}^{u,loc}(F)$ jest wykresem na przedziale $[-r, r] \subset B^u$. Aby to udowodnić załóżmy, że nie jest to wykres. Wtedy istniałoby $0 \neq \hat{x} \in [-r, r]$ takie, że

$$(\hat{x}, y_1), (\hat{x}, y_2) \in W_{p_1^*}^{u,loc}(F) \quad (3.20)$$

dla pewnych $y_1, y_2 \in B^u \times B^r$, $y_1 \neq y_2$. $W_{p_1^*}^{u,loc}(F)$ jest ciągłą krzywą, ponieważ jest tej samej klasy co F [13]. Wiemy ze wcześniejszych rozważań, że zawiera się w odpowiednim stożku. Musi spełniać warunki stożka, czyli

$$Q_1((\hat{x}, y_1) - (\hat{x}, y_2)) \geq 0.$$

A zatem

$$-||y_1 - y_2||^2 \geq 0.$$

Stąd $||y_1 - y_2||^2 = 0$, co oznacza, że $y_1 = y_2$. Mamy sprzeczność. Zatem $W_{p_1^*}^{u,loc}(F)$ jest wykresem pewnej funkcji na przedziale $[-r, r]$. Oznaczmy ją jako

$$w^u(x) : [-r, r] \rightarrow B^u \times B^r.$$

Funkcja $h(x) = (x, w^u(x))$ zdefiniowana na $[-r, r]$ jest dyskiem horyzontalnym dla stożka Q_1^+ , ponieważ $\pi_x h(x) = x$ oraz spełnia warunki stożka Q_1^+ .

Mamy $h(0) = 0$, ponieważ $h(x_1^*) = p_1^*$ i po prostej zamianie zmiennych możemy przenieść ten punkt do zera. Z konstrukcji f_i dla $i = 1, \dots, N$ mamy $f_i(0) = 0$, bo $f_i(p_i^*) = p_{i+1}^*$ dla $i = 1, \dots, N-1$ oraz $f_N(p_N^*) = p_1^*$. Założyliśmy, że $f_1, \dots, f_N$ spełniają warunki stożka.

Oznacza, że jeśli rozważamy dwa punkty w i -tym stożku, to po iteracji poprzez f_i te punkty znajdują się w stożku z indeksem $i+1$. W szczególnym przypadku f_N przenosi punkty ze stożka Q_N^+ do Q_1^+ .

Dla $x \in [-r, r] \setminus \{0\}$ z warunku (3.19) dla każdego f_i warunek (3.17) w Lemacie 3.5 jest spełniony dla odpowiadających stożków Q_i^+ . Możemy skorzystać z Lematu 3.5 dla h oraz f_1 . Otrzymujemy dysk horyzontalny h' dla stożka Q_2^+ , który wraz z f_2 może być użyty kolejny raz w lemacie. Procedurę tą możemy powtarzać i generować ciąg N dysków horyzontalnych. Ostatni dysk zostanie przeniesiony do stożka Q_1^+ .

Otrzymujemy $[-Mr, Mr] \subset \pi_x Fh([-r, r])$, gdzie $M = \pi_{i=1}^N m_i$, z definicji F jako złożenia funkcji f_i . Dla każdego $x \in [-Mr, Mr]$ skoro $\pi_x \circ F \circ h$ również jest iniekcją, definiujemy

$$\mathcal{G}F(h)(x) := F(h((\pi_x \circ F \circ h)^{-1}(x))).$$

Mówimy, że $\mathcal{G}F(h)$ jest przekształceniem wykresu (ang. *graph transform*) h . Rozważmy $h_1(x) = \mathcal{G}F(h)(x)$. Z Lematu 3.5 wiemy, że h_1 jest dyskiem horyzontalnym. Dziedzina h_1 jest większa niż dziedzina h , ale niekoniecznie pokrywa B^u . Możemy analogicznie skonstruować przekształceniem wykresu h_1 jako

$$h_2(x) := \mathcal{G}F(h_1)(x).$$

Korzystając z analogicznych argumentów jak poprzednio wnioskujemy, że $h_2(x)$ jest dyskiem horyzontalnym. Zbiór $\{h_2(x)\} \cap B^u \times B^r$ jest fragmentem dysku horyzontalnego, ponieważ dysk mógł rozszerzyć się poza $B^u \times B^r$. Możemy powtarzać tę konstrukcję i wygenerować ciąg $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$. Dla pewnego dostatecznie dużego $n \in \mathbb{N}_+$ dziedzina dysku horyzontalnego rozszerzy się na B^u . Nasz pierwotny dysk $h(x) = (x, w^u(x))$ jest ciągłą krzywą w wielowymiarowej przestrzeni. Po zastosowaniu iteracji projekcji π_x i dyfeomorfizmu F zachowuje wszystkie swoje własności.

Zatem możemy zapisać, że $h_n(x) = (x, p^u(x))$, gdzie $p^u : B^u = [-1, 1] \rightarrow B^u \times B^r$ jest jednowymiarową krzywą parametryzującą rozmaitość niestabilną $W_{p_1^*=0}^{u,loc}(F)$.

□

Korzyścią jaką mamy z rozważania wielu odwzorowań przy metodzie równoległego strzału jest to, że czasy całkowania zostają skrócone. To sprawia, że pracujemy z większą dokładnością w obliczeniach w arytmetyce przedziałowej. Właśnie z tego powodu wybraliśmy podział orbity na 29 punktów.

W naszym dowodzie wspieranym komputerowo tak wybieramy A_0 , aby pochodna odwzorowania $F = f_N \circ \dots \circ f_1$ w początku układu współrzędnych była bliska diagonalnej. Wartości własne F to $\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1, 0$. (Mamy wartość własną zerową ponieważ f_N odwzorowuje obraz na sekcję Σ .) Za pomocą twierdzenia Gerszgorina [5] oraz ze ścisłego oszacowania na $DF(0)$ obliczonego w CAPD można uzyskać ścisłe oszacowanie na λ . Pozostałe macierze A_i wybieramy tak, aby pochodne f_i w początku układu współrzędnych były bliskie macierzy diagonalnej.

Uwaga 3.6. Aby sprawdzić czy są spełnione warunki stożka będziemy postępować następująco. Rozważmy zbiór V_i dla którego (3.12). Z twierdzenia o wartości średniej i tego, że

$$[Df_i(B)] V_i \subset Q_{i+1}(0) \quad (3.21)$$

wynika (3.13). Aby sprawdzić (3.21) wystarczy obliczyć jak wygląda zbiór $w = [Df_i(B)] V_i$ i sprawdzić, że

$$\left[\frac{w}{\pi_1 w} \right] \subset V_{i+1}.$$

Oznacza to, że warunek stożka jest prosty do sprawdzenia wykorzystując otoczkę przedziałową pochodnej odwzorowania. Biblioteka CAPD ma wbudowane metody obliczania odwzorowania Poincaré oraz jego pochodnych [26]. Zatem jest bardzo dobrym narzędziem do sprawdzania warunków stożka.

W dowodzie wspieranym komputerowo użyliśmy następującego lematu, aby sprawdzić (3.14) dla normy maksimum.

Lemat 3.7. Rozważmy $Q(v_1, \dots, v_4) = |v_1| - \|(v_2, v_3, v_4)\|$ z normą

$$\|(x_1, x_2, x_3)\| = \max \left\{ \frac{|x_1|}{a_1}, \frac{|x_2|}{a_2}, \frac{|x_3|}{a_3} \right\},$$

gdzie $a_1, a_2, a_3 \in (0, 1)$. Niech $f : B \rightarrow \mathbb{R}^4$ będzie takie, że $f(0) = 0$ oraz

$$[Df(B)] = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

gdzie A_{11}, A_{12}, A_{21} i A_{22} to macierze przedziałowe odpowiednio wymiarów 1×1 , 1×3 , 3×1 i 3×3 . Jeśli $A_{11} > c > 0$ i $m = c - \|A_{12}\|_{\max} \max(a_1, a_2, a_3)$, to

$$\|f(v)\|_{\max} \geq m \|v\|_{\max} \quad \text{dla każdego } v \in Q^+(0) \cap B. \quad (3.23)$$

Dowód. Techniczny dowód czytelnik znajdzie w Dodatku (A.2). $\square$

Można dostać analogiczny wynik do (3.23), lecz z nierównością w drugim kierunku. Jest to przedstawione w poniższym lemacie. (Tego typu oszacowanie będzie nam potrzebne do sprawdzenia założenia (1.14) w celu zastosowania Twierdzenia 1.9 w podrozdziale 3.6.)

Lemat 3.8. Rozważmy $Q(v_1, \dots, v_4) = |v_1| - \|(v_2, v_3, v_4)\|$ z normą

$$\|(x_1, x_2, x_3)\| = \max \left\{ \frac{|x_1|}{a_1}, \frac{|x_2|}{a_2}, \frac{|x_3|}{a_3} \right\},$$

gdzie $a_1, a_2, a_3 \in (0, 1)$. Niech $f : B \rightarrow \mathbb{R}^4$ oraz niech

$$[Df(B)] = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

gdzie A_{11} , A_{12} , A_{21} i A_{22} są macierzami przedziałowymi mające odpowiednio wymiary 1×1 , 1×3 , 3×1 oraz 3×3 . Jeśli

$$a := \max(a_1, a_2, a_3), \quad (3.25)$$

$$\bar{m} := \max(|A_{11}| + a \|A_{12}\|_{\max}, \|A_{21}\|_{\max} + a \|A_{22}\|_{\max}), \quad (3.26)$$

to

$$\|f(v)\|_{\max} \leq \bar{m} \|v\|_{\max} \quad \text{dla każdego } v \in Q^+(0) \cap B.$$

Dowód. Dowód również znajduje się w Dodatku (A.3). $\square$

Uwaga 3.9. W praktyce wyrażenie A_{11} w (3.22)–(3.24), jest związane z hiperbolicznym rozszerzaniem i dominuje wartość wyrażenia (3.26). Dla nas a z (3.25) będzie niewielkie, zatem $m \approx \bar{m} \approx |A_{11}|$; gdzie $m < \bar{m}$.

Z pomocą Lematu 3.4 otrzymaliśmy następujący wynik.

Lemat 3.10. Niech $r = 3 \cdot 10^{-8}$, $B = [-r, r]^4$ oraz

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0.280324 & -0.220733 & 0.280324 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.816632 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -0.343269 & 1 & -0.343269 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Weźmy $L = 5 \cdot 10^{-6}$ oraz zdefiniujmy stożki następująco

$$Q_0^+(v) = \{v + (t, tx_2, tx_3, tx_4) : x_k \in [-L, L] \text{ dla } k = 2, 3, 4 \text{ i } t \in \mathbb{R}\}.$$

Wtedy rozmaitość niestabilna początku układu współrzędnych dla F jest sparametryzowana gładką krzywą $p^u : [-r, r] \rightarrow B$, która spełnia

$$\begin{aligned} p^u(0) &= 0, \\ \pi_1 p^u &= Id, \\ p^u([-r, r]) &\subset Q_0^+(p^u(u)), \quad \text{dla każdego } u \in [-r, r], \end{aligned}$$

oraz

$$\frac{d}{du} p^u(u) \in Q_0^+(0), \quad \text{dla każdego } u \in [-r, r].$$

Wniosek 3.11. *Krzywa $w^u(u) := x_0 + A_0 p^u(u)$ leży na rozmaitości niestabilnej orbity Lyapunova zawierającej x_0 . Krzywa $w^u(u)$ zwiera się w $x_0 + A_0 Q_0^+(0)$ oraz $\frac{d}{du} w^u(u) \in A_0 V_0$, gdzie*

$$V_0 = \{1\} \times [-L, L] \times [-L, L] \times [-L, L].$$

Jako, że w definicji F w (3.9) używamy $f_N = \mathcal{P}$ (patrz (3.8)), i $\mathcal{P}$ odwzorowuje się na Σ , wiemy że $w^u(u) \subset \Sigma$.

Uwaga 3.12. Macierze A_i , których użyliśmy do zmian zmiennych oraz stożki $Q_i^+(v)$ zostały automatycznie dostosowane przez nasz program. Nie wypisujemy ich tu, ponieważ najistotniejsze jest oszacowanie w punkcie $x_0 = x_0(\mathcal{X})$, które podaliśmy w Lemacie 3.10, pozostałe to szczegóły techniczne.

Uwaga 3.13. Aby sprawdzić czy spełnione jest założenie (3.14) Lematu 3.4 wykorzystaliśmy Lematy 3.7 i otrzymaliśmy $m = 1.2767546773$, jako oszacowanie z (3.14).

Uwaga 3.14. Otrzymaliśmy następujące oszacowanie korzystając z Lematu 3.8 dla odwzorowań (3.8)

$$\|f_i(v_i)\|_{\max} \leq \bar{m} \|v_i\|_{\max} \quad \text{dla } v_i \in Q_i^+(0) \cap B \text{ oraz } i = 1, \dots, N,$$

gdzie $\bar{m} = 1.2767636743$.

Wszystkie powyższe rozważania pozwoliły nam oszacować pojedyncze włókno dla punktu stałego znajdującego się w początku układu współrzędnych dla odwzorowania F , które z sekcji trafia na sekcję (zdefiniowanego w (3.9)). Punkt pochodził z przecięcia orbity Lyapunova z sekcją $\{Y = 0\}$. W kolejnych etapach będziemy rozważać problem w rozszerzonej przestrzeni fazowej, ponieważ problem eliptyczny jest nieautonomiczny. W rozszerzonej przestrzeni punkt staje się niezmienniczym okręgiem $\{0\} \times \mathbb{T}$. Niestabilne włókno dla punktu $(0, \lambda)$, gdzie $\lambda \in \mathbb{T}$, na tej krzywej znajduje się w rozszerzonej przestrzeni fazowej, ale takie włókno nie musi leżeć na $\{\theta = \lambda\}$, ponieważ czasy powrotu do sekcji $\{Y = 0\}$ różnią się między punktami. Poniżej przedstawimy rozumowanie dotyczące metody tego jak otrzymaliśmy oszacowanie na niestabilne włókno punktów z $\{0\} \times \mathbb{T}$ w rozszerzonej przestrzeni fazowej.

Rozważmy potok problemu kołowego (PCR3BP) w rozszerzonej przestrzeni fazowej i oznaczamy go jako $\tilde{\Phi}_t$. Będziemy rozważali sekcję Poincarégo postaci $\tilde{\Sigma} = \{Y = 0\} \times \mathbb{T} = \Sigma \times \mathbb{T}$. Niech $\tilde{\rho} : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $\tilde{\mathcal{P}} : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \mathbb{T}$ będą zdefiniowane jako

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(x) &= \inf \left\{ t > 0 : \tilde{\Phi}_t(x) \in \tilde{\Sigma} \right\}, \\ \tilde{\mathcal{P}}(x) &= \tilde{\Phi}_{\tilde{\rho}(x)}(x). \end{aligned}$$

Niech $\tilde{A}_0$ będzie macierzą o wymiarach 5×5 zdefiniowaną jako

$$\tilde{A}_0 = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

gdzie A_0 to (3.27). Zdefiniujmy $\tilde{F} : \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{\Sigma}$ jako

$$\tilde{F}(x, \theta) = \tilde{A}_0^{-1} \left(\tilde{\mathcal{P}}^2 \left((x_0, 0) + \tilde{A}_0(x, \theta) \right) - (x_0, 0) \right).$$

Wtedy $\{0\} \times \mathbb{T}$ staje się niezmienniczą krzywą dla $\tilde{F}$. Pokażemy teraz jak otrzymać oszacowanie niestabilnego włókna punktu $(0, \lambda)$ na takiej krzywej (w rozszerzonej przestrzeni fazowej).

Lemat 3.15. *Niech r oraz L będą stałymi, które rozważaliśmy w Lemacie 3.10. Niech $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$. Rozważmy stożki w rozszerzonej przestrzeni fazowej zdefiniowane jako*

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_0^+(v) &= \{v + (t, tx_2, tx_3, tx_4, t\theta) : \\ x_k &\in [-L, L] \text{ dla } k = 2, 3, 4, \theta \in [-M, M] \text{ oraz } t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Jeśli dla każdego $\lambda \in \mathbb{T}$ niestabilny wektor własny $D\tilde{F}(0, \lambda)$ jest zawarty w stożku $\tilde{Q}_0^+(0)$ i jeśli $\tilde{F}$ spełnia warunki stożka $\tilde{Q}_0^+$ dla $[-r, r]^4 \times \mathbb{T}$, to dla każdego $\lambda \in \mathbb{T}$ niestabilne włókno $W_{(0, \lambda)}^u(\tilde{F})$ jest parametryzowane przez funkcję $\tilde{p}_\lambda^u : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \mathbb{T}$, która spełnia (poniżej p^u jest funkcją z Lematu 3.10)

$$\pi_{\mathbb{R}^4} \tilde{p}_\lambda^u(u) = p^u(u) \quad \text{oraz} \quad \tilde{p}_\lambda^u(u) \in \tilde{Q}_0^+(0, \lambda) \quad \text{dla } u \in [-r, r]. \quad (3.29)$$

W szczególności

$$|\pi_\theta \tilde{p}_\lambda^u(u) - \lambda| \leq rM. \quad (3.30)$$

Dla rodziny orbit Lyapunova dla $\mathcal{X}$ z przedziału (2.1) możemy wybrać $M = 3$.

Dowód. Dla każdego λ włókno niestabilne $W_{(0, \lambda)}^u(\tilde{F})$ jest styczne w punkcie $(0, \lambda)$ do wektora własnego $\vec{v}$ macierzy pochodnych $D\tilde{F}(0, \lambda)$. Z tego wynika, że dostatecznie blisko $(0, \lambda)$ to włókno jest w stożku $\tilde{Q}_0^+(0, \lambda)$. Każdy punkt $x \in W_{(0, \lambda)}^u(\tilde{F})$ może być zapisany jako $x = \tilde{F}^k(z)$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ i dla odpowiedniego punktu $z = z(k) \in W_{\tilde{F}^{-k}(0, \lambda)}^u(\tilde{F})$. Biorąc dostatecznie duże k punkt z może być wybrany tak blisko $\{0\} \times \mathbb{T}$ jak chcemy, zatem możemy wybrać dostatecznie duże k dla którego $z \in \tilde{Q}_0^+(\tilde{F}^{-k}(0, \lambda))$. Jeśli zatem $z \in \tilde{Q}_0^+(\tilde{F}^{-k}(0, \lambda))$ oraz wiemy, że $\tilde{F}$ spełnia warunki stożka, to mamy $x = \tilde{F}^k(z) \in \tilde{Q}_0^+(0, \lambda)$ (patrz: Rysunek 3.3). To oznacza, że $W_{(0, \lambda)}^u(\tilde{F}) \cap ([-r, r]^4 \times \mathbb{T}) \subset \tilde{Q}_0^+(0, \lambda)$. Jako, że problem kołowy jest autonomiczny $\pi_{\mathbb{R}^4} W_{(0, \lambda)}^u(\tilde{F})$ nie zależy od λ i jest parametryzowane przez $p^u(u)$, co wynika z Lematu 3.10. Zatem otrzymujemy (3.29).

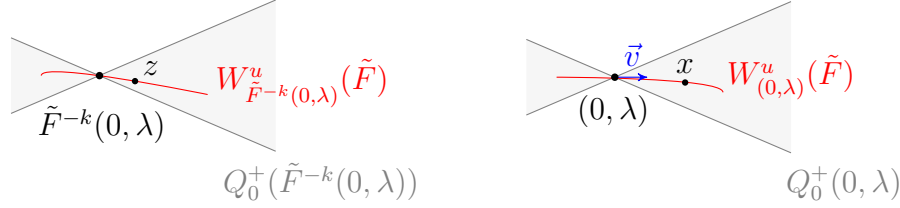
Warunek (3.30) wynika z faktu, że $\tilde{p}_\lambda^u(u) \in \tilde{Q}_0^+(0, \lambda)$. Jest tak, bo

$$|\pi_{\mathbb{T}} \tilde{p}_\lambda^u(u) - \lambda| \leq M |\pi_{x_1} \tilde{p}_\lambda^u(u)| = M |\pi_{x_1} p^u(u)| = M |u| \leq rM.$$

Z pomocą obliczeń komputerowych sprawdziliśmy, że dla każdego $\mathcal{X}$ z przedziału (2.1), niestabilny wektor własny $D\tilde{F}(0, \lambda)$ jest zwarty w

$$\{1\} \times [-3 \cdot 10^{-6}, 3 \cdot 10^{-6}]^3 \times [2.7763408157, 2.7918430312] \subset \tilde{Q}_0^+(0).$$

Sprawdziliśmy też warunki stożka używając metody opisanej w Uwadze 3.6. $\square$



Rysunek 3.3. Włókna w stożku. Dla dostatecznie dużego k , możemy wybrać taki punkt z , który jest w stożku $Q_0^+(\tilde{F}^{-k}(0, \lambda))$. Po iteracji $\tilde{F}^k$ punkt $x = \tilde{F}^k(z)$ będzie znajdował się w stożku $Q_0^+(0, \lambda)$.

Uwaga 3.16. Jeśli wybierzemy $\tilde{A}_0$ trochę inaczej, zamiast dokładać 1 jako ostatni element na diagonalu w (3.28), moglibyśmy zredukować M w Lemacie 3.15. Zdecydowaliśmy się na wybór (3.28) aby uprościć obliczenia, ponieważ $M = 3$, które otrzymaliśmy jest wystarczające.

3.4. Przecięcie rozmaitości stabilnej i niestabilnej orbit Lypunova

Sposób w jaki otrzymamy przecięcie stabilnej i niestabilnej rozmaitości orbit Lyapunova jest podobny do metody z podrozdziału 3.2. Użyjemy metody równoległych strzałów i wykorzystamy oszacowania na rozmaitość niestabilną z podrozdziału 3.3. Ustalmy $\mathcal{X}$ z przedziału (2.1) i rozważmy inną niż w sekcji 3.2 funkcję $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ dla operatora F (3.1). Do naszej konstrukcji wybierzemy teraz

$$p(s) := x_0(\mathcal{X}) + A_0 p^u(s), \quad (3.31)$$

gdzie p^u jest funkcją parametryzującą przecięcie niestabilnej rozmaitości $L_{\mathcal{X}}$ z sekcją $\{Y = 0\}$, którego oszacowanie otrzymaliśmy w Lemacie 3.10. Został tam też opisany wybór A_0 oraz oszacowania na $p^u(s)$, razem z pochodnymi. Odwzorowanie (3.31) oznacza więc, że odsuwamy się od punktu na orbicie Lyapunova „w kierunku” rozmaitości niestabilnej.

Z własności $\mathcal{R}$ -symetryczności PCR3BP wiemy, że $\mathcal{R}(p(s))$ jest punktem na stabilnej rozmaitości $L_{\mathcal{X}}$. Jeśli dla F zdefiniowanego przez (3.1) sprawdzimy, że dla pewnego $s \in (0, 1)$ i pewnego czasu $h \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$F(s, h, x_1, \dots, x_n) = 0,$$

to biorąc $x_0 := p(s)$ i $x_{n+1} := \Phi_h(x_n)$ otrzymamy ciąg punktów

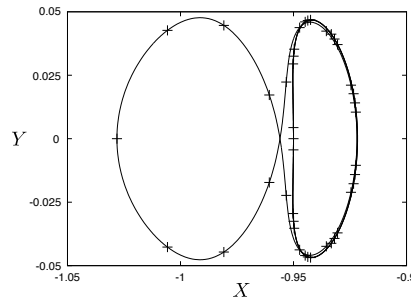
$$x_0, \dots, x_n, x_{n+1}, \mathcal{R}(x_n), \dots, \mathcal{R}(x_0), \quad (3.32)$$

wzdłuż przecięcia stabilnej i niestabilnej rozmaitości $L_{\mathcal{X}}$. Podążając tą metodą otrzymaliśmy następujący wynik

Lemat 3.17. *Dla każdego $\mathcal{X}$ z przedziału (2.1) stabilna i niestabilna rozmaitość $L_{\mathcal{X}}$ przecinają się. Ponadto przecięcie znajduje się wzdłuż $\mathcal{R}$ -symetrycznej orbity homoklinicznej. Orbita ta przechodzi w odległości nie większej niż $r = 1.96 \cdot 10^{-7}$ od punktów podanych w Tabeli 3.4. Orbita została przedstawiona na Rysunku 3.5.*

n	X	Y	P_X	P_Y
0	-0.95000000242	-0	-1.0427994645e-08	-0.84134724275
1	-0.94997599415	0.032508255048	-0.026407880234	-0.87841641186
2	-0.94367569216	0.046559121408	-0.016859552423	-0.93400981538
3	-0.93185570859	0.039269494574	-0.0043284590814	-0.98260192685
4	-0.9227740512	0.014134265524	0.00018569728993	-1.0132585163
5	-0.92342538156	-0.017741502784	-8.9504023812e-05	-1.0111198858
6	-0.9332873018	-0.041191398464	0.0054636769818	-0.97749478375
7	-0.94483412083	-0.046015557539	0.018549243384	-0.92767343656
8	-0.95017205833	-0.029473079334	0.025907589742	-0.87187283933
9	-0.95002477482	0.0043928225728	-0.0053602054156	-0.84205223945
10	-0.94968890529	0.035271238551	-0.026402429149	-0.88508159957
11	-0.94246936536	0.046807227358	-0.015244331177	-0.94027843983
12	-0.93053821073	0.037102593271	-0.003488949681	-0.9875100719
13	-0.92242610924	0.010464221796	-0.00019611370513	-1.0149474376
14	-0.92456420774	-0.021092391132	-0.00083603746	-1.0083700678
15	-0.93548053074	-0.042380742641	0.0047663014948	-0.97130987256
16	-0.94730307615	-0.043772642856	0.016236744567	-0.91841934035
17	-0.95320906454	-0.022318932226	0.012564889629	-0.85729285711
18	-0.96070049024	0.017216683341	-0.061196504134	-0.84499124342
19	-0.98081741509	0.044653406262	-0.11087155568	-0.94184521723
20	-1.0057774379	0.042684693077	-0.12465612254	-1.0610257866
21	-1.0281206713	0	0	-1.2112777154

Tablica 3.4. Punkty środkowe otoczki przedziałowej dla punktów z orbity homoklinicznej do rodziny orbit Lyapunova.



Rysunek 3.5. Orbita homokliniczna dla $L_{\mathcal{X}}$ [11].

W Tabeli 3.4 wypisaliśmy połowę punktów wzdłuż orbity homoklinicznej, ponieważ druga połowa, czyli pozostałe 21 punktów, może zostać łatwo policzona z $\mathcal{R}$ -symetrii.

Uwaga 3.18. Z naszej metody można także obliczyć oszacowanie czasu całkowania h pomiędzy punktami znajdującymi się wzdłuż orbity homoklinicznej. Otrzymaliśmy

$$h \in [0.34246881126, 0.34246888642]. \quad (3.33)$$

Następnie omówimy jak pokazać, że przecięcie rozmaitości stabilnej i niestabilnej orbity Lyapunova jest transwersalne.

Dwie podrozmaitości gładkiej rozmaitości skończenie-wymiarowej przecinają się transwersalnie, jeśli w każdym punkcie przecięcia przestrzeń styczna w nim generują (rozpinają) przestrzeń styczną otaczającej rozmaitości w tym punkcie [21].

Lemat 3.19. *Dla każdego $\mathcal{X}$ z przedziału (2.1) przecięcie stabilnej i niestabilnej rozmaitości $L_{\mathcal{X}}$ jest transwersalne, jeśli rozważymy je w trójwymiarowej przestrzeni o stałej wartości energii.*

Dowód. Przecięcia rozmaitości stabilnej i niestabilnej $L_{\mathcal{X}}$ będziemy rozważać na sekcji, gdzie $X < -1$, oznaczmy ją

$$\Sigma_{\{X < -1\}} = \{Y = 0, X < -1\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Jest to techniczny zabieg, ponieważ będziemy szukać przecięcia w takim miejscu (Rysunek 3.5).

Oznaczmy jako $W_{L_{\mathcal{X}}}^u$ oraz $W_{L_{\mathcal{X}}}^s$ niestabilną i stabilną rozmaitość $L_{\mathcal{X}}$. Są to dwuwymiarowe cylindry zawarte w trójwymiarowej przestrzeni stałego poziomu energii $\{H = h^*\}$ dla $h^* = H(L_{\mathcal{X}})$. Wiemy, że $W_{L_{\mathcal{X}}}^u$ i $W_{L_{\mathcal{X}}}^s$ przecinają się wzdłuż homoklinicznej orbity, która przechodzi przez punkty wypisane w (3.32).

Zauważmy, że punkt x_{n+1} leży na $\Sigma_{\{X < -1\}}$. Z konstrukcji (3.1) wiemy, że punkt x_{n+1} spełnia własność $\pi_Y x_{n+1} = 0$. Patrząc do Tabeli 3.4 widzimy, że $\pi_X x_{n+1} < -1$, zatem istotnie $x_{n+1} \in \Sigma_{\{X < -1\}}$.

Pole wektorowe w x_{n+1} ma niezerową współrzędną Y . Oznacza to, że przestrzeń styczna do rozmaitości stabilnej i niestabilnej w punkcie x_{n+1} rozpina współrzędną Y .

Rozmaitości $W_{L_{\mathcal{X}}}^u$ i $W_{L_{\mathcal{X}}}^s$ przecinają się z sekcją $\Sigma_{\{X < -1\}}$ w x_{n+1} wzdłuż jednowymiarowych krzywych. Zauważmy, że niektóre punkty z rozmaitości mogą wpadać w Jowisz. Te które docierają do $\Sigma_{\{X < -1\}}$ blisko punktu x_{n+1} przecinają sekcję wzdłuż jednowymiarowych krzywych. Sekcja $\Sigma_{\{X < -1\}}$ jest trójwymiarowa, ale $L_{\mathcal{X}}$, $W_{L_{\mathcal{X}}}^u$ i $W_{L_{\mathcal{X}}}^s$ są zawarte w $\{H = h^*\}$. Zbiór $\Sigma_{\{X < -1\}} \cap \{H = h^*\}$ jest dwuwymiarowy i może być parametryzowany poprzez współrzędne (X, P_X) , ponieważ na $\Sigma_{\{X < -1\}}$ zmienna P_Y może być wyliczona z korzystając z X, P_X i z równania $H(X, Y = 0, P_X, P_Y) = h^*$. Przecięcia $W_{L_{\mathcal{X}}}^u \cap \Sigma_{\{X < -1\}}$ i $W_{L_{\mathcal{X}}}^s \cap \Sigma_{\{X < -1\}}$ są zatem jednowymiarowymi krzywymi zawartymi w dwuwymiarowej przestrzeni.

Jeśli pokażemy, że

$$\begin{aligned} \pi_{X, P_X} (W_{L_{\mathcal{X}}}^u \cap \Sigma_{\{X < -1\}}) & \text{ przecina się transwersalnie z} \\ \pi_{X, P_X} (W_{L_{\mathcal{X}}}^s \cap \Sigma_{\{X < -1\}}) & \text{ w punkcie } x_{n+1}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

to otrzymamy transwersalne przecięcie $W_{L_{\mathcal{X}}}^u$ z $W_{L_{\mathcal{X}}}^s$ w punkcie x_{n+1} w przestrzeni $\{H = h^*\}$. To znaczy pole wektorowe w punkcie x_{n+1} będzie styczne do $W_{L_{\mathcal{X}}}^u$ i $W_{L_{\mathcal{X}}}^s$ w x_{n+1} i będzie miało niezerową współrzędną Y . Z (3.34) wynika, że przestrzeń styczna do $W_{L_{\mathcal{X}}}^u$ i $W_{L_{\mathcal{X}}}^s$ w punkcie x_{n+1} rozpina X, P_X . Stąd rozpina trójwymiarową przestrzeń wektorową, zatem przecięcie jest transwersalne w $\{H = h^*\}$.

Niech $\tau : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{P} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \Sigma_{\{X < -1\}}$ będą definiowane następująco

$$\begin{aligned} \tau(x) &:= \inf \{t > 0 : \Phi_t(x) \in \Sigma_{\{X < -1\}}\}, \\ \mathcal{P}(x) &:= \Phi_{\tau(x)}(x). \end{aligned}$$

Zatem $\tau(x)$ jest czasem powrotu do sekcji, a $\mathcal{P}(x)$ odwzorowaniem dla tego powrotu. Krzywa $W_{L_{\mathcal{X}}}^u \cap \Sigma_{\{X < -1\}}$ może zostać obliczona poprzez złożenie $\mathcal{P} \circ p(s)$.

Patrząc na definicję $p(s)$ w (3.31) łatwo zauważyć, że jeśli wyznaczymy iterację punktu na rozmaitości niestabilnej poprzez przesunięcie o czas do sekcji $\Sigma_{\{X < -1\}}$, to będzie rzeczywiście takim złożeniem. Z własności $\mathcal{R}$ -symetrii problemu kołowego $W_{L_X}^s \cap \Sigma_{\{X < -1\}}$ można obliczyć za pomocą złożenia $\mathcal{R} \circ \mathcal{P} \circ p(s)$. Niech $s^* \in \mathbb{R}$ spełnia $\mathcal{P} \circ p(s^*) = x_{n+1}$. Jeśli spełnione są nierówności

$$\pi_X \frac{d}{ds} \mathcal{P} \circ p(s) |_{s=s^*} > 0 \quad \text{oraz} \quad \pi_{P_X} \frac{d}{ds} \mathcal{P} \circ p(s) |_{s=s^*} > 0, \quad (3.35)$$

to zachodzi

$$\pi_X \frac{d}{ds} \mathcal{R} \circ \mathcal{P} \circ p(s) |_{s=s^*} = \pi_X \frac{d}{ds} \mathcal{P} \circ p(s) |_{s=s^*} > 0, \quad (3.36)$$

$$\pi_{P_X} \frac{d}{ds} \mathcal{R} \circ \mathcal{P} \circ p(s) |_{s=s^*} = -\pi_{P_X} \frac{d}{ds} \mathcal{P} \circ p(s) |_{s=s^*} < 0, \quad (3.37)$$

ponieważ $\mathcal{R}$ -symetria zmienia znak przy współrzędnej P_X i nie zmienia przy współrzędnej X . Z (3.35–3.37) otrzymamy warunek (3.34).

W Podrozdziale 3.3 otrzymaliśmy (Lemat 3.10 i Wniosek 3.11)

$$\frac{d}{ds} p(s) \in \tilde{A}_0 V_0, \quad (3.38)$$

gdzie V_0 to zbiór

$$V_0 = \{1\} \times [-L, L] \times [-L, L] \times [-L, L],$$

dla $L = 5 \cdot 10^{-6}$. Zbiór V_0 reprezentuje stożek, tak jak wspomnieliśmy w Uwadze 3.3. Oszacowanie na styczną do $p(s)$ z (3.38) możemy przenieść aż do punktu x_{n+1} używając metody iterowania dla stożków opisanej w Uwadze 3.6. W naszych obliczeniach otrzymaliśmy

$$\pi_{X, P_X} \frac{d}{ds} \mathcal{P} \circ p(s) |_{s=s^*} \in \{uV \mid u > 0 \text{ oraz } V = \{1\} \times [4.06081, 4.06404]\}.$$

Zatem zachodzi (3.35), co kończy dowód. $\square$

3.5. Przetrwanie rodziny orbit Lyapunova po perturbacji

Przypomnijmy, że orbity Lyapunova startujące z $x_0(\mathcal{X})$ (patrz (3.5)), które mają okres $T(\mathcal{X})$, to zbiór

$$L_{\mathcal{X}} = \{\Phi_t(x_0(\mathcal{X})) : t \in [0, T(\mathcal{X})]\}.$$

Oznaczmy normalnie hiperboliczną rozmaitości niezmienniczą zawierającą rodzinę orbit Lyapunova jako

$$\Lambda_L = \{L_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \text{ z przedziału (2.1)}\} \subset \mathbb{R}^4.$$

W rozszerzonej przestrzeni fazowej będziemy ją oznaczać jako $\tilde{\Lambda}_L$, to znaczy

$$\tilde{\Lambda}_L = \Lambda_L \times \mathbb{T}. \quad (3.39)$$

Aby udowodnić, że $\tilde{\Lambda}_L$ przetrwa po perturbacji skorzystamy z następującego twierdzenia

Twierdzenie 3.20. [7] Załóżmy, że

$$\frac{d}{d\mathcal{X}}T(\mathcal{X}) \neq 0 \quad (3.40)$$

oraz

$$\frac{d}{d\mathcal{X}}H_0(x_0(\mathcal{X})) \neq 0. \quad (3.41)$$

Wtedy dla dostatecznie małej perturbacji ε zmieniającej problem kołowy (PCR3BP) na problem eliptyczny (PER3BP), rozmaitość $\tilde{\Lambda}_L$ perturbuje się w $O(\varepsilon)$ -bliską normalnie hiperboliczną rozmaitości $\tilde{\Lambda}_L^\varepsilon$ z brzegiem, i jest niezmiennicza pod wpływem potoku indukowanego przez by (1.24). Ponadto, istnieje zbiór Cantora niezmienniczych torusów w $\tilde{\Lambda}_L^\varepsilon$.

Opiszemy teraz jak sprawdzić warunki (3.40–3.41).

Niech $\mathcal{X}$ będzie ustalone, z przedziału (2.1). Przypomnijmy, że w Podrozdziale 3.2 mieliśmy $\tau = \tau(\mathcal{X})$, oraz parzyste¹ $N \in \mathbb{N}$, takie, że dla $\tau = \tau(\mathcal{X})$ i dla

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0(\mathcal{X}) = (\mathcal{X}, 0, 0, s(\mathcal{X})), \\ x_{i+1} &= \Phi_\tau(x_i) \quad \text{dla } i = 0, \dots, N-1 \end{aligned}$$

zachodzi

$$x_N = x_0,$$

oraz okres orbity Lyapunova startującej z x_0 to $T(\mathcal{X}) = N\tau(\mathcal{X})$. Istnienie takiego $s = s(\mathcal{X})$ i $\tau = \tau(\mathcal{X})$ otrzymaliśmy poprzez ustalenie $\mathcal{X}$ i rozwiązanie równania

$$\pi_{Y, P_X} \Phi_{\tau N/2}(\mathcal{X}, 0, 0, s) = 0 \quad (3.42)$$

ze względu na τ oraz s . Równanie (3.1) daje nam rozwiązanie (3.42) dzięki metodzie równoległych strzałów. W celu sprawdzenia (3.40–3.41) zdefiniujmy funkcję $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jako

$$g(\mathcal{X}, s, \tau) = \pi_{Y, P_X} \Phi_{N\tau/2}(\mathcal{X}, 0, 0, s).$$

Zauważmy, że

$$g(\mathcal{X}, s(\mathcal{X}), \tau(\mathcal{X})) = (0, 0). \quad (3.43)$$

To oznacza, że możemy obliczyć pochodne $\frac{ds}{d\mathcal{X}}$ i $\frac{d\tau}{d\mathcal{X}}$ z twierdzenia o funkcji uwikłanej; to znaczy różniczkujemy obustronnie (3.43) ze względu na $\mathcal{X}$ i otrzymujemy

$$\frac{\partial g}{\partial \mathcal{X}} + \frac{\partial g}{\partial (s, \tau)} \begin{pmatrix} \frac{ds}{d\mathcal{X}} \\ \frac{d\tau}{d\mathcal{X}} \end{pmatrix} = 0.$$

Wiedząc, że $\frac{\partial g}{\partial (s, \tau)}$ jest odwracalne obliczamy

$$\begin{pmatrix} \frac{ds}{d\mathcal{X}} \\ \frac{d\tau}{d\mathcal{X}} \end{pmatrix} = - \left(\frac{\partial g}{\partial (s, \tau)} \right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial \mathcal{X}}. \quad (3.44)$$

Pochodne cząstkowe $\frac{\partial g}{\partial \mathcal{X}}$, $\frac{\partial g}{\partial s}$ i $\frac{\partial g}{\partial \tau}$ to macierze rozmiaru 2×1 , które można obliczyć następująco. Niech $e_i \in \mathbb{R}^4$, dla $i = 1, \dots, 4$, będą wektorami z 1 na

¹ W tym przypadku wybieramy $N = 30$, patrz Tabela 3.2.

i -tej współrzędnej i zerami na pozostałych, tj. będą bazą kanoniczną w $\mathbb{R}^4$. Niech $\mathcal{F} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ będzie polem wektorowym problemu kołowego (PCR3BP). Wtedy

$$\frac{\partial g}{\partial \mathcal{X}}(x_0) = \pi_{Y, P_X} D\Phi_{N\tau/2}(x_0) e_1 = \pi_{Y, P_X} D\Phi_\tau(x_{N/2-1}) \dots D\Phi_\tau(x_0) e_1, \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial g}{\partial s}(x_0) = \pi_{Y, P_X} D\Phi_{N\tau/2}(x_0) e_4 = \pi_{Y, P_X} D\Phi_\tau(x_{N/2-1}) \dots D\Phi_\tau(x_0) e_4, \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \tau}(x_0) = \frac{d}{d\tau} \pi_{X, P_X} \Phi_{N\tau/2}(x_0) = \frac{N}{2} \pi_{Y, P_X} \mathcal{F}(\Phi_{N\tau/2}(x_0)) = \frac{N}{2} \pi_{Y, P_X} \mathcal{F}(x_{N/2}). \quad (3.47)$$

Zauważmy, że powyższe pochodne $\frac{\partial g}{\partial s}$ i $\frac{\partial g}{\partial \tau}$ dają nam $\frac{\partial g}{\partial(s, \tau)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial s} & \frac{\partial g}{\partial \tau} \end{pmatrix}$, które może zostać wykorzystane w (3.44) do obliczenia $\frac{ds}{d\mathcal{X}}$ oraz $\frac{d\tau}{d\mathcal{X}}$.

Gdy otrzymamy $\frac{ds}{d\mathcal{X}}$, to z łatwością policzymy

$$\frac{dH_0}{d\mathcal{X}}(x_0(\mathcal{X})) = \frac{dH_0}{d\mathcal{X}}(\mathcal{X}, 0, 0, s(\mathcal{X})) = \frac{\partial H_0}{\partial X}(x_0(\mathcal{X})) + \frac{\partial H_0}{\partial P_Y}(x_0(\mathcal{X})) \frac{ds}{d\mathcal{X}}(\mathcal{X}) \quad (3.48)$$

i otrzymamy (3.41).

Z pomocą obliczeń komputerowych sprawdziliśmy (3.44–3.48) i otrzymaliśmy:

Lemat 3.21. *Dla każdego $\mathcal{X}$ z (2.1) mamy*

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mathcal{X}} x_0(\mathcal{X}) &\in \{1\} \times \{0\} \times \{0\} \times [-4.530367, -4.530349], \\ \frac{d}{d\mathcal{X}} \tau(\mathcal{X}) &\in [-0.5523403, -0.5522624], \\ \frac{d}{d\mathcal{X}} T(\mathcal{X}) &\in [-16.57021, -16.56787], \\ \frac{d}{d\mathcal{X}} H_0(x_0(\mathcal{X})) &\in [-0.359187, -0.359185]. \end{aligned}$$

Wniosek 3.22. *Jako wniosek z Twierdzenia 3.20 i Lematu 3.21 otrzymujemy, że normalnie hiperboliczna rozmaitość $\tilde{\Lambda}_L$ składająca się z rodziny orbit Lyapunova w rozszerzonej przestrzeni fazowej, przetrwa pod wpływem perturbacji.*

3.6. Dowód głównego twierdzenia

Zanim przejdziemy do dowodu Twierdzenia 2.1 wykonamy pewne przygotowanie geometryczne. Jego celem jest wprowadzenie oznaczeń, które pozwolą nam później zastosować narzędzia przedstawione w sekcji 1.4.

Przypomnijmy, że Φ_t^ε oznacza potok problemu eliptycznego (PER3BP) w rozszerzonej przestrzeni fazowej. Niech $\rho^\varepsilon : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie czasem do sekcji $\{Y = 0\}$,

$$\rho^\varepsilon(x) = \inf \{t > 0 : \Phi_t^\varepsilon(x) \in \{Y = 0\}\},$$

oraz $\mathcal{P}_\varepsilon : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{T} \rightarrow \{Y = 0\}$ będzie zdefiniowane następująco

$$\mathcal{P}_\varepsilon(x) = \Phi_{\rho^\varepsilon(x)}^\varepsilon(x). \quad (3.49)$$

Sekcja $\{Y = 0\}$ w rozszerzonej przestrzeni fazowej jest izomorficzna z $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{T}$, co zgadza się z tym co opisaliśmy w Podrozdziale 1.4.

Rozważmy punkt $x^* := x_0(-0.95)$. Punkt $x_0(\mathcal{X})$ jest zdefiniowany w (3.5), w (2.1) mamy przedział który uzasadnia wybór -0.95 . Rozważamy macierz $\tilde{A}_0$ z (3.28). Zdefiniujemy

$$\tilde{\Sigma} = \left\{ \tilde{A}_0^{-1}(x - x^*, \theta) : x \in \{Y = 0\}, \theta \in \mathbb{T} \right\}.$$

Innymi słowy, $\tilde{\Sigma}$ to sekcja $\{Y = 0\}$ rozważana w rozszerzonej przestrzeni fazowej, w lokalnych zmiennych które wynikają z afinicznej zmiany zmiennych danej za pomocą x^* i $\tilde{A}_0$. Zdecydowaliśmy się pracować w takich lokalnych zmiennych, ponieważ wtedy możemy bezpośrednio korzystać z oszacowania na lokalne rozmaitości niestabilne, które otrzymaliśmy w Podrozdziale 3.3. Z tego powodu wybraliśmy $\tilde{\Sigma}$ tej postaci.

Aby skorzystać z Twierdzenia 1.9 zdefiniujemy odwzorowania (1.22)

$$f_\varepsilon : \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{\Sigma}$$

następująco

$$f_\varepsilon(x, \theta) = \tilde{A}_0^{-1} \left(\mathcal{P}_\varepsilon \circ \mathcal{P}_\varepsilon \left((x^*, 0) + \tilde{A}_0(x, \theta) \right) - (x^*, 0) \right). \quad (3.50)$$

Oznacza to, że rozważamy odwzorowanie powrotu do sekcji $\{Y = 0\}$ wyrażone we współrzędnych lokalnych.

Uwaga 3.23. Jeśli rozważymy w przestrzeni czterowymiarowej PCR3BP orbity Lyapunova, to przetną one sekcję $\{Y = 0\}$ w dwóch punktach. Będą to punkty stałe dla złożenia dwóch odwzorowań powrotu z sekcji do sekcji: $\mathcal{P}_\varepsilon \circ \mathcal{P}_\varepsilon$. Jako, że pracujemy w przestrzeni z okresem 2π ze względu na rozszerzoną zmienną, te punkty w rozszerzonej przestrzeni fazowej stają się okręgami. Zatem pojedyncza orbita Lyapunova staje się teraz dwuwymiarowym torusem w rozszerzonej przestrzeni fazowej (Rysunek 3.6 po lewej). Przecięcie torusa z sekcją $\{Y = 0\}$ tworzy dwa rozłączne okręgi. Każde z nich to okrąg niezmienniczy pod odwzorowaniem $\mathcal{P}_{\varepsilon=0} \circ \mathcal{P}_{\varepsilon=0}$. Na przykład $\{x^*\} \times \mathbb{T}^1$ to jeden z takich niezmienniczych okręgów. Okrąg $\{x^*\} \times \mathbb{T}^1$, który jest niezmienniczy pod $\mathcal{P}_{\varepsilon=0} \circ \mathcal{P}_{\varepsilon=0}$, odpowiada okręgowi $\{0\} \times \mathbb{T}^1 \subset \tilde{\Sigma}$, który jest niezmienniczy pod działaniem $f_{\varepsilon=0}$.

Przed perturbacją dla $\varepsilon = 0$ definiujemy niezmienniczą rozmaitość normalnie hiperboliczną $\Lambda_0 \subset \tilde{\Sigma}$ jako

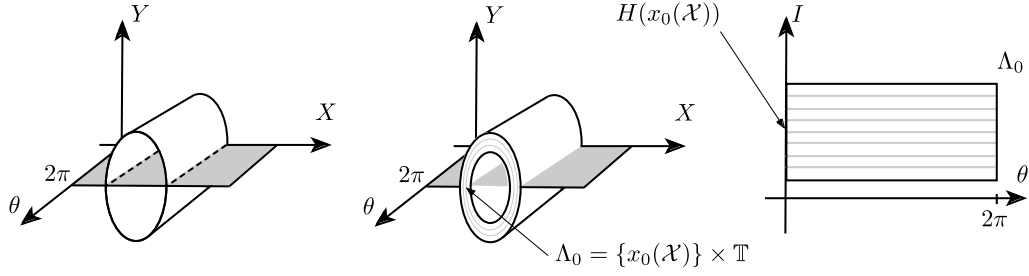
$$\Lambda_0 := \tilde{\Lambda}_L \cap \tilde{\Sigma}.$$

Znaleźć ją można na Rysunku 3.6, na środku. Na rozmaitości Λ_0 można wprowadzić foliację składającą się z niezmienniczych okręgów dla odwzorowania f_0 . Zauważmy, że dla $\varepsilon = 0$ energia jest zachowana, stąd dla

$$I(x) := H_0 \left((x^*, 0) + \tilde{A}_0 x \right) \quad (3.51)$$

zachodzi

$$I(f_0(x)) = I(x). \quad (3.52)$$



Rysunek 3.6. Lewo: Orbita Lyapunova w rozszerzonej przestrzeni fazowej jest torusem, który przecinając się z $\{Y = 0\}$ daje dwa okręgi oznaczane przerywanymi liniami. Środek: Rozmaitość $\Lambda_0 \subset \{Y = 0\}$ jest jedną z dwóch składowych przecięcia rodziny orbit Lyapunova w rozszerzonej przestrzeni fazowej z sekcją $\{Y = 0\}$. Prawo: Λ_0 w zmiennych (I, θ) . [11]

Traktujemy więc I jako zmienną „zachowywaną” (całkę pierwszą), gdyż dla $\varepsilon = 0$ mamy

$$\pi_I x = I(x).$$

Oznacza to, że warunek (3.52) pełni rolę (1.11).

Możemy zapisać odwzorowanie f_ε jako

$$f_\varepsilon(x) = f_0(x) + \varepsilon g(\varepsilon, x)$$

gdzie

$$\begin{aligned} g(0, x) &= \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial \varepsilon}(x)|_{\varepsilon=0} \\ g(\varepsilon, x) &= \frac{1}{\varepsilon} (f_\varepsilon(x) - f_0(x)) \quad \text{dla } \varepsilon \neq 0. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Aby obliczyć zmianę energii po iteracji $f_\varepsilon(x)$ obliczamy co dzieje się na zmiennej I , czyli

$$\pi_I f_\varepsilon(x) = \pi_I f_0(x) + \varepsilon \pi_I g(\varepsilon, x) = \pi_I x + \varepsilon \pi_I g(\varepsilon, x),$$

gdzie $\pi_I g(\varepsilon, x)$ to

$$\pi_I g(\varepsilon, x) = \frac{1}{\varepsilon} [I(f_\varepsilon(x)) - I(f_0(x))] = \frac{1}{\varepsilon} [I(f_\varepsilon(x)) - I(x)].$$

Z powyższego wynika, że

$$\pi_I g(0, x) = \frac{d}{d\varepsilon} I(f_\varepsilon(x))|_{\varepsilon=0} = DI(f_0(x)) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}(x) = \nabla I(f_0(x)) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}(x). \quad (3.54)$$

W powyższym równaniu $\cdot$ oznacza iloczyn skalarny.

Zakończyliśmy przygotowanie i poniżej przedstawimy dowód głównego twierdzenia [11].

Dowód Twierdzenia 2.1. Zaczniemy od opisanie naszego układu dla $\varepsilon = 0$. Przypomnimy kilka wyników dla problemu kołowego z poprzednich podrozdziałów. Należy pamiętać, że wcześniej opisywane wyniki problemu kołowego były rozważane we współrzędnych $(X, Y, P_X, P_Y) \in \mathbb{R}^4$, bez zmiennej θ . Poniżej do opisu dodamy rozszerzoną współrzędną czasową $\theta \in \mathbb{T}$.

Rozmaitość Λ_0 jest niezmiennicza pod działaniem f_0 . Można zapisać ją jako

$$\Lambda_0 = \{(x_0(\mathcal{X}), \theta) : \mathcal{X} \text{ jest z (2.1), } \theta \in \mathbb{T}\} \subset \mathbb{R}^4 \times \mathbb{T}.$$

Dla $\varepsilon = 0$ wewnętrzna dynamika indukowana poprzez f_0 na rozmaitości jest dana przez

$$(x_0(\mathcal{X}), \theta) \mapsto (x_0(\mathcal{X}), \theta + T(\mathcal{X})), \quad (3.55)$$

gdzie $T(\mathcal{X})$ jest okresem orbity Lyapunova $L_{\mathcal{X}}$. Stąd Λ_0 jest niezmienniczym cylindrem, który ma foliację złożoną z niezmienniczych okręgów.

Przypomnijmy, że dla pojedynczej orbity Lyapunova $L_{\mathcal{X}}$, w Lemacie 3.10 otrzymaliśmy oszacowania na krzywą $p^u(u)$, gdzie $u \in (-r, r)$, która leży wzdłuż przecięcia dwuwymiarowej lokalnej rozmaitości niestabilnej $L_{\mathcal{X}}$ (dla PCR3BP w $\mathbb{R}^4$) z sekcją $\{Y = 0\}$. Zwrócimy w naszym dowodzie uwagę na zależność $p^u(u)$ od $\mathcal{X}$ pisząc $p_{\mathcal{X}}^u(u)$. Rozmaitość niestabilna Λ_0 dla f_0 , gdy rozważamy ją w $\{Y = 0\}$ (w rozszerzonej przestrzeni fazowej) jest trójwymiarowa i możemy ją wyrazić lokalnie we współrzędnych X, P_X, P_Y, θ jako

$$W_{\Lambda_0}^u = \{(p_{\mathcal{X}}^u(u), \theta) : \mathcal{X} \text{ z przedziału (2.1), } u \in (-r, r), \theta \in \mathbb{T}\}.$$

Rozważmy $\mathcal{R}$ -symetrię PCR3BP w rozszerzonej przestrzeni fazowej na sekcji $\{Y = 0\}$, to znaczy

$$\tilde{\mathcal{R}}(X, P_X, P_Y, \theta) := (X, -P_X, P_Y, \theta).$$

Otrzymujemy w ten sposób stabilną rozmaitość lokalną

$$W_{\Lambda_0}^s = \tilde{\mathcal{R}}(W_{\Lambda_0}^u).$$

Pokażemy teraz, że dla $\varepsilon = 0$ mamy dobrze zdefiniowane odwzorowanie rozpraszające

$$\sigma : \Lambda_0 \rightarrow \Lambda_0. \quad (3.56)$$

Najpierw opiszemy jak wygląda kanał homokliniczny. Na podstawie Lematów 3.17 oraz 3.19 wiemy, że dwuwymiarowe rozmaitości, stabilna i niestabilna $L_{\mathcal{X}}$ w PCR3BP w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ przecinają się transversalnie (gdy rozważamy je w trójwymiarowej przestrzeni o stałej energii $\{H_0 = I\}$, gdzie $I = H_0(L_{\mathcal{X}})$) wzdłuż $\mathcal{R}$ -symetrycznej orbity homoklinicznej, która zawiera punkty które oznaczmy jako $\gamma(I) \in \{Y = 0\}$. Rozmaitości stabilna i niestabilna dla danej orbity Lyapunova $L_{\mathcal{X}}$, gdy przecinają się z sekcją $\{Y = 0\}$, stają się jednowymiarowymi krzywymi na $\{Y = 0\}$ które przecinają się w $\gamma(I)$. Oznaczmy te krzywe jako $w_I^u(u)$ i $w_I^s(s)$. Będziemy tu zakładać, że $w_I^u(0) = w_I^s(0) = \gamma(I)$ - możemy to zapewnić poprzez reparametryzację tych krzywych. Dodaliśmy przy zapisie w indeksie dolnym I , aby podkreślić, że te krzywe zależą od wyboru poziomu energii: na innych poziomach energii mamy

inne orbity Lyapunova, które dają nam inne krzywe. W dowodzie Lematu 3.19 pokazaliśmy, że styczne wektory tych krzywych rozpinają płaszczyznę X, P_X , tj.

$$\text{span} \left(\pi_{X, P_X} \frac{d}{du} w_I^u(u) |_{u=0}, \pi_{X, P_X} \frac{d}{ds} w_I^s(s) |_{s=0} \right) = \mathbb{R}^2. \quad (3.57)$$

Niech

$$\Gamma := \{(\gamma(I), \theta) : I = H_0(L_{\mathcal{X}}), \mathcal{X} \text{ jest z (2.1) oraz } \theta \in \mathbb{T}\} \subset \tilde{\Sigma}. \quad (3.58)$$

Udowodnimy, że jest to dobrze zdefiniowany kanał homokliniczny poprzez wykazanie warunków spełnienia (1.5–1.8).

W naszym przypadku sprawdzenie warunków na transwersalność (1.5–1.8) we współrzędnych X, P_X, I, θ będzie wygodne, ponieważ w tych współrzędnych możemy odpowiednio parametryzować Λ_0 poprzez I, θ (Rysunek 3.6 po prawej)

$$\Lambda_0 = \{(\pi_{X, P_X} x_0(\mathcal{X}), I, \theta) : I \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{T}, H_0(L_{\mathcal{X}}) = I\}.$$

Blisko przecięcia stabilnej i niestabilnej rozmaitości w punkcie $(\gamma(I), \theta)$ możemy sparametryzować rozmaitość $W_{\Lambda_0}^u$ poprzez I, θ, u w następujący sposób

$$W_{\Lambda_0}^u = \{(\pi_{X, P_X} w_I^u(u), I, \theta) : I \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{T}, u \in \mathbb{R}\}.$$

W podobny sposób możemy parametryzować rozmaitość $W_{\Lambda_0}^u$ przez I, θ, s jako

$$W_{\Lambda_0}^s = \{(\pi_{X, P_X} w_I^s(s), I, \theta) : I \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{T}, s \in \mathbb{R}\},$$

oraz parametryzować Γ przez I, θ jak w definicji (3.58). Zauważmy, że w punkcie $(\gamma(I), \theta) \in \Gamma$

$$T_{(\gamma(I), \theta)} W_{\Lambda_0}^u = \text{span} \left\{ \left(\pi_{X, P_X} \frac{d}{du} w_I^u(u) |_{u=0}, 0, 0 \right), \left(\pi_{X, P_X} \frac{d}{dI} w_I^u(0), 1, 0 \right), (0, 0, 0, 1) \right\}, \quad (3.59)$$

$$T_{(\gamma(I), \theta)} W_{\Lambda_0}^s = \text{span} \left\{ \left(\pi_{X, P_X} \frac{d}{ds} w_I^s(s) |_{s=0}, 0, 0 \right), \left(\pi_{X, P_X} \frac{d}{dI} w_I^s(0), 1, 0 \right), (0, 0, 0, 1) \right\}, \quad (3.60)$$

$$T_{(\gamma(I), \theta)} \Gamma = \text{span} \left\{ \left(\pi_{X, P_X} \frac{d}{dI} \gamma(I), 1, 0 \right), (0, 0, 0, 1) \right\}. \quad (3.61)$$

Wiemy, że krzywa $\gamma(I)$ pochodzi z przecięcia $w_I^u(u)$ oraz $w_I^s(s)$ dla $u = s = 0$

$$\gamma(I) = w_I^u(0) = w_I^s(0),$$

zatem

$$\pi_{X, P_X} \frac{d}{dI} \gamma(I) = \pi_{X, P_X} \frac{d}{dI} w_I^u(0) = \pi_{X, P_X} \frac{d}{dI} w_I^s(0). \quad (3.62)$$

Zatem z tego, że zachodzi (3.57), (3.59–3.62) otrzymujemy (1.5–1.6).

Teraz udowodnimy, że zachodzi (1.7–1.8). Dla ustalonego I weźmy $x = x_0(\mathcal{X})$, dla $\mathcal{X}$ takiego, że $H_0(L_{\mathcal{X}}) = I$. Rozważmy ustalone $\lambda \in \mathbb{T}$. Zauważmy, że niestabilne i stabilne włókno dla punktu $(x, \lambda) \in \Lambda_0$ są parametryzowane przez u i s , odpowiednio jako

$$\begin{aligned} W_{(x,\lambda)}^u &= \left\{ \left(\pi_{X,P_X} w_I^u(u), I, \theta_{I,\lambda}^u(u) \right) : u \in \mathbb{R} \right\}, \\ W_{(x,\lambda)}^s &= \left\{ \left(\pi_{X,P_X} w_I^s(s), I, \theta_{I,\lambda}^s(s) \right) : s \in \mathbb{R} \right\}, \end{aligned}$$

gdzie $\theta_{I,\lambda}^u, \theta_{I,\lambda}^s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ są pewnymi funkcjami, które parametryzują włókna wzdłuż współrzędnej θ . Zatem dla każdego I, θ przestrzenie styczne to

$$T_{(\gamma(I),\theta)} W_{(x,\theta)}^u = \text{span} \left\{ \left(\pi_{X,P_X} \frac{d}{du} w_I^u(u) \big|_{u=0}, 0, \frac{d}{du} \theta_{I,\theta}^u(u) \big|_{u=0} \right) \right\}, \quad (3.63)$$

$$T_{(\gamma(I),\theta)} W_{(x,\theta)}^s = \text{span} \left\{ \left(\pi_{X,P_X} \frac{d}{ds} w_I^s(s) \big|_{s=0}, 0, \frac{d}{ds} \theta_{I,\theta}^s(s) \big|_{s=0} \right) \right\}. \quad (3.64)$$

Z (3.60), (3.61), (3.62) oraz (3.64) otrzymujemy (1.7). Podobnie z (3.59), (3.61), (3.62) oraz (3.63) otrzymamy (1.8). Pokazaliśmy, że Γ jest dobrze zdefiniowanym kanałem homoklinicznym.

Rozważmy teraz odwzorowanie rozpraszające (3.56) odpowiadające kanałowi Γ . Aby włókna $W_{(x_-, \theta_-)}^u$ i $W_{(x_+, \theta_+)}^s$ przecinały się musi zachodzić $x_+ = x_-$, ponieważ w przeciwnym wypadku punkty x_- , x_+ leżałyby na innym poziomie energii, a zatem ich włókna nie mogłyby się przeciąć. Oznacza to, że

$$\sigma(x, \lambda) = (x, \pi_\theta \sigma(x, \lambda)).$$

Pokażemy teraz jak oszacować odwzorowanie $\pi_\theta \sigma(x, \lambda)$.

Dla każdego $(x, \lambda) \in \Lambda_0$ mamy orbitę homokliniczną, którą otrzymaliśmy w podrozdziale 3.4 (Tabela 3.4) startującą z punktu $x_0 = x_0(x, \lambda)$ leżącego na niestabilnym włóknie, które otrzymaliśmy w Lemacie 3.15. Z (3.30) wynika, że

$$|\pi_\theta x_0(x, \lambda) - \lambda| \leq Mr = 3 \cdot 3 \cdot 10^{-8}.$$

Gdy $x_0(x, \lambda)$ iterujemy odwzorowaniem f_0 , kąt θ zmienia się. Z Uwagi 3.18 wiemy, że po pełnym obrocie wzdłuż orbity homoklinicznej z Tabeli 3.4 wrócimy do otoczenia Λ_0 z kątem $\pi_\theta x_0(x, \lambda) + 42 \cdot h$, gdzie $h = h(x)$ jest z przedziału (3.33). Taka orbita homokliniczna powracająca oznacza pięć iteracji odwzorowania f_0 . Stąd

$$\pi_\theta f_0^5(x_0(x, \lambda)) = \pi_\theta x_0(x, \lambda) + 42 \cdot h.$$

Wiemy, że $f_0^5(x_0(x, \lambda))$ leży na stabilnym włóknie dla $f_0^5(\sigma(x, \lambda))$. Zauważmy też, że

$$f_0^5(\sigma(x, \lambda)) = f_0^5(x, \pi_\theta \sigma(x, \lambda)) = (x, \pi_\theta \sigma(x, \lambda) + 5T(x)),$$

gdzie $T(x)$ jest okresem orbity Lyapunova. Z Lematu 3.15 i $\mathcal{R}$ -symetrii naszego układu, skoro $f_0^5(x_0(x, \lambda)) \in W_{f_0^5(\sigma(x, \lambda))}^s$, to oznacza, że

$$|\pi_\theta(f_0^5(x_0(x, \lambda)) - f_0^5(\sigma(x, \lambda)))| \leq Mr.$$

Z powyższego możemy zapisać następujące oszacowanie na odwzorowanie rozpraszające

$$\begin{aligned}
 \pi_\theta \sigma(x, \lambda) &= \pi_\theta \sigma(x, \lambda) + 5T(x) - 5T(x) \\
 &= \pi_\theta f_0^5(\sigma(x, \lambda)) - 5T(x) \\
 &= \pi_\theta f_0^5(x_0(x, \lambda)) + \pi_\theta(f_0^5(\sigma(x, \lambda)) - f_0^5(x_0(x, \lambda))) - 5T(x) \\
 &\in \pi_\theta x_0(x, \lambda) + 42 \cdot h + [-Mr, Mr] - 5T(x) \\
 &= \lambda + (\pi_\theta x_0(x, \lambda) - \lambda) + 42 \cdot h + [-Mr, Mr] - 5T(x) \\
 &\in \lambda + [-Mr, Mr] + 42 \cdot h + [-Mr, Mr] - 5T(x) \\
 &\in \lambda + [-0.82506903038, -0.82506533656].
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

Jest to oszacowanie na odwzorowanie dla niepertubowanego układu.

Powyższy wniosek kończy rozważanie układu przed perturbacją. Następnie pokażemy, że dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ rozmiatość Λ_0 przetrwa pod wpływem perturbacji.

Przypomnijmy, że rodzinę orbit Lyapunova w rozszerzonej przestrzeni fazowej oznaczaliśmy jako $\tilde{\Lambda}_L$ (3.39). Przypomnijmy również, że $\Lambda_0 = \tilde{\Lambda}_L \cap \{Y = 0\}$. Z Wniosku 3.22 wiemy, że dla dostatecznie małego ε normalnie hiperboliczna rozmiatość niezmiennicza $\tilde{\Lambda}_L$ jest perturbowana w bliską rozmiatość $\tilde{\Lambda}_L^\varepsilon$. Zatem otrzymujemy $\Lambda_\varepsilon := \tilde{\Lambda}_L^\varepsilon \cap \{Y = 0\}$ jako perturbację rozmiatości Λ_0 .

Uzasadnimy teraz, że dla dostatecznie małych $\varepsilon \geq 0$ standardowa forma symplektyczna zacieśniona do rozmiatości Λ_ε jest niezdegenerowana. Jest to potrzebne do zapewnienia faktu, że f_ε zachowuje miarę na Λ_ε , co jest potrzebnym warunkiem dla metody z podrozdziału 1.4.1; w szczególności dla skorzystania z Twierdzenia 1.9.

Niech ω_ε będzie następującą formą symplektyczną na $\{Y = 0\}$

$$\omega_\varepsilon = dX \wedge dP_X - \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial X} dX \wedge d\theta - \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial P_X} dP_X \wedge d\theta - \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial P_Y} dP_Y \wedge d\theta. \tag{3.66}$$

Odwzorowanie $\mathcal{P}_\varepsilon$ jest ω_ε -symplektyczne; patrz Lemat A.1 w podrozdziale A.1 Dodatku. Macierz Ω odpowiadająca formie symplektycznej ω_0 ma postać

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{\partial H_0}{\partial X} \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{\partial H_0}{\partial P_X} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial H_0}{\partial P_Y} \\ \frac{\partial H_0}{\partial X} & \frac{\partial H_0}{\partial P_X} & \frac{\partial H_0}{\partial P_Y} & 0 \end{pmatrix}.$$

Wyznamy teraz macierz zadającą formę symplektyczną na Λ_0 . Rozmiatość Λ_0 jest parametryzowana przez funkcję $\lambda_0 : (\mathcal{X}, \theta) \mapsto (x_0(\mathcal{X}), \theta)$ w taki sposób, że przestrzeń styczną $T\Lambda_0$ jest rozpinana przez dwa wektory: $\lambda^1 := \frac{\partial \lambda_0}{\partial \mathcal{X}} = (1, 0, \frac{ds}{d\mathcal{X}}, 0)$ oraz $\lambda^2 := \frac{\partial \lambda_0}{\partial \theta} = (0, 0, 0, 1)$. Skonstruujemy macierz rozmiaru 4×2 , na której w kolumnach stawiamy λ^1 i λ^2 i oznaczymy ją jako C . Zauważmy, że macierz odpowiadająca formie symplektycznej $\omega_0|_{\Lambda_0}$ jest równa

$$C^T \Omega C = \begin{pmatrix} 0 & -\left(\frac{\partial H_0}{\partial X} + \frac{\partial H_0}{\partial P_Y} \frac{ds}{d\mathcal{X}}\right) \\ \frac{\partial H_0}{\partial X} + \frac{\partial H_0}{\partial P_Y} \frac{ds}{d\mathcal{X}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{d}{d\mathcal{X}}H_0(x_0(\mathcal{X})) \\ \frac{d}{d\mathcal{X}}H_0(x_0(\mathcal{X})) & 0 \end{pmatrix}.$$

Z Lematu 3.21 wynika, że dla $\mathcal{X}$ z przedziału (2.1) mamy $\frac{d}{d\mathcal{X}}H_0(x_0(\mathcal{X})) \neq 0$, a stąd $\omega_0|_{\Lambda_0}$ jest niezdegenerowana. To oznacza, że dla dostatecznie małego ε forma symplektyczna $\omega_\varepsilon|_{\Lambda_\varepsilon}$ jest również niezdegenerowana. Odwzorowanie $\mathcal{P}_\varepsilon$ jest ω_ε -symplektyczne (patrz: Lemat A.1). Zatem $\mathcal{P}_\varepsilon \circ \mathcal{P}_\varepsilon$ jest $\omega_\varepsilon|_{\Lambda_\varepsilon}$ -symplektyczne na Λ_ε . Możemy zdefiniować miarę na Λ_ε następująco

$$\mu(B) := \int_{(x^*,0)+\tilde{A}_0 B} \omega_\varepsilon|_{\Lambda_\varepsilon} \quad \text{dla } B \subset \Lambda_\varepsilon. \quad (3.67)$$

Dla tak zdefiniowanej miary, f_ε zdefiniowane w (3.50) zachowuje miarę.

Z Twierdzenia 3.20 wiemy, że $\tilde{\Lambda}_L^\varepsilon$ jest rozmaitością z brzegiem zawierającą dwa dwuwymiarowe niezmiennicze torusy KAM. Torusy te przecięte z sekcją $\{Y=0\}$ tworzą dwie krzywe, które są niezmiennicze pod działaniem f_ε . Stają się one brzegami Λ_ε . Stad Λ_ε jest normalnie hiperboliczną rozmaitością niezmienniczą z brzegiem dla f_ε . Podobnie dwuwymiarowe torusy KAM w $\tilde{\Lambda}_L^\varepsilon$ stają się jednowymiarowymi niezmienniczym torusami w Λ_ε .

Teraz sprawdzimy założenia Twierdzenia 1.9. Będziemy rozważać wszystko w lokalnych zmiennych danych afiniczną zmianą zmiennych zawierającą macierz $\tilde{A}_0$ i x^* , w których jest wyrażone odwzorowanie f_ε . W Lemacie 3.10 i Wniosku 3.11 otrzymaliśmy oszacowania na przecięcie lokalnej niestabilnej rozmaitości orbity Lyapunova z sekcją $\{Y=0\}$. To oszacowanie mamy dla otoczenia Λ_0 postaci

$$U = [-r, r]^4 \times \mathbb{T}, \quad (3.68)$$

dla $r = 3 \cdot 10^{-8}$ otrzymanego w Lemacie 3.10. Przeprowadziliśmy obliczenia komputerowe i otrzymaliśmy stałą L_g z (1.14) równą

$$L_g = 90943. \quad (3.69)$$

Ta wielkość została obliczona używając metody opisanej dokładniej w podrozdziale A.4 w Dodatku. Wartość otrzymana w (3.69) jest dużym przeszacowaniem. Można przeprowadzić staranniejsze obliczenia, na przykład dzieląc U na mniejsze części, wtedy otrzymamy znacznie dokładniejsze oszacowanie. Ponieważ rozważamy małe otoczenie (3.68) w którym jest lokalna niestabilna rozmaitość, widać że stała C z (1.15) będzie niewielka

$$C = r = 3 \cdot 10^{-8}. \quad (3.70)$$

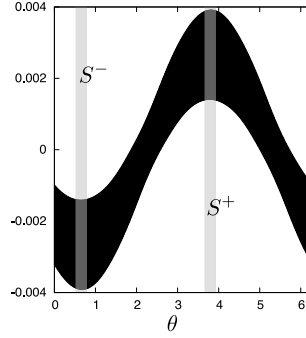
Zatem duża wartość L_g nam nie przeszkadza, ponieważ L_g jest wymnażane w (1.17) przez C . Użyliśmy oszacowania $\bar{m}$ z Uwagi 3.14, aby otrzymać

$$\lambda = (\bar{m})^{-30} = \frac{1}{1525.16}.$$

Jako, że do pełnego obrotu orbity Lyapunova potrzebujemy 30 lokalnych odwzorowań (3.8) - patrz Tabela 3.2, w wykładniku pojawia się liczba 30.

Rozważamy teraz następujące paski na Λ_0

$$S^- = \Lambda_0 \cap \{\theta \in [0.65 - 0.125, 0.65 + 0.125]\},$$



Rysunek 3.7. Komputerowe oszacowanie dla pierwszych pięciu wyrazów sumy (3.72), zależnie od $\pi_\theta z$ [11].

$$S^+ = \Lambda_0 \cap \{\theta \in [\pi + 0.65 - 0.125, \pi + 0.65 + 0.125]\}.$$

Powyższe ustawienie pasków jest motywowane obliczeniem

$$\sum_{i=0}^4 \pi_I g(0, f_0^i(x)), \quad (3.71)$$

które reprezentuje zmianę energii po przemieszczeniu się wzdłuż orbity homoklinicznej. Na Rysunku 3.7 można znaleźć wykres komputerowych oszacowań na (3.71), dla różnych $\pi_\theta z$ oraz umiejscowienie pasków S^+, S^- . Zauważmy, że umiejscowiliśmy paski S^+ i S^- tak, żeby dla punktów z S^+ (3.71) było większe od zera, a dla punktów z S^- żeby (3.71) było mniejsze od zera.

Dla każdego punktu $z \in S^+$ obliczamy $m = m(z)$ takie, że warunek (1.16) jest spełniony. W zależności od wyboru z wartość m może być różna. Do obliczeń wykorzystaliśmy oszacowanie na σ z (3.65) oraz fakt, że wewnętrzna dynamika jest zdeterminowana przez (3.55) z oszacowaniem na okres $T(\mathcal{X})$ otrzymanym w (3.6). Sprawdzamy założenia Twierdzenia 1.7 dzieląc S^+ na 25 fragmentów wzdłuż zmiennej θ i weryfikując je dla każdej części niezależnie. Dla pierwszych trzech fragmentów dla których θ było bliskie $\pi + 0.65 - 0.125$ okazało się, że dobrym wyborem będzie $m(z) = 21$; dla trzech fragmentów dla których θ było blisko $\pi + 0.65 + 0.125$ wybraliśmy $m(z) = 25$; oraz dla pozostałych użyliśmy $m(z) = 23$. Dla $z \in S^+$ punkt $x \in W_z^u$ z warunku 2. z Twierdzenia 1.7, jest pierwszym punktem z homoklinicznej orbity z Lematu 3.17. Dla ułożenia x wzdłuż θ użyliśmy oszacowania (3.30) z Lematu 3.15. Sprawdziliśmy, że

$$\sum_{i=0}^{m(z)-1} \pi_I g(0, f_0^i(x)) - \frac{1+\lambda}{1-\lambda} L_g C > 0. \quad (3.72)$$

Nierówność (3.72) została sprawdzona z pomocą komputerowo wspieranych obliczeń. Oznacza to, że założenia Twierdzenia 1.7 są w naszym przypadku spełnione.

Analogicznie sprawdziliśmy założenia Twierdzenia 1.8.

Warunek 1. i 2. z Twierdzenia 1.9 są proste do sprawdzenia, ponieważ dla każdego punktu $z = (x_0(\mathcal{X}), \lambda) \in \Lambda_0$ zachodzi

$$\pi_\theta f(z) = \lambda + T(\mathcal{X}),$$

gdzie $T(\mathcal{X})$ jest okresem orbity Lyapunova, którego oszacowanie poznaliśmy w (3.6).

Pokazaliśmy że spełnione są założenia Twierdzenia 1.9. Teza Twierdzenia 2.1 wynika więc teraz bezpośrednio z Twierdzenia 1.9, co kończy nasz dowód. $\square$

Uwaga 3.24. Ponieważ pracujemy z konkretną rodziną orbit Lyapunova, które odpowiadają poziomowi energii komety Oterma, okazało się, że wartość m użyta w 1. i 2. warunku Twierdzeń 1.7 i 1.8 jest bardzo duża. Potrzebowaliśmy zatem dużej liczby iteracji f_0 podczas liczenia (3.72), która powoduje długi czas całkowania. Użyliśmy też dość szerokich pasków S^+ i S^- . Spowodowało to, że trzeba było wiele podziałów, żeby przeprowadzić obliczenia. Długi czas całkowania oraz duża liczba zbiorów sprawiły, że czas dowodu się wydłużył. Gdybyśmy inaczej dobrali poziom energii można by było się skupić na takich orbitach Lyapunova, dla których m byłoby znacznie mniejsze. Nie robiliśmy tego, ponieważ zależało nam na pokazaniu metody, którą można użyć dla takiej wartości energii, która jest powiązana z konkretnym fizycznym obiektem w przestrzeni.

Zakończenie

W niniejszej rozprawie rozpatrywaliśmy autonomiczny układ hamiltonowski w przypadku orbit eliptycznych, czyli eliptyczny ograniczony problem trzech ciał na płaszczyźnie (PER3BP). Układ przed perturbacją (PCR3BP) posiada normalnie hiperboliczną rozmaitość niezmienniczą, której rozmaitości stabilna i niestabilna przecinają się transwersalnie. Jako główny wynik naszej pracy w Twierdzeniu 2.1 dowodzimy, że zachodzi dyfuzja poprzez wykazanie istnienia trajektorii śledzących te przecięcia oraz zmianę ich energii, gdy układ jest perturbowany.

Głównym narzędziem, który wykorzystaliśmy do dowodu było odwzorowanie rozpraszające wraz z twierdzeniem śledzącym [13, 19]. Dzięki niemu mogliśmy śledzić rzeczywiste zachowanie układu. Klasycznie badanie wpływu perturbacji odbywa się za pomocą całek Melnikova [7]. W naszej rozprawie wykorzystaliśmy konstrukcję z [10] i szacowaliśmy skończone sumy Melnikova wzdłuż odwzorowania Poincarégo.

Nasz dowód głównie skupia się na badaniach i oszacowaniach dla problemu kołowego (PCR3BP). Wykorzystaliśmy fakt, że normalnie hiperboliczna rozmaitość niezmiennicza przetrwa po perturbacji [7]. Do przeprowadzenia dowodu wspieranego komputerowo wykorzystaliśmy ściśle obliczenia w arytmetyce przedziałowej. Zastosowane zostały powszechne metody takie jak metoda strzałów równoległych, metoda Krawczyka oraz warunki stożków. Przy implementacji skorzystaliśmy z biblioteki CAPD.

Konstrukcja z [10] może być wykorzystana do oszacowań przy podobnych problemach, gdy trudno jest obliczyć dokładne oszacowania na trajektorie układu lub pojawia się problem z przeszacowaniem. Korzyścią z wykorzystania tej metody jest sprawdzanie założeń dla nieperturbowanego układu w skończonej liczbie kroków.

Dodatek A

Dowody lematów i niektórych własności

W tym rozdziale znajdują się techniczne lematy potrzebne do wykonania pewnych oszacowań w rozprawie.

A.1. Własności symplektyczne odwzorowań Poincarégo

W tym rozdziale omówimy własności symplektyczne odwzorowań Poincarégo dla układów hamiltonowskich zależnych od czasu w rozszerzonej przestrzeni fazowej. Pokażemy skąd pochodzi formuła (3.66) na formę symplektyczną na sekcji Poincarégo pod którą odwzorowanie Poincarégo w rozszerzonej przestrzeni fazowej jest symplektyczne.

Rozważmy układ hamiltonowski zależny od czasu z funkcją $H : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i założmy, że zmiana czasu jest 2π -okresowa. Mamy $x = (p, q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, gdzie p to współrzędne położenia a q to odpowiadające pędy. Weźmy standardową formę symplektyczną $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$. Pole wektorowe w rozszerzonej przestrzeni fazowej indukowane przez Hamiltonian ma postać

$$\begin{aligned} x' &= J \nabla_x H(x, t), \\ t' &= 1, \end{aligned} \tag{A.1}$$

gdzie

$$J = J_n := \begin{pmatrix} 0 & Id_n \\ -Id_n & 0 \end{pmatrix},$$

oraz Id_n to n -wymiarowa macierz identyczności.

Rozważmy sekcję $\Sigma := \{p_n = 0\} \subset \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$ oraz założmy, że mamy lokalnie dobrze zdefiniowane odwzorowanie Poincarégo

$$P : \Sigma \rightarrow \Sigma.$$

Lemat A.1. *Dla formy symplektycznej*

$$\omega_\Sigma := \sum_{i=1}^{n-1} dp_i \wedge dq_i - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \wedge dt - \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \wedge dt, \quad (\text{A.2})$$

odwzorowanie P jest ω_Σ -symplektyczne. Ponadto, ω_Σ jest niezdegenerowana.

Dowód. Możemy rozszerzyć już rozszerzoną przestrzeń fazową poprzez użycie „sztucznej” dodatkowej zmiennej A i zdefiniować Hamiltonian $\mathcal{H} : \mathbb{R}^{2(n+1)} \rightarrow \mathbb{R}$ jako

$$\mathcal{H}(p, A, q, t) := H(p, q, t) + A$$

oraz biorąc standardową formę symplektyczną $\bar{\omega} = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i + dA \wedge dt$. Pole wektorowe przyjmuje postać $\mathcal{F} = \mathcal{J} \nabla \mathcal{H}$, gdzie $\mathcal{J} = J_{n+1}$. Zauważmy, że pomijając sztucznie wprowadzoną zmienną A rozwiązania $\mathcal{F}$ pokrywają się z rozwiązaniami (A.1).

Niech $h \in \mathbb{R}$ będzie pewną liczbą oraz rozważmy sekcję $\Sigma_h := \{p_n = 0, \mathcal{H} = h\} \subset \mathbb{R}^{2(n+1)}$ oraz odwzorowanie Poincarégo $\mathcal{P}_h : \Sigma_h \rightarrow \Sigma_h$. Odwzorowanie $\mathcal{P}_h$ jest symplektyczne [3] z formą $\omega_h = \sum_{i=1}^{n-1} dp_i \wedge dq_i + dA \wedge dt$. Możemy parametryzować sekcję Σ_h używając zmiennych $(p_1, \dots, p_{n-1}, q, t)$, ponieważ

$$\Sigma_h = \{(p_1, \dots, p_{n-1}, 0, A, q, t) : A = h - H(p_1, \dots, p_{n-1}, 0, q, t)\}.$$

Ponieważ na Σ_h mamy $A = h - H(p_1, \dots, p_{n-1}, 0, q, t)$, to w zmiennych $(p_1, \dots, p_{n-1}, q, t)$, mamy

$$\omega_h = \omega_\Sigma.$$

Zauważmy, że we współrzędnych $(p_1, \dots, p_{n-1}, q, t)$ odwzorowanie Poincarégo $\mathcal{P}_h$ oraz forma symplektyczna ω_h nie zależą od h . Ponadto, w tych zmiennych $\mathcal{P}_h = P$. Zatem otrzymujemy, że P jest ω_Σ -symplektyczne, co chcieliśmy udowodnić.

Macierz Ω odpowiadająca ω_Σ , (t.j. $\omega_\Sigma(v, w) = v^\top \Omega w$) ma postać

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & & 0 & 0 & -\frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -\frac{\partial H}{\partial p_{n-1}} \\ -1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{\partial H}{\partial q_1} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{\partial H}{\partial q_{n-1}} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{\partial H}{\partial q_n} \\ \frac{\partial H}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial H}{\partial p_{n-1}} & \frac{\partial H}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial H}{\partial q_{n-1}} & \frac{\partial H}{\partial q_n} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Skoro odwzorowanie Poincarégo jest dobrze definiowane, mamy $\frac{\partial H}{\partial q_n} \neq 0$. Z tego, że dla każdego w mamy $v^\top \Omega w = 0$ wynika, że $v = 0$, a zatem ω_Σ jest niezdegenerowana, co było do udowodnienia. $\square$

A.2. Dowód Lematu 3.7

Przypomnijmy treść lematu

Lemat. Rozważmy $Q(v_1, \dots, v_4) = |v_1| - \|(v_2, v_3, v_4)\|$ z normą

$$\|(x_1, x_2, x_3)\| = \max\{|x_1|/a_1, |x_1|/a_2, |x_3|/a_3\},$$

gdzie $a_1, a_2, a_3 \in (0, 1)$. Niech $f : B \rightarrow \mathbb{R}^4$ takie, że $f(0) = 0$ oraz

$$[Df(B)] = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

gdzie A_{11} , A_{12} , A_{21} i A_{22} to macierze przedziałowe odpowiednio wymiarów 1×1 , 1×3 , 3×1 i 3×3 . Jeśli $A_{11} > c > 0$ i $m = c - \|A_{12}\|_{\max} \max(a_1, a_2, a_3)$, to

$$\|f(v)\|_{\max} \geq m \|v\|_{\max} \quad \text{dla każdego } v \in Q^+(0) \cap B.$$

Dowód. Weźmy $v \in Q^+(0) \cap B$. Skoro $a_i \in (0, 1)$ widzimy, że $|v_1| \geq |v_i|/a_{i-1} > |v_i|$, dla $i = 2, 3, 4$. Ponieważ $f(0) = 0$, z twierdzenia o wartości średniej otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|f(v)\|_{\max} &= \|f(v) - f(0)\|_{\max} \\ &\in \|[Df(B)]v\|_{\max} \\ &= \|(A_{11}v_1 + A_{12}(v_2, v_3, v_4), A_{21}v_1 + A_{22}(v_2, v_3, v_4))\|_{\max} \\ &\geq |A_{11}v_1 + A_{12}(v_2, v_3, v_4)| \\ &\geq (c - \|A_{12}\|_{\max} \max(a_1, a_2, a_3)) |v_1| \\ &= (c - \|A_{12}\|_{\max} \max(a_1, a_2, a_3)) \|v\|_{\max}, \end{aligned}$$

co należało wykazać. □

A.3. Dowód Lematu 3.8

Przypomnijmy treść lematu

Lemat. Rozważmy $Q(v_1, \dots, v_4) = |v_1| - \|(v_2, v_3, v_4)\|$ z normą

$$\|(x_1, x_2, x_3)\| = \max\{|x_1|/a_1, |x_1|/a_2, |x_3|/a_3\},$$

gdzie $a_1, a_2, a_3 \in (0, 1)$. Niech $f : B \rightarrow \mathbb{R}^4$ oraz niech

$$[Df(B)] = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

gdzie A_{11} , A_{12} , A_{21} i A_{22} są macierzami przedziałowymi mające odpowiednio wymiary 1×1 , 1×3 , 3×1 oraz 3×3 . Jeśli

$$a := \max(a_1, a_2, a_3), \quad (\text{A.6})$$

$$\bar{m} := \max(|A_{11}| + a \|A_{12}\|_{\max}, \|A_{21}\|_{\max} + a \|A_{22}\|_{\max}), \quad (\text{A.7})$$

to

$$\|f(v)\|_{\max} \leq \bar{m} \|v\|_{\max} \quad \text{dla każdego } v \in Q^+(0) \cap B.$$

Dowód. Niech $v = (v_1, v_2)$, gdzie $v_1 = \pi_1 v$ oraz $v_2 = \pi_{2,3,4} v$. Skoro $v \in Q^+(0)$, to mamy

$$|v_1| \geq a^{-1} \|v_2\|_{\max}.$$

Z twierdzenia o wartości średniej otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|f(v)\|_{\max} &\in \|[Df(B)]v\|_{\max} \\ &= \|(A_{11}v_1 + A_{12}v_2, A_{21}v_1 + A_{22}v_2)\|_{\max} \\ &\leq \max(|A_{11}| |v_1| + \|A_{12}\|_{\max} \|v_2\|_{\max}, \|A_{21}\|_{\max} |v_1| + \|A_{22}\|_{\max} \|v_2\|_{\max}) \\ &\leq \max(|A_{11}| + a \|A_{12}\|_{\max}, \|A_{21}\|_{\max} + a \|A_{22}\|_{\max}) |v_1| \\ &= \max(|A_{11}| + a \|A_{12}\|_{\max}, \|A_{21}\|_{\max} + a \|A_{22}\|_{\max}) \|v\|_{\max} \end{aligned}$$

co było do udowodnienia. $\square$

A.4. Oszacowanie stałej Lipschitza dla członu perturbacyjnego

W tej części podamy metodę dzięki której można sprawdzać założenie (1.14) w przypadku gdy $I(x)$ jest zdefiniowane jako (3.51). Zaczniemy od Lematu A.2, dzięki któremu można sprawdzać wspomniane założenie. Odkryliśmy, że w naszym przypadku dla PER3BP, przez długie czasy całkowania bezpośrednia aplikacja Lematu A.2 prowadzi do przeszacowań, które były zbyt duże. Zatem przestawimy Lemat A.3, którego można użyć w obliczeniach indykcyjnych na L_g przez wyrażenie f_ε jako złożenia odwzorowań. To pozwoliło nam uniknąć długich czasów całkowania i poprawiło oszacowania.

Lemat A.2. Niech $D^2I(x)$ oznacza Hessian funkcji I w punkcie x . Rozważmy $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}$ i niech $\mathbf{x} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}$ będzie wypukłym zbiorem zawierającym x_0, x_1 . Niech $\mathbf{v} \subset \mathbb{R}^4$ będzie następującą przedziałową otoczką

$$\mathbf{v}^\top = \left[\left(\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}(\mathbf{x}) \right)^\top D^2I(f_0(\mathbf{x})) Df_0(\mathbf{x}) + DI(f_0(\mathbf{x})) \frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial \varepsilon}(\mathbf{x}) \right].$$

Zauważmy, że prawa strona to macierz przedziałowa rozmiarów 1×4 . Jeśli $\|\mathbf{v}\| \leq L_g$ to wtedy

$$|\pi_{Ig}(0, x_1) - \pi_{Ig}(0, x_0)| \leq L_g \|x_1 - x_0\|.$$

Dowód. Niech

$$x_s := x_0 + s(x_1 - x_0).$$

Z (3.54) otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\pi_{Ig}(0, x_1) - \pi_{Ig}(0, x_0) \\ &= \int_0^1 \frac{d}{ds} \nabla I(f_0(x_s)) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}(x_s) ds \\ &= \int_0^1 D^2I(f_0(x_s)) Df_0(x_s) (x_1 - x_0) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}(x_s) + \nabla I(f_0(x_s)) \cdot \frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial \varepsilon}(x_s) (x_1 - x_0) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}(x_s) \cdot D^2 I(f_0(x_s)) Df_0(x_s) (x_1 - x_0) + \nabla I(f_0(x_s)) \cdot \frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial \varepsilon}(x_s) (x_1 - x_0) ds \\
 &= \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}(x_s) \right)^\top D^2 I(f_0(x_s)) Df_0(x_s) + DI(f_0(x_s)) \frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial \varepsilon}(x_s) ds \right) (x_1 - x_0) \\
 &\in \mathbf{v} \cdot (x_1 - x_0),
 \end{aligned}$$

zatem

$$|\pi_I g(0, x_1) - \pi_I g(0, x_0)| \leq \|\mathbf{v}\| \|x_1 - x_0\| \leq L_g \|x_1 - x_0\|,$$

co należało wykazać. $\square$

Teraz rozważymy przypadek, gdy f jest złożeniem dwóch funkcji $f = f_\varepsilon^1 \circ f_\varepsilon^2$. Naszym celem będzie obliczenie oszacowania Lipschitza na wyrażenia x dla

$$g(\varepsilon, x) := \frac{1}{\varepsilon} (I \circ f_\varepsilon^2 \circ f_\varepsilon^1(\varepsilon, x) - I(x)). \quad (\text{A.8})$$

Następujący lemat daje nam oszacowanie na $\pi_I g(0, x)$ z oszacowania na f_ε^1 i f_ε^2 .

Lemat A.3. *Założmy, że*

$$\begin{aligned}
 f_\varepsilon &= f_\varepsilon^2 \circ f_\varepsilon^1, \\
 g(\varepsilon, x) &= \frac{1}{\varepsilon} (f_\varepsilon(x) - f_0(x)), \\
 g_1(\varepsilon, x) &= \frac{1}{\varepsilon} (f_\varepsilon^1(x) - f_0^1(x)), \\
 g_2(\varepsilon, x) &= \frac{1}{\varepsilon} (f_\varepsilon^2(x) - f_0^2(x)),
 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 \|\pi_I(g_1(0, x_1) - g_1(0, x_0))\| &\leq L_g^1 \|x_1 - x_0\|, \\
 \|\pi_I(g_2(0, x_1) - g_2(0, x_0))\| &\leq L_g^2 \|x_1 - x_0\|, \\
 \|f_0^1(x_1) - f_0^1(x_0)\| &\leq L_f^1 \|x_1 - x_0\|.
 \end{aligned}$$

Wtedy

$$\|\pi_I(g(0, x_1) - g(0, x_0))\| \leq (L_g^2 L_f^1 + L_g^1) \|x_1 - x_0\|.$$

Dowód. Rozważmy ustalone x_1, x_0 . Wtedy

$$\begin{aligned}
 &\|\pi_I g(\varepsilon, x_1) - \pi_I g(\varepsilon, x_0)\| \\
 &= \left\| \frac{1}{\varepsilon} (I \circ f_\varepsilon^2 \circ f_\varepsilon^1(x_1) - I(x_1) - (I \circ f_\varepsilon^2 \circ f_\varepsilon^1(x_0) - I(x_0))) \right\| \\
 &\leq \left\| \frac{1}{\varepsilon} (I \circ f_\varepsilon^2 \circ f_\varepsilon^1(x_1) - I \circ f_\varepsilon^1(x_1) - (I \circ f_\varepsilon^2 \circ f_\varepsilon^1(x_0) - I \circ f_\varepsilon^1(x_0))) \right\| \\
 &\quad + \left\| \frac{1}{\varepsilon} (I \circ f_\varepsilon^1(x_1) - I(x_1) - (I \circ f_\varepsilon^1(x_0) - I(x_0))) \right\| \\
 &= \|\pi_I g_2(\varepsilon, f_\varepsilon^1(x_1)) - \pi_I g_2(\varepsilon, f_\varepsilon^1(x_0))\| + \|\pi_I g_1(\varepsilon, x_1) - \pi_I g_1(\varepsilon, x_0)\|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq L_g^2 \|f_\varepsilon^1(x_1) + f_\varepsilon^1(x_0)\| + L_g^1 \|x_1 + x_0\| + o(\varepsilon) \\ &\leq (L_g^2 L_f^1 + L_g^1) \|x_1 + x_0\| + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

Wymagany wynik otrzymujemy przejściem w granicy w ostatnim wyrażeniu z ε do zero. $\square$

Oszacowanie (1.14) obliczone w dowodzie (rozdział 3.6: wartość 3.69) jest oszacowaniem na odwzorowanie Poincarégo f_ε zdefiniowane w (3.50). Możemy to obliczyć rozważając

$$f_\varepsilon = f_{\varepsilon,N} \circ \dots \circ f_{\varepsilon,1}, \quad (\text{A.9})$$

gdzie $f_{\varepsilon,i}$ to lokalne odwzorowania postaci

$$\begin{aligned} f_{\varepsilon,i}(x) &= A_i^{-1} (\Phi_t^\varepsilon(x_{i-1} + A_{i-1}x) - x_i) \quad \text{for } i = 1, \dots, N-1, \\ f_{\varepsilon,N}(x) &= A_0^{-1} (\mathcal{P}^\varepsilon(x_{N-1} + A_{N-1}x) - x_0). \end{aligned}$$

Stosując indukcyjnie Lemat A.3 możemy użyć oszacowań $\bar{m}$ z Uwagi 3.14 oraz biorąc $L_f^1 = \bar{m}^k$ w k -tym kroku indukcji.

Energia po iteracji lokalnym odwzorowaniem jest postaci

$$I(f_{\varepsilon,i}(x)) = H_0(\Phi_t^\varepsilon(x_{i-1} + A_{i-1}x)).$$

Skoro

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx} \frac{d}{d\varepsilon} H_0(\Phi_t^\varepsilon(x_{i-1} + A_{i-1}x)) \\ &= \frac{d}{dx} \left(\nabla H_0(\Phi_t^\varepsilon(x_{i-1} + A_{i-1}x)) \cdot \frac{\partial \Phi_t^\varepsilon}{\partial \varepsilon}(x_{i-1} + A_{i-1}x) \right) \\ &= \left(\frac{\partial \Phi_t^\varepsilon}{\partial \varepsilon}(x_{i-1} + A_{i-1}x) \right)^\top D^2 H_0(\Phi_t^\varepsilon(x_{i-1} + A_{i-1}x)) \frac{\partial \Phi_t^\varepsilon}{\partial x}(x_{i-1} + A_{i-1}x) A_{i-1} \\ &\quad + D H_0(\Phi_t^\varepsilon(x_{i-1} + A_{i-1}x)) \frac{\partial^2 \Phi_t^\varepsilon}{\partial x \partial \varepsilon}(x_{i-1} + A_{i-1}x) A_{i-1} \end{aligned}$$

to $\mathbf{v}^\top$ wykorzystane do obliczenia L_g dla lokalnego odwzorowania $f_{\varepsilon,i}$ możemy obliczyć wykorzystując Lemat A.2. Stąd

$$\mathbf{v}^\top = \left[\left(\frac{\partial \Phi_t^\varepsilon}{\partial \varepsilon}(\mathbf{x}) \right)^\top D^2 H_0(\Phi_t^\varepsilon(\mathbf{x})) \frac{\partial \Phi_t^\varepsilon}{\partial x}(\mathbf{x}) A_{i-1} + D H_0(\Phi_t^\varepsilon(\mathbf{x})) \frac{\partial^2 \Phi_t^\varepsilon}{\partial x \partial \varepsilon}(\mathbf{x}) A_{i-1} \right]. \quad (\text{A.10})$$

Dla ostatniego odwzorowania $f_{\varepsilon,N}$ bierzemy $\mathcal{P}^\varepsilon$ zamiast Φ_t^ε w (A.10).

Bibliografia

- [1] G. Alefeld. Inclusion methods for systems of nonlinear equations—the interval Newton method and modifications. In *Topics in validated computations (Oldenburg, 1993)*, volume 5 of *Stud. Comput. Math.*, pages 7–26. North-Holland, Amsterdam, 1994.
- [2] V. I. Arnol’d. Instability of dynamical systems with many degrees of freedom. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 156:9–12, 1964.
- [3] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, volume 60 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1989.
- [4] Vladimir Igorevich Arnol’d. Proof of a theorem of a. n. kolmogorov on the preservation of conditionally periodic motions under a small perturbation of the hamiltonian. *Russian Mathematical Surveys*, 18:9–36, 1963.
- [5] Howard E. Bell. Gershgorin’s theorem and the zeros of polynomials. *American Mathematical Monthly*, 72:292–295, 1965.
- [6] Maciej J. Capiński. Computer assisted existence proofs of Lyapunov orbits at L_2 and transversal intersections of invariant manifolds in the Jupiter-Sun PCR3BP. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 11(4):1723–1753, 2012.
- [7] Maciej J. Capiński, Marian Gidea, and Rafael de la Llave. Arnold diffusion in the planar elliptic restricted three-body problem: mechanism and numerical verification. *Nonlinearity*, 30(1):329–360, 2017.
- [8] Maciej J. Capiński and Piotr Zgliczyński. Transition tori in the planar restricted elliptic three-body problem. *Nonlinearity*, 24(5):1395–1432, 2011.
- [9] Maciej J. Capiński and Marian Gidea. Arnold diffusion, quantitative estimates, and stochastic behavior in the three-body problem. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 76(3):616–681, 2023.
- [10] Maciej J. Capiński, Jorge Gonzalez, Jean-Pierre Marco, and Jason D. Mireles James. Computer assisted proof of drift orbits along normally hyperbolic manifolds. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 106:105970, 2022.
- [11] Maciej J. Capiński and Natalia Wodka-Cholewa. Computer assisted proof of drift orbits along normally hyperbolic manifolds ii: Application to the restricted three body problem. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 111:106424, 2022.
- [12] Amadeu Delshams, Rafael De la Llave, and Tere M-Seara. A geometric approach to the existence of orbits with unbounded energy in generic periodic perturbations by a potential of generic geodesic flows of T2. *Communications in Mathematical Physics*, 209:353–392, 02 2000.

-
- [13] Amadeu Delshams, Rafael de la Llave, and Tere M. Seara. Geometric properties of the scattering map of a normally hyperbolic invariant manifold. *Adv. Math.*, 217(3):1096–1153, 2008.
 - [14] Amadeu Delshams, Vadim Kaloshin, Abraham de la Rosa, and Tere M. Seara. Global instability in the restricted planar elliptic three body problem. *Comm. Math. Phys.*, 366(3):1173–1228, 2019.
 - [15] Amadeu Delshams and Rafael Ramírez-Ros. Poincaré-Mel’nikov-Arnol’d method for analytic planar maps. *Nonlinearity*, 9(1):1–26, 1996.
 - [16] Neil Fenichel. Asymptotic stability with rate conditions. *Indiana Univ. Math. J.*, 23:1109–1137, 1974.
 - [17] Neil Fenichel. Asymptotic stability with rate conditions for dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 80:346–349, 1974.
 - [18] Neil Fenichel. Asymptotic stability with rate conditions. II. *Indiana Univ. Math. J.*, 26(1):81–93, 1977.
 - [19] Marian Gidea, Rafael de la Llave, and Tere M-Seara. A general mechanism of diffusion in Hamiltonian systems: qualitative results. *Comm. Pure Appl. Math.*, 73(1):150–209, 2020.
 - [20] Marian Gidea, Rafael de la Llave, and Tere M. Seara. A general mechanism of instability in Hamiltonian systems: skipping along a normally hyperbolic invariant manifold. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 40(12):6795–6813, 2020.
 - [21] Victor Guillemin and Alan Pollack. *Differential Topology*. Prentice Hall, 1974.
 - [22] Poincaré Henri. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta Mathematica*, 13(1-2):1–270, 1890.
 - [23] M. W. Hirsch, C. C. Pugh, and M. Shub. Invariant manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 76:1015–1019, 1970.
 - [24] Tomasz Kapela, Marian Mrozek, Daniel Wilczak, and Piotr Zgliczyński. Capd::dysys: a flexible c++ toolbox for rigorous numerical analysis of dynamical systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, page 105578, 2020.
 - [25] Tomasz Kapela, Daniel Wilczak, and Piotr Zgliczyński. Recent advances in a rigorous computation of Poincaré maps. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 110:Paper No. 106366, 22, 2022.
 - [26] Tomasz Kapela, Daniel Wilczak, and Piotr Zgliczyński. Recent advances in a rigorous computation of poincaré maps. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 110:106366, 2022.
 - [27] Wang Sang Koon, Martin W. Lo, Jerrold E. Marsden, and Shane D. Ross. Heteroclinic connections between periodic orbits and resonance transitions in celestial mechanics. *Chaos*, 10(2):427–469, 2000.
 - [28] V. Szebehely. *Theory of Orbits: The Restricted Problem of Three Bodies*. Academic Press, 1967.
 - [29] Piotr Zgliczyński. Covering relations, cone conditions and the stable manifold theorem. *Journal of Differential Equations*, 246(5):1774–1819, 2009.