

AKADEMIA GÓRNICZO - HUTNICZA  
WYDZIAŁ IMiR  
ZADANIA Z MATEMATYKI DLA ROKU I  
ZESTAW XII

1. Obliczyć (jeśli istnieją) całki :

a)  $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$  , b)  $\int_0^{2a} \frac{dx}{(x-a)^2}$  ,  $a > 0$  , c)  $\int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$  , d)  $\int_{-1}^0 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$

e)  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$  , f)  $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 8x - 12}}$  , g)  $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x \ln^2 x}$  , h)  $\int_{-1}^1 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$  .

2. Obliczyć lub stwierdzić rozbieżność następujących całek :

a)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4}$  , b)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$  , c)  $\int_0^{\infty} e^{-5x} dx$  , d)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{x^2 + 1}$  , e)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + x}$  ,

f)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$  , g)  $\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$  , h)  $\int_{a^2}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$  , i)  $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx$  ,

j)  $\int_0^{\infty} x \sin x dx$  , k)  $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bxdx$  , l)  $\int_1^{\infty} \frac{\arctg x}{x^2} dx$  .

3. Zbadać zbieżność całek :

a)  $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{x^3 + 1}$  , b)  $\int_1^{\infty} \frac{x^3 + 1}{x^4} dx$  , c)  $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$  , d)  $\int_1^{\infty} \frac{x^2 - 2}{x^3 \sqrt{x^2 - 1}} dx$  .

4. Obliczyć pola obszarów ograniczonych liniami:

a)  $y = 3 - 2x - x^2$  ,  $y = 0$  ; b)  $xy = 4$  ,  $x = 1$  ,  $x = 4$  ,  $y = 0$  ;

c)  $y = x^2$  ,  $y = 2 - x^2$  ; d)  $y = x^2 + 4x$  ,  $y = x + 4$  ;

e) pole figury ograniczonej kardiodą:  $x = 2a \cos t - a \cos 2t$  ,  $y = 2a \sin t - a \sin 2t$

f) pole figury ograniczonej lemniskatą Bernoulli'ego :  $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$

5. Obliczyć objętość bryły utworzonej przez obrót wokół osi Ox figury ograniczonej liniami :

a)  $xy = 4$  ,  $x = 1$  ,  $x = 4$  ,  $y = 0$  ; b)  $y = \frac{1}{1+x^2}$  ,  $y = 0$  ,  $x = 1$  ,  $x = -1$  ,

c)  $x^2 - y^2 = a^2$  ,  $x = 2a$  ,  $x = -2a$  ; d)  $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$  ,  $x = 0$  ,  $y = 0$

(przy  $x > 0$ ) , e)  $x = a \cos^2 t$  ,  $y = b \sin^2 t$  (astroida) ,

f)  $r = a(1 + \cos \varphi)$  (kardioda).

6. Obliczyć długość łuku linii :

a)  $y = \frac{x^2}{2} - 1$  odciętej osią Ox ; b)  $y = \ln(1 - x^2)$  od  $x = -1/2$  do  $x = 1/2$  ,

c)  $x = 2a \cos t - a \cos 2t$  ,  $y = 2a \sin t - a \sin 2t$  , d)  $r = a(1 + \cos \varphi)$

e) długość jednego zwoju spirali Archimedesesa  $r = a\varphi$  .