

Akademia Górniczo-Hutnicza imienia S. Staszica
Wydział Matematyki Stosowanej

Vsevolod Vladimirov

NIELINIOWE MODELE ZJAWISK TRANSPORTU

Kraków 6 lutego 2014

SPIS TRECI

Rozdział 1

Wstęp	4
-------	---

Rozdział 2

Wymiary i podobieństwo	7
2.1. Algebraiczna teoria	7
2.1.1. Twierdzenie II Buckinghama.	7
2.2. Zagadnienie o wybuchu ciepłym	15
2.2.1. Wyprowadzenie równania transportu ciepła.	15
2.2.2. Zagadnienie o wybuchu ciepłym (przypadek liniowy).	16
2.2.3. Zagadnienie o wybuchu ciepłym (problem nieliniowy).	20
2.2.4. Pełna lokalizacja "energii ciepłej".	26
2.2.5. Dodanie członu źródłowego.	28
2.2.6. Równanie ze źródłem i zlewem.	30
2.2.7. O roli rozwiązań samopodobnych. Zasada maksimum i twierdzenie porównawcze.	34

Rozdział 3

Modele typu hydrodynamicznego	38
3.1. Równania dynamiki cieczy i gazu	38
3.1.1. Równanie bilansu masy.	38
3.1.2. Równanie bilansu pędu.	39
3.1.3. Równanie Hopfa.	41
3.1.4. Równanie Burgersa.	46
3.1.5. Zupełna całkowalność równania Burgersa.	48
3.1.6. Hiperboliczna modyfikacja równania Burgersa.	57

Rozdział 4

Fale nieliniowe	67
4.1. Wstęp. Odkrycie solitona	67
4.1.1. Drugie odkrycie solitona: problem Fermiego-Pasty-Ulana.	69

4.1.2. Prawa zachowania	72
4.2. Zupełna całkowalność równania KdV.	75
4.3. Metoda Hiroty	78
4.4. Modele "niecałkowalne", posiadające rozwiązania solitonopodobne.	80
4.4.1. Równania Rosenau-Hyman.	81
4.4.2. Analogi modeli fizycznych, posiadające rozwiązania kompaktowe.	81

Rozdział 5

Stabilność rozwiązań typu fali biegnącej	89
5.1. Wstęp. Sformułowanie zagadnienia	89
5.2. Stabilności rozwiązań typu kinków i solitonów w modelach typu konwekcji-reakcji-dyfuzji.	92
5.2.1. Twierdzenie oscylacyjne Sturm.	92
5.2.2. Równanie konwekcji-reakcji-dyfuzji: warunki stabilności rozwiązań typu kinków.	94

Rozdział 1

Wstęp

Niniejszy kurs można by również zatytułować jako *Modelowanie nieliniowych zjawisk transportu*. Zastanówmy się nad tym, co to jest model, co to jest modelowanie, jak te dwie rzeczy się mają do siebie i czemu mają służyć.

Zauważono iż urządzenia mechaniczne oraz ich zmniejszone kopie, które przyjęto nazywać *modelami*, funkcjonują w podobny sposób oraz posiadają bardzo wiele wspólnych cech. Proces tworzenia modeli, badania ich własności oraz przedkładania tych własności na realne urządzenia - to działka *modelowania klasycznego*. Bardzo często wyprodukowanie modelu jest prostsze i tańsze od sporządzenia realnego urządzenia. Poza tym, badania laboratoryjne, mające na celu przestudiowanie pewnych cech urządzenia, z wielu względów wygodniej jest przeprowadzać na modelach. Przełożenie wyników modelowania na prawdziwych urządzeniach jest jednak możliwe tylko wtedy, gdy jesteśmy w stanie wskazać dokładnie relacje pomiędzy oryginalnym urządzeniem i jego zmniejszoną kopią. Odpowiedzi na takie pytania daje TEORIA WYMIARW I PODOBIESTWA, przedstawiona w następnych rozdziałach.

Modelowanie klasyczne jest bardzo ważne z praktycznego punktu widzenia. Nie wyczerpuje ono jednak treści omawianej dyscypliny, gdyż szeroko pojęte modelowanie jest uprawiane we wszystkich działach teoretycznych nauk przyrodniczych. Dlaczego? Dlatego że, każde prawo empiryczne jest przybliżone oraz posiada ograniczony zakres stosowalności. Praca teoretyka polega na ubraniu w "trzeci matematyczne" takiego prawa oraz "wtopienie" go w ogólnie przyjęte lub "świeżo upieczone" koncepcje oraz wyciągnięcie odpowiednich wniosków które mogą być sprawdzone eksperymentalnie. Owe "trzeci matematyczne", zwane są jeszcze inaczej modelami matematycznymi. *De facto* przedmiotem badań teoretycznych nigdy nie jest zjawisko jako takie, lecz **model tego zjawiska**. Takich modeli może być wiele. Popularność, na ogół, zdobywa model, który uwzględnia te cechy zjawiska które nas w danej chwili interesują, a jednocześnie jest na tyle prosty że można go dokładnie przeanalizować.

W związku z powyższym, nasuwa się jednak pytanie. Skoro we wszystkich dyscyplinach nauk przyrodniczych (a nawet społecznych) zajmują się konstruowaniem oraz badaniem mo-

deli, to czy ma sens wyszczególnienie modelowania jako osobnego przedmiotu? Oto kilka względów służących uzasadnieniem wyszczególnienia modelowania w osobny przedmiot.

- Modele matematyczne są uniwersalne i nie zależą od treści wkładanych w nie przedstawicielami poszczególnych dziedzin nauki.
- Przedmiot modelowania nie stawia na celu rozwiązanie konkretnego zagadnienia teoretycznego i, dzięki temu, pozwala spojrzeć na modele z bardziej ogólnych pozycji.
- W modelowaniu bada się często rodziny równań, która mieści dowolne funkcje i parametry. Celem takich badań jest gromadzenie informacji o takiej rodzinie w raczej typowej dla modeli opisywanych za pomocą nieliniowych RR sytuacji gdy rozwiązać dokładnie dowolne zagadnienie początkowe lub brzegowe nie potrafimy.
- Celem więc jest pozyskanie informacji o modelu, badanie jego cech charakterystycznych, typowych rozwiązań, ich własności asymptotycznych, zależności od parametrów, utraty gładkości, bifurkacji, etc.

Dużą rolę w badaniu modeli odgrywa *zasada skracania informacji*. Istotę jej można przedstawić na takim przykładzie. Chcąc badać dynamikę gazu zajmującego pewien obszar przestrzenny, możemy skorzystać z dobrze sprawdzonych wiadomości o tym że w warunkach normalnych gaz jest mieszanina oddziaływujących ze sobą cząsteczek. W dobrym przybliżeniu oddziaływanie to opisuje drugie prawo Newtona. Możemy więc uzyskać wyczerpujący opis, rozwiązując układ równań Newtona. Opis taki jest rzeczywiście możliwy, ale używa się go niezmiernie rzadko i tylko w uzasadnionych przypadkach, gdyż wiąże się on z rozwiązywaniem gigantycznej ilości równań nieliniowych. W przypadku gdy nas interesują ruchy mechaniczne gazu czy jego cechy związane z przewodnictwem cieplnym, sprężystością etc., nie musimy śledzić za ruchem poszczególnych cząsteczek. Okazuje się że wystarczy podać opis pięciu parametrów makroskopowych związanych z ruchem i oddziaływaniem cząsteczek, mianowicie, *pola prędkości* $\vec{u}(t, \vec{r})$, *pola gęstości* $\rho(t, \vec{r})$, *pola ciśnienia* $p(t, \vec{r})$ oraz *pola temperatury* $T(t, \vec{r})$. Wielkości te spełniają układ sześciu równań cząstkowych które można uzyskać z uniwersalnych praw zachowania (masy, pędu, energii mechanicznej i cieplnej).

W przypadku gdy interesują nas ogólne cechy propagacji zaburzeń gęstości gazu, wystarczy dla początku ograniczyć się badaniem ruchów jednowymiarowych, odrzucając zależności temperaturowe. Ilość równań przy tym można zmniejszyć do dwóch. Natomiast, jeżeli nas interesuje opis fali stacjonarych, to rozwiązania można poszukiwać w postaci fali biegnącej $u(t, x) = U(\xi)$, $\rho(t, x) = R(\xi)$, gdzie $\xi = t - cx$. Ansatz taki prowadzi do redukcji równań cząstkowych: funkcje $U(\xi)$, $R(\xi)$ spełniają układ dwóch równań zwyczajnych.

Jeżeli nieliniowy układ równań zwyczajnych jest nadal zbyt skomplikowany, do jego badań dołącza się metody numeryczne, oparte na dyskretyzacji zagadnienia wyjściowego lub, w przypadku wielowymiarowych układów dynamicznych - szczególnie rodzaj odwzorowania dyskretnego, zwany *odwzorowaniem Poincarego*.

Na końcu parę słów o tym, dlaczego zawężamy się do modelowania zjawisk transportu. Otóż transport jest kategorią niezwykle obszerną, dostarczającą ogromną ilość rozmaitych modeli i submodeli, opisujących, między innymi, *transport energii w zjawiskach falowych; transport temperatury w ośrodkach przewodzących; transport zanieczyszczeń w ośrodkach porowatych i w cieczy; transport neutronów w reaktorze jądrowym; transport kapitału, mas ludzkich artykułów żywnościowych i przemysłowych, wiedzy, informacji, kultury, etc.*

Rozdział 2

Wymiary i podobieństwo

2.1. Algebraiczna teoria

2.1.1. Twierdzenie II Buckingham. Dziedzinę badań algebraicznych, lub inaczej klasycznej teorii modelowania jest badanie związku pomiędzy modelem laboratoryjnym konstrukcji inżynierskich, a tym, co nazywają "full scale device"

Zasadniczą rolę odegrały tu znane twierdzenie- II, (Pi) sformułowane na początku XX stulecia (Buckingham, 1915; Birkhof, Landau, Sedov, Taylor - lata 30-te i 40-te, p. [1]).

Otóż prawa fizyczne (i nie tylko) ustalają pewne zależności pomiędzy wielkościami, mającymi określony wymiar

Przykład 2.1.1.II prawo Newtona:

$$F = ma$$

m - masa (kg, g, \dots)

a - przyspieszenie ($\frac{m}{s^2}, \frac{km}{h^2} \dots$)

F - siła [$kg \frac{m}{s^2}$] \equiv [N]

Oczywiście, jednostki muszą być uzgodnione - LHS / RHS (lewe/prawe strony) tego samego równania powinny mieć identyczne same wymiary.

Bardzo ważna obserwacja:

Prawa fizyczne nie zależą od tego, w jakich jednostkach są mierzone podstawowe wielkości (które my wybieramy w sposób wysoce subiektywny).

W szczególności, istnieje możliwość przedstawienia tych praw w postaci bezwymiarowej.

Procedura jest tutaj następująca:

Niech mamy pewne prawo

$$a = f(a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_{m+n}), \quad (2.1)$$

przedstawiające wielkość fizyczną a jako funkcję $m + n$ wielkości $a_1, \dots, a_m, \dots, a_{m+n}$.

Jak wiadomo z fizyki elementarnej, jednostki fizyczne dzielą się na podstawowe i pochodne - te ostatnie wyrażają się przez podstawowe:

Przykład 2.1..2. MECHANIKA:

Podstawowe:

czas	$[T]$
długość	$[L]$
masa	$[M]$

Pochodne:

$$\begin{aligned} \text{prędkość} : [V] &= \frac{L}{T} \\ \text{przyśpieszenie} : [a] &= \frac{L}{T^2} \\ \text{siła} : [F] &= \frac{ML}{T^2} \end{aligned}$$

Zauważmy, że podział taki nie jest jednoznaczny: można wybrać inną trójkę jako podstawową, na przykład, masę, prędkość, czas (ale **nie** prędkość, czas, przyspieszenie - dlaczego?).

Wróćmy do równania (2.1). Niech a_1, \dots, a_m są to jednostki podstawowe (nie koniecznie to L, T, M tu istnieje dowolność), natomiast a, a_{m+1}, \dots, a_n - są to jednostki pochodne, tzn. takie, które da się wyrazić w postaci:

$$\begin{cases} a_{m+j} = \tilde{\Pi}_{m+j} a_1^{r_j^1}, \dots, a_m^{r_j^m} \\ a = \tilde{\Pi} a_1^{r_1}, \dots, a_m^{r_m} \end{cases} \quad (2.2)$$

$\tilde{\Pi}, \tilde{\Pi}_{m+j}$ - stałe bezwymiarowe.

Twierdzenie 2.1..1.(Π Buckingham'a) [1]

Niech istnieje zależność (2.1), wyrażająca pewien związek pomiędzy wielkością a , mającą pewien wymiar, oraz wielkościami a_1, \dots, a_{m+n} , spośród których pierwsze m czyli a_1, \dots, a_m mają wymiar niezależny. Wówczas

- (a) Zależność ta może być przedstawiona w postaci bezwymiarowej

$$\tilde{\Pi} = \tilde{\Phi}(\tilde{\Pi}_k) \quad 1 \leq k \leq r \quad (2.3)$$

- (b) Liczba r parametrów w prawej części wzoru (2.3) jest nie większa od n

Zasadniczą treść twierdzenia Π można sformułować następująco: po przejściu do zmiennych bezwymiarowych zależność (2.1), na ogół, w sposób istotny upraszcza się.

Dowód. Jeżeli a_1, \dots, a_m to parametry o jednostkach podstawowych, to inne parametry można przez te parametry wyrazić w postaci:

- $a = a_1^{r_1} \cdot \dots \cdot a_m^{r_m} \cdot \tilde{\Pi}$
- $a_{m+1} = a_1^{r_1^1} \cdot \dots \cdot a_m^{r_m^1} \cdot \tilde{\Pi}_{m+1}$
-
- $a_{m+j} = a_1^{r_1^j} \cdot \dots \cdot a_m^{r_m^j} \cdot \tilde{\Pi}_{m+j}$
-

Teraz (2.1) możemy zapisać jako:

$$a = \tilde{\Pi} a_1^{r_1} \cdot \dots \cdot a_m^{r_m} \Phi = f(a_1, \dots, a_m, \tilde{\Pi}_{m+j} \cdot a_1^{r_1^j} \cdot \dots \cdot a_m^{r_m^j} \dots)$$

Po podzieleniu przez $a_1^{r_1} \dots a_m^{r_m}$ otrzymamy:

$$\tilde{\Pi} = \frac{f}{a_1^{r_1} \cdot \dots \cdot a_m^{r_m}} = \Phi(a_1 \dots a_m, \tilde{\Pi}_{m+j}, \dots, \tilde{\Pi}_{m+n}) \quad (2.4)$$

Przypomnijmy sobie teraz, zasadę fundamentalną mówiącą że Prawa natury nie powinny zależeć od tego w jakich jednostkach sa one wyrażane! (gram, centymetr, sekunda czy kilogram, metr, godzina). Czy jeszcze inaczej: jednostka masy może wynieść $1 + \Delta$ kg, przy $|\Delta| \ll 1$.

Dodajemy do tego, że zamiana jakiejś jednostki podstawowej (na przykład $a_1 \rightarrow \bar{a}_1$, $a_2 \dots a_m$ - bez zmian) oraz jednoczesna proporcjonalna zmiana jednostek pochodnych

$$a \rightarrow \bar{a}, a_{m+j} \rightarrow \bar{a}_{m+j}$$

nie powoduje zmian jednostek bezwymiarowych $\tilde{\Pi}, \tilde{\Pi}_{m+j}$

Przykład 2.1.3.

$$m = 1kg, g \approx 10 \frac{m}{s^2}$$

$$F_{tarcia} = 3N = k \cdot 1kg \cdot 10 \frac{m}{s^2}$$

$$\text{Jednostka bezwymiarowa: } k = \frac{3N}{10 \frac{m \cdot kg}{s^2}} = 0.33 \dots$$

$$\text{W jednostce (c.g.s): } F_{tarcia} = 3 \cdot (1000g) \cdot 100 \frac{cm}{s^2} = 3 \cdot 10^5 \text{jedn.cgs}$$

$$m \cdot g = 1000g \cdot 10 \cdot 100 \frac{cm}{s^2} = 10^6 g \cdot \frac{cm}{s^2}$$

$$F_{tarcia}/m \cdot g = 3 \cdot 10^{-1}$$

Zatem k Pozostaje bez zmian.

Dlatego, z jednej strony

$$\frac{a}{a_1^{r_1} \dots a_m^{r_m}} = \tilde{\Pi} = \frac{f(a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_{m+n})}{a_1^{r_1} \dots a_m^{r_m}} = \Phi(a_1, \dots, a_m, \tilde{\Pi}_{m+1}, \dots, \tilde{\Pi}_{m+n})$$

Z drugiej zaś:

$$\frac{\bar{a}}{\bar{a}_1^{r_1} \dots \bar{a}_m^{r_m}} = \tilde{\Pi} = \frac{f(\bar{a}_1, a_2, \dots, a_m, \bar{a}_{m+1}, \dots, \bar{a}_{m+n})}{\bar{a}_1^{r_1} \dots \bar{a}_m^{r_m}} = \Phi(\bar{a}_1, \dots, a_m, \tilde{\Pi}_{m+1}, \dots, \tilde{\Pi}_{m+n})$$

Tworząc iloraz różnicowy i przechodząc do granicy mamy:

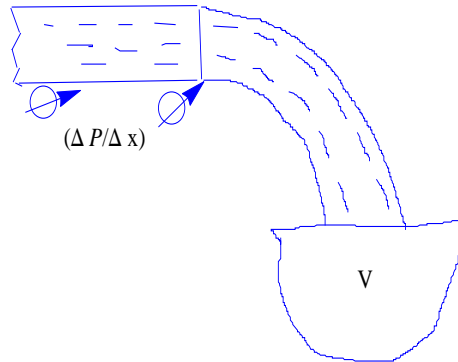
$$0 = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Phi(\bar{a}_1, a_2, \dots, a_m, \dots, \Pi_{m+j}, \dots) - \Phi(a_1, \dots, \Pi)}{\Delta}, \quad \Delta = \bar{a}_1 - a$$

a więc $\frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = 0 \Rightarrow \Phi$, nie zależy od a_1 . W podobny sposób wykazujemy że Φ nie zależy od pozostałych wielkości wymiarowych. Stąd otrzymujemy ostatecznie zależność (1.3).

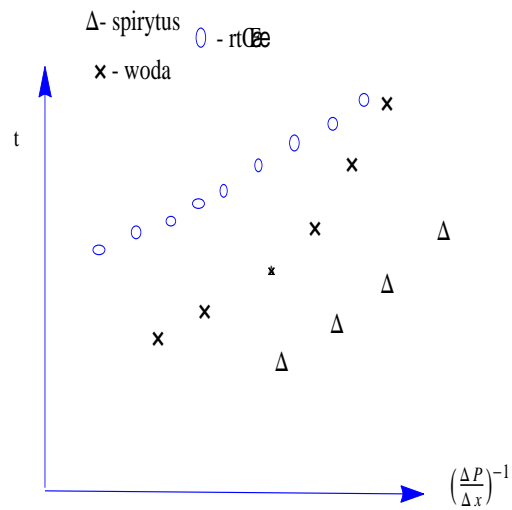
Pouczający przykład [1] Z rury, na końcach której istnieje różnica ciśnień $P_2 - P_1 > 0$, $[\frac{M}{L \cdot T^2}]$ wypływa ciecz o gęstości $\rho[\frac{M}{L^3}]$ i lepkości $\mu[\frac{M}{L \cdot T}]$, która wypełnia pojemność objętości $Q[L^3]$ w czasie $\tau[T]$, rys. 2.1 W serii doświadczeń przeprowadzonych dla H_2O , spirytusu oraz rtęci otrzymano na pozór różne zależności $\lg \Delta P$ jako funkcje $\ln \frac{1}{\tau}$ (ΔP vers. τ), p. rys. 2.2.

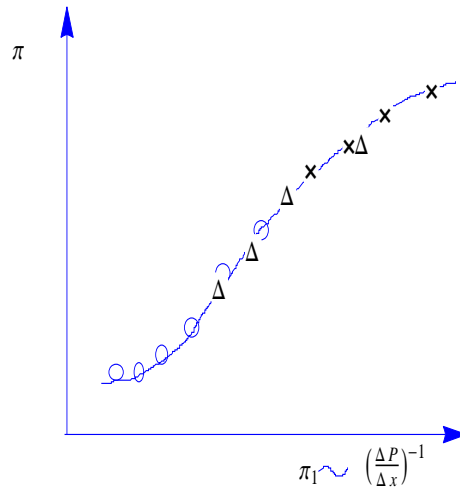
Wszystko się mocno uprościło po przejściu do postaci bezwymiarowej:

- (a) punkty doświadczalne położyły się a jednej krzywej
- (b) na pozór różne zależności przedstawiały różne odcinki jednej krzywej, przedstawione w różnych skalach.



Rys. 2.1:

Rys. 2.2: Zależność czasu wypełniania naczynia o objętości V dla wody, spirytusu oraz rtęci.



Rys. 2.3: Zależność czasu wypełniania naczynia o objętości V dla wody, spirytusu oraz rtęci w zmiennych bezwymiarowych.

Odtwarzanie krzywej przedstawionej na rys. 2.3: przyjmujemy że ΔP jest pewną funkcją czterech parametrów:

$$\Delta P\left[\frac{M \cdot L}{T^2 \cdot L^2}\right] = f(\tau, Q, \mu, \rho)$$

Spośród wielkości figurujących w prawej stronie powyżej trzy są wielkościami o niezależnych wymiarach.

Możemy wybrać $\tau[T]$, $Q[L^3]$, $\mu[\frac{M}{L \cdot T}]$ jako wielkości o niezależnych wymiarach. Wówczas:

$$\begin{aligned} [\rho] &= \frac{M}{L^3} = \mu\left[\frac{M}{L \cdot T}\right] \cdot \tau[T] \cdot Q^{-\frac{3}{2}}[L^{-2}] \cdot \Pi_1 \\ \Delta P\left[\frac{M}{T^2 \cdot L}\right] &= \Pi \cdot \mu\left[\frac{M}{L \cdot T}\right] \cdot \frac{1}{\tau[T]} \end{aligned}$$

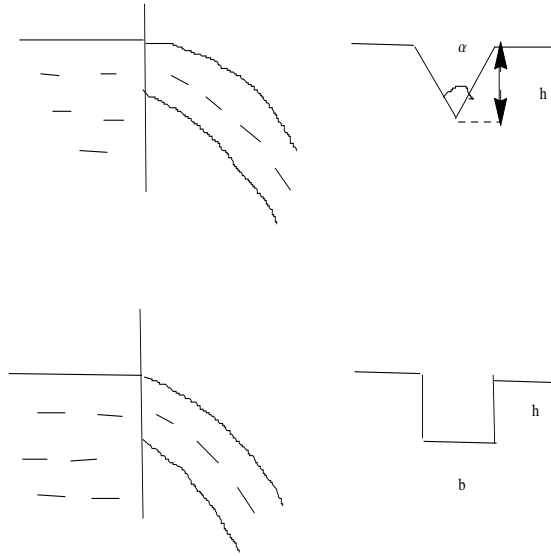
Krzywa więc wyraża zależność

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{\Delta P \cdot \tau}{\mu} = \Phi(\Pi_1), \\ \Pi_1 &= \frac{\rho \cdot Q^{\frac{2}{3}}}{\mu \cdot \tau} \end{aligned}$$

Przykład. Ciało o charakterystycznym przekroju $S(L^2)$ porusza się poziomo z jednostajną prędkością $V(L/T)$ w cieczy o gęstości $\rho[\frac{M}{L^3}]$ ze współczynnikiem lepkości $\mu[\frac{M}{L \cdot T}]$. Podać postać bezwymiarową zależności siły oporu $F[\frac{M \cdot L}{T^2}]$ od parametrów procesu.

Rozwiązanie

$$F = G(\rho, v, \mu, S)$$



Rys. 2.4:

Niezależne: $v[\frac{L}{T}]$, $S[L^2]$, $\mu[\frac{M}{L \cdot T}]$. Zatem

$$F \left[\frac{M \cdot L}{T} \right] = \Pi \cdot \mu \left[\frac{M}{L \cdot T} \right] \cdot V \left[\frac{L}{T} \right] \cdot S^{\frac{1}{2}} [L]$$

$$\rho \left[\frac{M}{L^3} \right] = \Pi_1 \cdot \mu \left[\frac{M}{L \cdot T} \right] \cdot V^{-1} \left[\frac{T}{L} \right] \cdot S^{-\frac{1}{2}} [L^{-1}]$$

$$\Pi = \Phi(\Pi_1)$$

$$Re = \Pi_1 = \frac{\rho \cdot S^{\frac{1}{2}} \cdot V}{\mu} - \text{liczba Reynoldsa} \quad (2.5)$$

W postaci wymiarowej:

$$F = \mu V \sqrt{S} \Phi(Re) \quad (2.6)$$

Wniosek 2.1..1. *Opór w jednostkach bezwymiarowych zależy tylko od liczby Re*

$\Phi(\cdot)$ - *względnie kształt aerodynamiczny i inne czynniki indywidualne ciała, ale to zawsze jest funkcją jednej zmiennej.*

Zadanie. (odmiana poprzediego). Znaleźć najprostszą postać funkcjonalną wyrażającą spadek ciśnienia $\frac{dp}{dx}$ w rurze o średnicy $R[L]$, przy którym ciecz lepka ($\mu[\frac{M}{L \cdot T}]$) o gęstości $\rho[\frac{M}{L^3}]$ poruszała się z jednostajną prędkością $v[L/T]$.

Znaleźć postać bezwymiarową zależności

$$\frac{dp}{dx} = g(\rho, \mu, v, R) \quad (2.7)$$

(zaleca się wykorzystanie zmiennej bezwymiarowej $Re = \frac{\rho R v}{\mu}$).

Odpowiedź. $\Pi = \Psi(Re)$ lub $\frac{dp}{dx} = \frac{\mu \cdot v}{R^2} \Psi(Re)$

Zadanie.

- (a) W tamie zrobiła się dziura trójkątna (p. rysunek 2.4, góra). Znaleźć postać bezwymiarową zależności prędkości przecieku $\frac{dm}{dt} [\frac{M}{T}]$ od parametrów $\rho [\frac{M}{L \cdot T^2}]$, $g [\frac{L}{T^2}]$, $h [L]$, $\mu [\frac{M}{L \cdot T}]$, oraz $\alpha [-]$ (bezwymiarowej):

$$\frac{dm}{dt} = f(\rho, g, h, \alpha) \quad (2.8)$$

- (b) Znaleźć tę zależność gdy dziura ma profil prostokątny (p. rysunek 2.4, dół):

$$\frac{dm}{dt} = H(\rho, g, h, b, x) \quad (2.9)$$

Wskazówka. Istotne parametry to : ρ , g , h oraz kąt α ;

Odpowiedzi.

- (a)

$$\frac{dm}{dt} = \Psi(\alpha) \rho \cdot \sqrt{gh^5} \quad (2.10)$$

- (b)

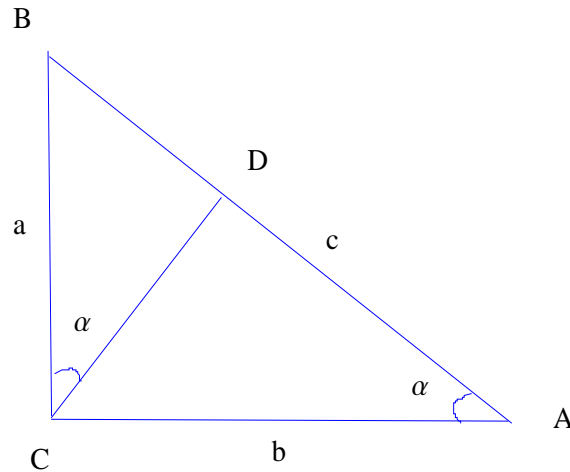
$$\frac{dm}{dt} = \Theta(\Pi_1) \rho \cdot \sqrt{gh^5} \quad (2.11)$$

gdzie $\Pi_1 = \frac{h}{b}$

Zadanie 2.1.1.

Udowodnić twierdzenie Pitagorasa za pomocą twierdzenia Pi.

Dowód. Niech mamy trójkąt prostokątny ABC (p. rys. 2.5). Ponieważ wszystkie elementy trójkąta można wyrazić za pomocą jednego ostrego kąta (w naszym przypadku α) oraz przeciwprostokątnej, więc pole można wyrazić za pomocą wzoru $S = f(c, \alpha)$. Wybierając $c [L]$



Rys. 2.5:

jako jednostkę o wymiarze niezależnym, przechodząc do postaci bezwymiarowej otrzymamy że

$$S_{ABC} = c^2 \Phi(\alpha).$$

Jednak analogiczne rozumowanie można zastosować do trójkątów CBD oraz ACD podobnych do ABC , zatem

$S_{CBD} = a^2 \Phi(\alpha)$ i $S_{ACD} = b^2 \Phi(\alpha)$. Z adytywności pola wynika iż

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

2.2. Zagadnienie o wybuchu ciepłym

2.2.1. Wyprowadzenie równania transportu ciepła. Energia cieplna skumulowana w obszarze Ω wyraża się następującym wzorem:

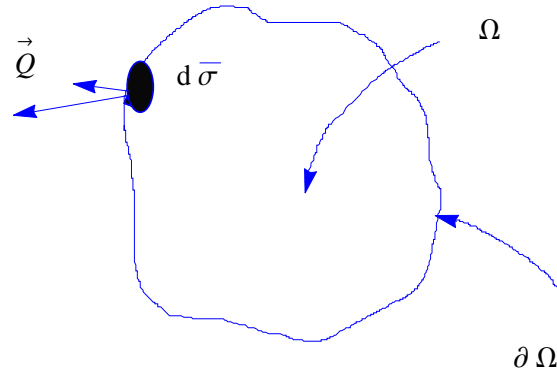
$$E = \int_{\Omega} cT(t, x) dx, \quad (2.12)$$

gdzie c -pojemność cieplna, $T(t, x)$ -temperatura w chwili t w punkcie x . Załóżmy, iż zmianę energii cieplnej powodują:

- potok cieplny Q przez powierzchnię $\partial\Omega$;
- masowe źródło ciepłe $\tilde{f}(T; t, x)$;

a zatem, równanie bilansu energii będzie miało postać

$$\frac{dE}{dt} = - \int_{\partial\Omega} \vec{Q} d\vec{\sigma} + \int_{\Omega} \tilde{f}(T; t, x) dx, \quad (2.13)$$



Rys. 2.6:

gdzie $d\vec{\sigma} = d\sigma \vec{n}$ - ukierunkowany element powierzchni, \vec{n} - wektor jednostkowy, skierowany na zewnątrz powierzchni, p. rys. 2.6.

Zgodnie z prawem Ficka,

$$\vec{Q} = -\tilde{\kappa}(T; t, x)\nabla T, \quad (2.14)$$

gdzie $\tilde{\kappa}(T; t, x)$ -nieujemny współczynnik transportu. Wykorzystując powyższą równość, oraz stosując twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego do drugiego wyrazu w prawej stronie równości (3.2), otrzymamy:

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div} \kappa(T; t, x) \text{grad} T - f(T; t, x) \right\} dx = 0, \quad (2.15)$$

gdzie $\kappa(T; t, x) = \tilde{\kappa}(T; t, x)/c$, $f(T; t, x) = \tilde{f}(T; t, x)/c$.

Z dowolności objętości Ω wynika iż całka ta będzie równa zero tylko wtedy gdy wyrażenie podcałkowe będzie się zerować w dowolnym punkcie, w dowolnej chwili t , co daje w wyniku równanie

$$\frac{\partial T(t, x)}{\partial t} = \vec{\nabla} \kappa(T; t, x) \vec{\nabla} T(t, x) + f(T; t, x). \quad (2.16)$$

2.2.2. Zagadnienie o wybuchu cieplnym (przypadek liniowy). Postawienie zagadnienia formułuje się następująco: w chwili $t = 0$ w punkcie $0 = x \in R$ uwalnia się energia Q . Zakładamy ponadto, iż źródła ciepłe nie występują, a $\kappa = \text{const}$. Interesuje nas ewolucja energii cieplnej w przestrzeni i w czasie. Matematycznie problem formułuje się następująco

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in R, \quad (2.17)$$

$$u(0, x) = 0, \quad x \neq 0, \quad (2.18)$$

$$\int_R u(t, x) dx = Q, \quad Q = \text{const} \quad (2.19)$$

(oznaczyliśmy temperaturę symbolem u , gdyż T jest zarezerwowane w teorii wymiarów dla określenia jednostki czasu).

Poszukujemy rozwiązanie w postaci

$$u = f(t, x, \kappa, Q), \quad (2.20)$$

gdzie $t[T]$ -czas, $x[L]$ -wielkość o wymiarze długości, $u[E]$ -temperatura (czyli energia wewnętrzna na jednostkę masy), κ ma wymiar $\left[\frac{L^2}{T}\right]$, Q ma wymiar $[E \cdot L]$. Naszym celem jest próba sprowadzenia zagadnienie do postaci bezwymiarowej. Jako jednostki podstawowe wybierzmy

$$t[T], \quad \kappa \left[\frac{L^2}{T}\right], \quad Q [E \cdot L].$$

Pozostałe dwie można wyrazić przez nie w następujący sposób:

$$u = \Pi \frac{Q}{\sqrt{\kappa t}}, \quad x = \xi \sqrt{\kappa t},$$

gdzie Π , ξ -parametry bezwymiarowe. Zgodnie z twierdzeniem Π , zależność (2.20) w postaci bezwymiarowej będzie miała postać

$$u = \frac{Q}{\sqrt{\kappa t}} \varphi(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{\kappa t}}. \quad (2.21)$$

Jeśli wnioski teorii wymiarów przenoszą się na równania cząstkowe, to zastosowanie ansatza (2.21) powinno prowadzić do uproszczenia zagadnienia.

Obliczając pochodne otrzymamy:

$$u_t = -\frac{Q}{2t\sqrt{\kappa t}}\varphi - \frac{Q}{\sqrt{\kappa t}} \left(\frac{\xi}{2t}\right) \dot{\varphi}(\xi),$$

$$u_x = \frac{Q}{\sqrt{\kappa t}} \dot{\varphi}(\xi) \frac{1}{\sqrt{\kappa t}}, \quad u_{xx} = \frac{Q}{\sqrt{\kappa t}} \ddot{\varphi}(\xi) \frac{1}{\kappa t}.$$

Po podstawieniu tych wzorów do (2.17) i pewnych elementarnych przekształceniach, otrzymamy równanie zwyczajne

$$2\ddot{\varphi} + \varphi + \xi \dot{\varphi} = \frac{d}{d\xi} \{2\dot{\varphi} + \xi \varphi\} = 0.$$

Całkując to równanie, otrzymujemy

$$\dot{\varphi} + \xi \varphi = C.$$

Stałą całkowania C musimy położyć równą zero. Wynika to z symetrii zagadnienia początkowego względem transformacji $x \rightarrow -x$. Symetrię ową dziedziczy rozwiązanie, a zatem $\varphi(\xi)$, będąca funkcją parzystą, ma w zerze ekstremum lokalne. Zatem,

$$0 = \lim_{\xi \rightarrow 0} (\dot{\varphi}(\xi) + \xi \varphi) = C.$$

Równanie

$$\dot{\varphi}(\xi) + \xi \varphi = 0$$

łatwo możemy scałkować, uzyskując w wyniku funkcję

$$\varphi = C_1 e^{-\xi^2/4}. \quad (2.22)$$

Stałą całkowania, z kolei, udaje się określić z warunku (2.19). Jak łatwo się można przekonać, w zmiennych bezwymiarowych warunek ten przybiera postać

$$\int_R \varphi(\xi) d\xi = 1.$$

Podstawiając do tej całki wzór (2.22), otrzymamy

$$1 = C_1 \int e^{-(\xi/2)^2} d\xi = 2 C_1 \sqrt{\pi}.$$

Stąd ostatecznie

$$u(t, x) = \frac{Q}{\sqrt{4\pi\kappa t}} e^{-x^2/(4\kappa t)}. \quad (2.23)$$

Najważniejszy wniosek: zagadnienie o wybuchu cieplnym (2.17) w zmiennych bezwymiarowych można przedstawić w postaci

$$\frac{d}{d\xi} \{2\dot{\varphi} + \xi \varphi\} = 0,$$

$$\varphi(\xi) = 0, \quad \xi \neq 0,$$

$$\int_R \varphi(\xi) d\xi = 1.$$

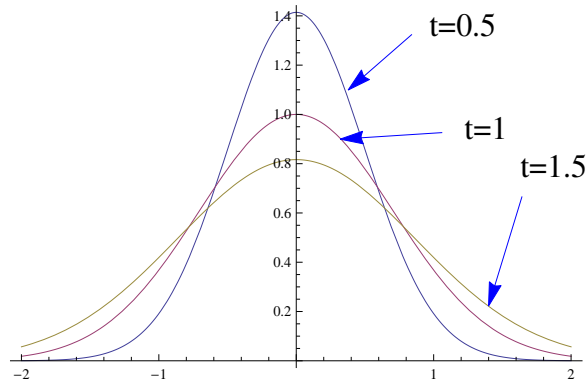
W sytuacji gdy problem wyjściowy udaje się przedstawić w postaci bezwymiarowej, mówimy że jest on *samopodobny*.

Własności rozwiązania (2.23).

- W chwili $t = 0$ rozwiązanie ma postać

$$u(0, x) = Q \delta(x),$$

gdzie δ -delta-Diraca, [31].



Rys. 2.7:

- Przy $t > 0$ jest to funkcja typu Gaussa o malejącej w czasie amplitudzie maksymalnej (rys. 3.5). Cechą charakterystyczną rozwiązania jest to że w dowolnej chwili $t > 0$ cała prosta "czuje" wybuch cieplny (informacja dociera natychmiast do każdego punktu prostej) - takie zachowanie jest niefizyczne. Z drugiej strony, ze względu na wykładniczo szybki zanik rozwiązania przy dużych $|x|$, prawie całe ciepło jest skoncentrowane w pobliżu zera, co uzasadnia rozsądność wykorzystania rozwiązania (2.23).
- Szerokość efektywną fali cieplnej można określić na wiele sposobów. Przyjmujemy tu następującą definicję:

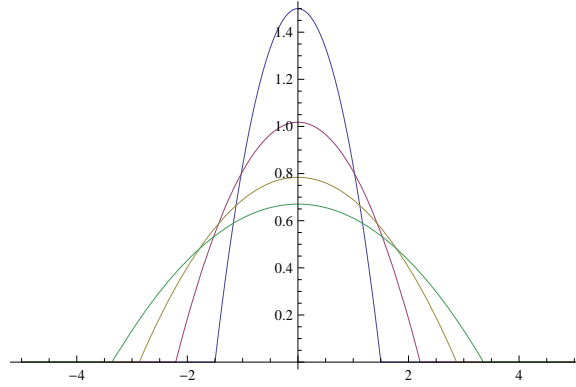
$$\Delta x = 2x_p(t),$$

gdzie $0 < x_p(t)$ -współrzędna punktu przegięcia wykresu funkcji w chwili $t > 0$. Z warunku $\partial^2 u / \partial x^2 = 0$ otrzymujemy że $x_p(t) = \sqrt{2\kappa t}$, zatem

$$\Delta x = \sqrt{8\kappa t} \sim \sqrt{t}.$$

Wynika stąd iż punkt przegięcia $x_p(t)$ (który można traktować jako "czoło" fali cieplnej) porusze się z prędkością $\sim 1/\sqrt{t}$. Prędkość ta dąży do $+\infty$ gdy $t \rightarrow +0$ (jeszcze jedna cecha niefizyczna) i zanika gdy $t \rightarrow +\infty$.

Zadanie 2.2.1. Znaleźć wzór na szerokość efektywną $\Delta x = 2x_*$, gdzie $0 < x_*$ - współrzędna odpowiadająca wartości $u(t, x_*) = u(t, 0)/N$, $N \geq 2$ -liczba naturalna. Wykazać iż tak zdefiniowana szerokość efektywna jest asymptotycznie równoważna poprzednio zdefiniowanej wielkości.



Rys. 2.8:

Rozwiązanie. Szerokość efektywną obliczamy z podanego warunku:

$$u(t, x) = \frac{Q}{\sqrt{4\pi\kappa t}} e^{-x^2/(4\kappa t)} = u(t, 0)/N = \frac{Q}{N\sqrt{4\pi\kappa t}}.$$

Stąd

$$\Delta x = \sqrt{8 \log[N] \kappa t} \sim \sqrt{t}.$$

2.2.3. Zagadnienie o wybuchu cieplnym (problem nieliniowy). Rozpatrzmy zagadnienie o wybuchu cieplnym

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial}{\partial x} \left[u \frac{\partial u}{\partial x} \right], \quad t > 0, \quad x \in R, \quad (2.24)$$

$$u(0, x) = 0, \quad x \neq 0, \quad (2.25)$$

$$\int_R u(t, x) dx = Q, \quad Q = const \quad (2.26)$$

Poszukujemy rozwiązanie w postaci

$$u = f(t, x, \kappa, Q), \quad (2.27)$$

gdzie $t[T]$ -czas, $x[L]$ -wielkość o wymiarze długości, $u[E]$ -temperatura (czyli energia wewnętrzna na jednostkę masy), κ (uwaga!) ma wymiar $\left[\frac{L^2}{T E}\right]$, Q ma wymiar $[E \cdot L]$. Jako jednostki podstawowe przy sprowadzaniu do postaci bezwymiarowej wybierzmy

$$t[T], \quad \kappa \left[\frac{L^2}{T E}\right], \quad Q [E L].$$

Wielkości u oraz x można wyrazić przez nie w następujący sposób:

$$u = \Pi \frac{Q^{2/3}}{(\kappa t)^{1/3}}, \quad x = \xi (\kappa t Q)^{1/3},$$

gdzie Π , ξ -parametry bezwymiarowe. Zgodnie z twierdzeniem Π , zależność (2.27) będzie miała postać

$$u = \frac{\lambda}{(t)^{1/3}} \varphi(\xi), \quad \xi = \frac{x}{(\kappa t Q)^{1/3}}, \quad \lambda = \frac{Q^{2/3}}{\kappa^{1/3}}. \quad (2.28)$$

Obliczamy pochodne funkcji (2.28):

$$u_t = -\frac{\lambda}{3t^{4/3}} (\varphi + \xi \dot{\varphi}),$$

$$u_x = \frac{\lambda}{t^{1/3}} \dot{\varphi}(\xi) \frac{1}{(Q t \kappa)^{1/3}}.$$

Po podstawieniu tych wzorów do (2.27) otrzymamy:

$$-\frac{\lambda}{3t^{4/3}} (\varphi + \xi \dot{\varphi}) = \kappa \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\lambda^2}{(t)^{2/3}} \varphi(\xi) \dot{\varphi}(\xi) \frac{1}{(Q t \kappa)^{1/3}} \right] =$$

$$\kappa \frac{\lambda^2}{(t)^{2/3}} \frac{1}{(Q t \kappa)^{2/3}} [\varphi(\xi) \ddot{\varphi}(\xi) + \dot{\varphi}^2].$$

Dokonując elementarnych przekształceń, otrzymamy

$$\frac{d}{d\xi} (3\varphi \dot{\varphi} + \xi \varphi) = 0,$$

lub, po scałkowaniu,

$$3\varphi \dot{\varphi} + \xi \varphi = C.$$

Z tych samych względów, co i w przypadku liniowym (symetria zagadnienia początkowego), wynika że φ jest funkcją parzystą, a z tego, z kolei, że

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} (3\varphi(\xi) \dot{\varphi}(\xi) + \xi \varphi(\xi)) = 0 = C.$$

Rozwiązując równanie

$$\varphi (3 \dot{\varphi} + \xi) = 0,$$

otrzymamy:

$$\varphi = C_0 - \frac{\xi^2}{6}.$$

Zakładając nieujemność funkcji u , otrzymujemy rozwiązanie

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{6} (\xi_f^2 - \xi^2), & \text{gdzie } |\xi| < \xi_f, \\ 0 & \text{gdzie indziej} \end{cases}$$

Stałą $\xi_f > 0$ określamy z warunku (2.35), który w zmiennych bezwymiarowych ma postać

$$\int_R \varphi(\xi) d\xi = 1.$$

Stąd

$$1 = 2 \int_0^{\xi_f} \frac{1}{6} (\xi_f^2 - \xi^2) d\xi = \frac{2}{9} \xi_f^3.$$

zatem $\xi_f = (9/2)^{1/3}$ i

$$u = \frac{1}{6 \kappa t} \begin{cases} x_f^2 - x^2, & \text{gd}y \ |x| < x_f = \left(\frac{9 \kappa Q t}{2}\right)^{1/3}, \\ 0 & \text{gdzie indziej.} \end{cases} \quad (2.29)$$

Wniosek 2.2..1. *W przypadku gdy współczynnik przewodnictwa cieplnego jest funkcją postaci κu , rozwiązanie o wybuchu cieplnym w każdej chwili czasu $t > 0$ ma nośnik zawarty w odcinku $\left(-\left(\frac{9 \kappa Q t}{2}\right)^{1/3}, +\left(\frac{9 \kappa Q t}{2}\right)^{1/3}\right)$. Front fali cieplnej potusza się z prędkością $dx_f/dt = (\kappa Q/6)^{1/3} t^{-2/3}$, rys. 2.8.*

Zadanie 2.2..2. *Rozwiązać zagadnienie o wybuchu cieplnym*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial}{\partial x} \left[u^n \frac{\partial u}{\partial x} \right], \quad n \in \mathbb{N} \quad t > 0, \quad x \in R, \quad (2.30)$$

$$u(0, x) = 0, \quad x \neq 0, \quad (2.31)$$

$$\int_R u(t, x) dx = q, \quad q = \text{const.} \quad (2.32)$$

Rozwiązanie. *Wybierając jako jednostki niezależne $q[E L]$, $t[T]$, $\kappa[L^2 T^{-1}, E^{-n}]$ i sprowadzając funkcje*

$$u = f(t, x, \kappa, q)$$

do postaci bezwymiarowej, otrzymamy ansatz

$$u = \left(\frac{q^2}{t \kappa}\right)^{\frac{1}{2+n}} \varphi(\xi), \quad \xi = \left(\frac{1}{t \kappa q^n}\right)^{\frac{1}{2+n}} x.$$

Liczymy pochodne:

$$LHS = -\frac{1}{t(n+2)} \left(\frac{q^2}{t \kappa}\right)^{\frac{1}{n+2}} [\varphi(\xi) + \xi \varphi'(\xi)],$$

$$RHS = \frac{1}{t} \left(\frac{q^2}{t \kappa}\right)^{\frac{1}{n+2}} [\varphi^n \varphi']'.$$

Stąd otrzymujemy

$$\frac{d}{d\xi} [\xi \varphi + (n+2) \varphi^n \varphi'] = 0.$$

Całkując to równanie i wykorzystując warunek parzystości, otrzymamy równanie

$$\xi \varphi + (n+2) \varphi^n \varphi' = 0,$$

którego rozwiązanie dane jest wzorem

$$\varphi = \left\{ C^2 - \frac{n}{2(2+n)} \xi^2 \right\}^{\frac{1}{n}}.$$

Z warunku (2.32) otrzymamy że

$$C = \left[\frac{3(2+n)}{2n} \right]^{\frac{1}{3}},$$

zatem

$$u = \left(\frac{q^2}{t\kappa} \right)^{\frac{1}{n+2}} \left\{ \frac{n}{2(2+n)} \right\}^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{q^n t \kappa} \right)^{\frac{2}{n(2+n)}} \begin{cases} (x_f^2 - x^2)^{\frac{1}{n}}, & \text{gdy } |x| < x_f, \\ 0 & \text{gdzie indziej,} \end{cases}$$

gdzie $x_f = C \sqrt{\frac{2(2+n)}{n}} (q^n t \kappa)^{1/(n+2)}$.

Zadanie 2.2.3. Rozwiązać zagadnienie o wybuchu cieplnym

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial}{\partial x} \left[u^{-1} \frac{\partial u}{\partial x} \right], \quad t > 0, \quad x \in R, \quad (2.33)$$

$$u(0, x) = 0, \quad x \neq 0, \quad (2.34)$$

$$\int_R u(t, x) dx = q, \quad q = \text{const}. \quad (2.35)$$

Rozwiązanie. Zmienne podstawowe: $q[EL]$, $t[T]$, $\kappa[L^2 ET^{-1}]$. Ansatz

$$u = \frac{q^2}{t\kappa} \varphi(z), \quad z = \frac{xq}{\kappa t}$$

sprowadza (2.33) do równania

$$\frac{d}{dz} \left\{ z\varphi + \frac{\varphi'}{\varphi} \right\},$$

którego rozwiązanie ma postać

$$\varphi = \frac{2}{C^2 + z^2}.$$

Stałą C znajdujemy z warunku całkowego

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{C^2 + z^2} = \frac{2\pi}{C},$$

stąd $C = 2\pi$ i rozwiązanie ma postać

$$u = \frac{q^2}{t\kappa} \frac{2}{4\pi^2 + x^2}.$$

Zadanie 2.2.4. Rozwiązać zagadnienie początkowo-brzegowe

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in R_+, \quad (2.36)$$

$$u(0, x) = 0, \quad x > 0$$

$$u(t, 0) = U/\sqrt{t}, \quad t > 0, \quad 0 < U = \text{const.}$$

Rozwiązanie. Jako wielkości podstawowe wybieramy $\kappa[L^2/T]$, $U[ET]$ oraz $t[T]$. Wykorzystując te wielkości, sprowadzamy u oraz x do postaci bezwymiarowej. Daje to ansatz

$$u = f(t, x, \kappa, U) = \frac{U}{\sqrt{t}} \varphi(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{\kappa t}}.$$

Po podstawieniu do (2.36) i pewnych elementarnych przekształceniach, otrzymujemy równanie zwyczajne

$$\frac{d}{d\xi} (2\dot{\varphi} + \xi\varphi) = 0.$$

Całkujemy to równanie. Przy dodatkowym założeniu $\dot{\varphi}(0) = 0$ można pokazać że stała całkowania jest równa zeru (założenie to uzasadnia się znajomością wyniku końcowego).

Całkując po raz drugi, otrzymamy wynik

$$\varphi = C_2 \exp[-\xi^2/4].$$

Z warunku brzegowego wynika iż $C_2 = 1$. Ponieważ $\varphi'(\xi) = -\frac{1}{2}\xi e^{-\xi^2/4}$, więc założenie $\varphi'(0) = 0$ jest poprawne. Zatem rozwiązanie całego problemu ma postać

$$u(t, x) = \frac{U}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{x^2}{4\kappa t}\right].$$

Zauważmy że "energia całkowita"

$$\int_{R_+} u(t, x) dx = \frac{U}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2/(4\kappa t)} dx = \sqrt{\pi\kappa} U^2$$

jest wielkością stałą.

Zadanie 2.2.5. Rozwiązać zagadnienie początkowo-brzegowe

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad (2.37)$$

$$u(0, x) = 0, \quad x > 0, \quad u(t, +\infty) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(t, 0) = U \quad t > 0, \quad 0 < U = \text{const.}$$

Rozwiązanie. Wybierając jako wielkości podstawowe $U[E]$, $\kappa[L^2/T]$ $t[T]$ oraz wyrażając pozostałe zmienne w postaci bezwymiarowej, otrzymamy ansatz

$$u = f(t, x, \kappa, U) = U \varphi(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{\kappa t}}.$$

Podstawiając go do równania cząstkowego otrzymamy równanie

$$2\ddot{\varphi} + \xi\dot{\varphi} = 0.$$

oraz dodatkowo warunki

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi(+\infty) = 0.$$

Dokonując zamiany zmiennych $\dot{\varphi} = \theta$, otrzymamy równanie

$$2\dot{\theta} = -\xi\theta.$$

Całkując otrzymamy

$$\theta = \dot{\varphi} = C_1 e^{-\xi^2/4}.$$

Całkując to ostatnie otrzymamy że

$$\varphi = C_2 + C_1 \int_0^\xi e^{-\tau^2/4} d\tau.$$

Wykorzystując warunki brzegowe otrzymamy ostatecznie

$$u = U \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{\kappa t}}} e^{-\tau^2/4} d\tau \right).$$

2.2.4. Pełna lokalizacja "energii cieplnej". W poprzednim punkcie widzieliśmy że nieliniowość współczynnika transportu może powodować efekt lokalizacji polegający na tym, że w każdej chwili $t > 0$ energia cieplna zawarta jest w skończonym odcinku, którego długość jest proporcjonalna do $t^{1/3}$. Okazuje się że odpowiedni (zgodny ze sobą) dobór współczynnika transportu i warunków brzegowych może również przyczynić się do pełnej lokalizacji ciepła na odcinku o stałej długości.

Rozpatrzmy zagadnienie początkowo-brzegowe

$$\begin{aligned} u_t &= \kappa (u^\sigma u_x)_x, & x > 0 \\ u(t, 0) &= A (t_f - t)^{-n}, & n > 0, \\ u(t_0, x) &= u_0(x), & x > 0, \\ t_f &> t \geq t_0. \end{aligned}$$

Rozwiązanie tak postawionego zagadnienia powinniśmy poszukiwać w postaci

$$u = F(t, x, A, \kappa, t_0, t_f).$$

Jednak przy takiej dużej ilości parametrów zagadnienie nie będzie samopodobne. W takiej sytuacji standardowo, o ile jest to możliwe, część parametrów przyrównujemy do zera lub do nieskończoności. Załóżmy więc że $t_0 = -\infty$, i $t_f = 0$. Przy takich założeniach zagadnienie początkowo-brzegowe przybiera postać

$$\begin{aligned} u_t &= \kappa (u^\sigma u_x)_x, & x > 0, & \quad -\infty < t < 0 \\ u(t, 0) &= A (-t)^{-n}, & n > 0, \\ u(-\infty, x) &= 0, & x > 0. \end{aligned}$$

Rozwiązanie teraz poszukujemy w postaci

$$u = F(t, x, A, \kappa).$$

Jako jednostki o wymiarach niezależnych wybieramy

$$t[T], \quad A[ET^n], \quad \kappa[L^2 T^{-1} E^{-\sigma}].$$

Zastosowanie twierdzenia II sugeruje następujący ansatz:

$$u = \frac{A}{(-t)^n} \varphi(\xi), \quad \xi = \frac{A^{-\sigma/2} x (-t)^{(1-n\sigma)/2}}{\kappa^{1/2}}.$$

W tym miejscu dokonujemy wyboru $n = \sigma = 1$, czyli odtąd rozpatrujemy zagadnienie

$$u_t = \kappa [u u_x]_x, \quad x > 0, \quad -\infty < t < 0, \quad (2.38)$$

$$u(t, 0) = A(-t)^{-1}. \quad (2.39)$$

Ansatz

$$u = -\frac{A}{t} \varphi(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{\kappa A}}$$

redukuje równanie (2.38) do postaci

$$\varphi \ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2 - \varphi = 0. \quad (2.40)$$

Równanie (2.40) można rozwiązać wykorzystując zamianę zmiennych

$$p = d\varphi/d\xi, \quad p dp/d\varphi = \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2},$$

oraz wprowadzając nową zmienną $R = p^2$. Równanie przy tym linearyzuje się:

$$\frac{dR}{d\varphi} + \frac{2}{\varphi} R = 2.$$

Rozwiązując powyższe równanie metodą uzmienniania stałej, otrzymamy rozwiązanie ogólne

$$R = p^2 = \frac{C_0}{\varphi^2} + \frac{2}{3}\varphi. \quad (2.41)$$

Musimy przyjąć że $C_0 = 0$, w przeciwnym wypadku rozwiązanie będzie singularne przy $\varphi \rightarrow +0$. By pozbyć się singularności w rozwiązaniu, musimy przyjąć warunek $C_0 = 0$. Przy tym (2.41) przechodzi w równanie

$$p = \frac{d\varphi}{d\xi} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}\varphi.$$

Z uwzględnieniem warunku brzegowego rozwiązanie przybiera postać

$$\varphi = \left(1 - \frac{\xi}{\sqrt{6}}\right)^2.$$

Odpowiada mu następujące rozwiązanie zagadnienia wyjściowego:

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{A}{6(-t)^\kappa} (x_F - x)^2, & 0 < x < x_F = \sqrt{6\kappa A}, \quad -\infty < t < 0 \\ 0 & \text{gdy } x > x_F \end{cases} \quad (2.42)$$

Wnioski.

1. Energia cieplna w zagadnieniu (2.38)-(2.39) jest zlokalizowana na odcinku $(0, x_F)$ (efekt pełnej lokalizacji).
2. W każdym punkcie $x \in (0, x_F)$ temperatura dąży do $+\infty$ gdy $t \rightarrow -0$, czyli tworzą się rozwiązania "wybuchające", znane w literaturze anglojęzycznej jako "blow-up regime".

2.2.5. Dodanie członu źródłowego. Rozpatrujemy równanie

$$u_t = \kappa \partial_x (u^\sigma u_x) + q u^\beta, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (2.43)$$

gdzie $q > 0$. Poszukujemy rozwiązanie w postaci

$$u = P(t) Q(x).$$

Po podstawieniu do (2.43), otrzymamy równanie

$$\dot{P}(t) Q(x) = \kappa P^{\sigma+1} [Q^\sigma(x) Q'(x)]' + q P(t)^\beta Q^\beta. \quad (2.44)$$

Zmienne w równaniu (2.44) można rozdzielić, w przypadku gdy $\beta = \sigma + 1$.

W celu uproszczenia będziemy dalej zakładać iż $\beta = 2$ ($\sigma = 1$). Przy tych założeniach, po elementarnych algebraicznych manipulacjach, otrzymuje się układ

$$\dot{P}(t) P^{-2}(t) = \frac{\kappa [(Q'(x))^2 + Q(x) Q''(x)] + q Q^2(x)}{Q} = C_1.$$

Rozwiązując równanie

$$\dot{P} P^{-2} = C_1$$

otrzymamy:

$$P(t) = [C_1 (t_f - t)]^{-1}$$

(zakładamy że $t_f > 0$ oraz $C_1 > 0$). Drugie równanie jest bardziej skomplikowane:

$$(Q'(x))^2 + Q(x) Q''(x) + \frac{q}{\kappa} Q^2(x) - \frac{C_1}{\kappa} Q(x) = 0. \quad (2.45)$$

Zachodzi

Lemat 2.2..1. Funkcja

$$Q = \frac{4C_1}{3q} \cos^2 \left[\sqrt{\frac{q}{8\kappa}} x \right]$$

spełnia równanie (2.45).

Dowód. Wprowadzając w (2.45) zmienną $\frac{dQ}{dx} = p[Q(x)]$, obliczając jej pochodną $\frac{d^2Q}{dx^2} = p \frac{dp}{dQ}$, a następnie dokonując podmiiany $\Pi = p^2$, otrzymamy liniowe równanie niejednorodne

$$\frac{d\Pi}{dQ} + \frac{2}{Q} \Pi = \frac{2}{Q} [\nu Q - \mu Q^2], \quad (2.46)$$

gdzie $\mu = q/\kappa$, $\nu = C_1/\kappa$. Łatwo widać, że rozwiązanie równania jednorodnego

$$\frac{d\Pi_0}{dQ} + \frac{2}{Q}\Pi_0 = 0$$

dane jest wzorem $\Pi_0 = C/Q^2$. Rozwiązanie problemu niejednorodnego standardowo poszukujemy w postaci

$$\Pi = \frac{C(Q)}{Q^2} \quad (2.47)$$

(po raz kolejny wykorzystujemy metodę uzmienniania stałej). Podstawiając (2.47) do równania (2.46), po elementarnych algebraicznych przekształceniach i jednej kwadraturze otrzymujemy:

$$\Pi = \frac{C_0}{Q^2} + \frac{2\nu}{3}Q - \frac{\mu}{2}Q^2.$$

W celu uniknięcia syngularności kładziemy $C_0 = 0$. Po pierwiastkowaniu i elementarnych przekształceniach otrzymamy:

$$\frac{dQ}{\sqrt{\frac{2\nu}{3}Q - \frac{\mu}{2}Q^2}} = dx.$$

Wprowadzając zmienną

$$\tau = \frac{\sqrt{\mu/2}Q - B}{B}, \quad B = \frac{\nu}{3}\sqrt{2/\mu}$$

dostaniemy równość

$$\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = \sqrt{\mu/2}dx.$$

Całkując, oraz rozwiązując uzyskany wzór względem Q , otrzymujemy:

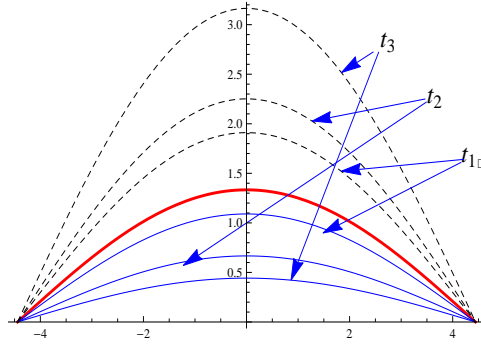
$$Q = \sqrt{2B^2\mu} \left\{ 1 + \cos \left[\sqrt{\frac{\mu}{2}}x \right] \right\} = \frac{4C_1}{3q} \cos^2 \sqrt{\frac{q}{8\kappa}}x.$$

Zatem przy $\beta = 2$, $\sigma = 1$ równanie (2.43) posiada rozwiązanie uogólnione

$$u(t, x) = \frac{1}{(t_f - t)} \begin{cases} \frac{4}{3q} \cos^2\left[\frac{\pi x}{2L}\right] & \text{gdzie } |x| < L = \sqrt{\frac{2\kappa\pi^2}{q}}, \quad t < t_f, \\ 0 & \text{gdzie indziej} \end{cases} \quad (2.48)$$

Wnioski.

- Rozwiązanie zagadnienia (2.43) przy $\beta = 2$, $\sigma = 1$ jest zlokalizowane na odcinku $(-L, L)$.



Rys. 2.9: Rozwiązanie (2.56) odpowiadające różnym wartościom parametrów: pogrubiona (czerwona) linia odpowiada wartości $C = 0$; linie przerywana odpowiadają rozwiązaniu uzyskanemu przy $\lambda = 1$, $C = 0.15$ w różne momenty czasu ($0 < t_1 < t_2 < t_3$); rozwiązana znajdujące się pod rozwiązaniem stacjonarnym odpowiadają wartościom $\lambda = 1$, $C = -1$.

- W skończonym czasie, gdy $t \rightarrow t_f - 0$, rozwiązanie w każdym punkcie $x \in (-L, L)$ dąży do $+\infty$.

Przyczyny powodujące lokalizację i "blow-up": źródło nieliniowe qu^2 daje tym więcej ciepła i wyższa jest temperatura. Z drugiej strony, współczynnik przewodnictwa cieplnego κu jest niezerowy tylko w tych punktach x dla których $u(t, x) > 0$, tak więc "zimne" obszary pozostają nieprzewodzące, dzięki czemu energia cieplna, dostarczana przez źródło, nie jest odprowadzana i w skończonym czasie powoduje wzrost temperatury w ograniczonym obszarze do nieskończoności.

2.2.6. Równanie ze źródłem i zlewem.

Rozpatrujemy równanie

$$u_t = (u u_x)_x + u^2 - u, \quad t > 0. \quad (2.49)$$

Rozwiązanie poszukujemy w postaci

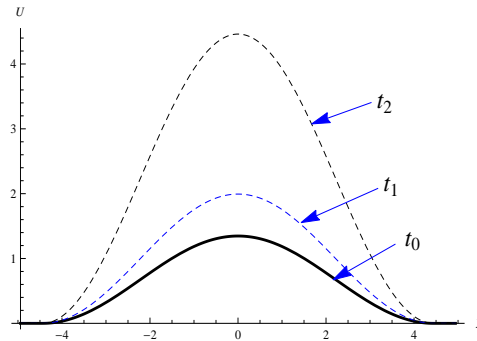
$$u(t, x) = P(t) X(x). \quad (2.50)$$

Podstawiając do (2.49), po zrózniczkowaniu oraz prostych algebraicznych przekształceniach, otrzymamy następujący układ:

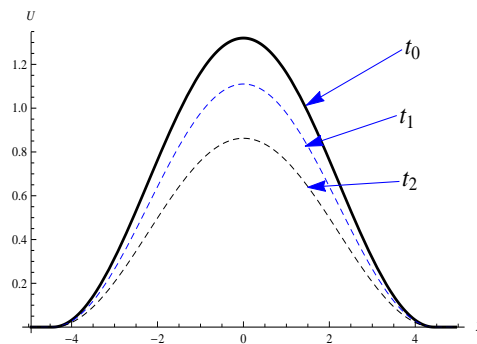
$$\frac{\dot{P}(t) + P(t)}{P^2(t)} = \frac{[Q'(x)]^2 + Q(x)Q''(x) + Q^2}{Q(x)} = \lambda.$$

A więc zmienne się rozdzieliły. Całkując lewą stronę równości

$$\frac{dP}{P(\lambda P - 1)} = dt, \quad (2.51)$$



Rys. 2.10: Rozwiązanie numeryczne w którym jako dane Cauchy'ego w chwili $t_0 = 0$ wykorzystane zostało rozwiązanie (2.56) z $\lambda = 1$, $C = 0.01$, zaburzone małym dodatnim zaburzeniem. Rozwiązanie przedstawione w momenty czasu $t_0 = 0.$, $t_1 = 3.5$, $t_2 = 4.25$.



Rys. 2.11: Rozwiązanie numeryczne w którym jako dane Cauchy'ego w chwili $t_0 = 0$ wykorzystane zostało rozwiązanie (2.56) z $\lambda = 1$, $C = 0.01$, zaburzone małym ujemnym zaburzeniem. Rozwiązanie przedstawione w momenty czasu $t_0 = 0.$, $t_1 = 3.0$, $t_2 = 4.0$.

otrzymamy:

$$\int \frac{dP}{P(\lambda P - 1)} = - \int \frac{dP}{P} + \int \frac{\lambda dP}{\lambda P - 1} = \log \frac{\lambda P - 1}{C P}.$$

Tak więc rozwiązanie równania (2.51) ma postać

$$P(t) = \frac{1}{\lambda - C e^t}.$$

Pozostałe równanie można przedstawić w postaci

$$Q Q'' + [Q']^2 = Q(\lambda - Q). \quad (2.52)$$

Wykorzystując podstawienia $Q' = R[Q(x)]$, $Q'' = R[Q(x)] \frac{dR}{dQ}$, a następnie wprowadzając zmienną $\Pi = R^2$, możemy przepisać to równanie w następującej równoważnej postaci:

$$\frac{d\Pi}{dQ} + \frac{2}{Q} \Pi = 2(\lambda - Q). \quad (2.53)$$

Zauważamy że równanie (2.53) z dokładnością do stałych pokrywa się z równaniem (2.46) poprzedniego podpunktu. Dlatego oczekiwać można iż rozwiązanie problemu wyjściowego da się przedstawić w postaci

$$Q = A \cos^2 [\beta x]. \quad (2.54)$$

Podstawiając (2.54) do równania (2.52) otrzymamy parę równań algebraicznych

$$6A\beta^2 = \lambda, \quad 8\beta^2 = 1.$$

Stąd więc

$$Q(x) = \frac{4\lambda}{3} \cos^2 \left[\frac{x}{\sqrt{8}} \right], \quad (2.55)$$

i rozwiązanie (uogólnione) równania wyjściowego można przedstawić w postaci

$$u(t, x) = \frac{4\lambda}{3[\lambda - C e^t]} \begin{cases} \cos^2 \frac{x}{\sqrt{8}} & \text{gdy } |x| < \sqrt{2}\pi \\ 0 & \text{gdzie indziej} \end{cases}. \quad (2.56)$$

Przy $\lambda > 0$ (jedyne fizycznie uzasadniony przypadek) mamy tu trzy opcje:

1. $C = 0$; odpowiada temu stacjonarne rozwiązanie zlokalizowane;
2. $C < 0$ rozwiązanie wykładniczo zanika z czasem;
3. $\lambda > C > 0$; rozwiązanie dąży do nieskończoności gdy $t \rightarrow \log[\lambda/C] - 0$, p. rys. 2.9

Wniosek. Równanie ze źródłem i zlewem posiada stacjonarne rozwiązanie zlokalizowane w przestrzeni. Rozwiązanie to jednak nie jest stabilne: małe ujemne zaburzenie powoduje zanik rozwiązania do zera, natomiast małe dodatnie zaburzenia powodują tworzenie się rozwiązania typu "blow-up". Potwierdza się to symulacjami numerycznymi, p. rys. 2.10, 2.11.

Zadanie 2.2..6.

1. Znaleźć przekształcenie $u(t, x) = f(t)W(t, x)$, które sprowadza równanie

$$u_t = \kappa u_{xx} + \sigma u$$

do liniowego równania transportu ciepła dla funkcji W .

2. Znaleźć rozwiązanie, w które przechodzi rozwiązanie $W = \frac{1}{\sqrt{4\kappa\pi t}} \exp\left[-\frac{x^2}{4\kappa t}\right]$.
3. Jaki jest przebieg zmienności funkcji $u_{max}(t) = \max_{x \in R} u(t, x)$.

Rozwiązanie.

1. $\dot{f}(t)W + f(t)W_t = \kappa f(t)W_{xx} + \sigma f(t)W$.

Stąd

$$\dot{f}(t) = \sigma f(t) \implies f(t) = \exp[\sigma t].$$

2. $u(t, x) = \exp[\sigma t] \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \exp\left[-\frac{x^2}{4\kappa t}\right]$.

3. $u_{max}(t) = \exp[\sigma t] \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}}$.

Pochodna tej funkcji równa jest

$$\exp[\sigma t] \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \left[\sigma - \frac{1}{2t} \right].$$

Oznacza to że funkcja ma ekstremum przy $t = 1/(2\sigma)$. Nie może to być maksimum lokalne, ponieważ przy $t = +0$ oraz przy $t = +\infty$ przybiera ona wartości nieskończone. Zatem $u_{max}(t)$ jest funkcją malejącą w przedziale $t \in (+0, 1/(2\sigma))$ oraz rosnącą w przedziale $t \in (1/(2\sigma), +\infty)$.

Zadanie 2.2..7.

Niech $f(z)$ jest gładką ograniczoną funkcją. Wykazać że funkcja

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\kappa\pi t}}$$

spełnia równania transportu ciepła

$$u_t = \kappa u_{xx}.$$

2.2.7. O roli rozwiązań samopodobnych. Zasada maksimum i twierdzenie porównawcze. Istnienie rozwiązań samopodobnych, które jest interesujące samo z siebie, jest czymś więcej niż ciekawostką w świetle tego, że rozwiązania te służą do oszacowania dużej ilości innych rozwiązań, które już nie są niezmiennicze, lecz w pewnym sensie dowolne. Jest to skutkiem ZASADY MAKSIMUM.

Rozpatruje się zagadnienie początkowe:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [K(T) \frac{\partial T}{\partial x}] & K(T) > 0, T > 0, -\infty < x < \infty, t > 0 \\ T(x, 0) = T_0(x) \geq 0, & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

Twierdzenie 2.2..1 (*zasada MAX*)

Maksimum rozwiązania $T(x, t)$ w dowolnym momencie czasu nie przekracza maksimum danych początkowych:

$$\max T(t, x) \leq \max T_0(x), \quad t > 0. \quad (2.57)$$

Z zasady maksimum wynikają twierdzenia porównawcze:

Twierdzenie 2.2..2 *Niech $T^{(1)}(t, x)$, $T(t, x)$, $T^{(2)}(t, x)$ - rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego, odpowiadające warunkom Cauchy'ego $T_0^{(1)}(x)$, $T_0(x)$, $T_0^{(2)}(x)$. Wówczas, jeśli:*

$$T_0^{(1)}(x) \leq T_0(x) \leq T_0^{(2)}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.58)$$

to:

$$T^{(1)}(t, x) \leq T(t, x) \leq T^{(2)}(t, x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall t > 0 \quad (2.59)$$

Stąd można wyciągnąć szereg ogólnych wniosków, na przykład o tym, że prędkość poruszania się dowolnego zaburzenia mającego zwarty nośnik będzie skończona. Bardziej dokładnie stwierdzenie to brzmi następująco:

Twierdzenie 2.2..3 *Załóżmy że $K(T) = K_0 T^\sigma$, $\sigma > 0$; $T_0(x)$ - funkcja ograniczona, nieujemna, nie równa tożsamościowo zeru, o zwartym nośniku. Wówczas*

- *rozwiązanie zagadnienie początkowego*

$$T_t = K_0 [T^\sigma T_x]_x, \quad T(0, x) = T_0(x) \quad (2.60)$$

będzie miało zwarty nośnik;

- *prędkość propagacji fali cieplnej będzie skończona;*

- rozwiązanie zagadnienie (2.60) będzie ograniczone od dołu rozwiązaniem zerowym, zaś od góry rozwiązaniem zagadnienia o wybuchu cieplnym

$$\begin{aligned} T_t &= K_0 [T^\sigma T_x]_x, \quad x \in R, \quad t > t_0, \\ T(t_0, x) &= 0 \quad \text{przy } x \neq 0, \\ \int_R T(t, x) &= Q, \quad t > t_0 \end{aligned}$$

przy pewnych wartościach parametrów Q , t_0 .

Dowód. Oczywiście jest, że jako dolną funkcję (minorantę) możemy wykorzystać trywialne rozwiązanie $T(t, x) = 0$.

Jako górną (majorantę) będziemy usiłowali wykorzystać rozwiązanie zagadnienia o wybuchu cieplnym o parametrach które niżej będą sprecyzowane.

Bez utraty ogólności zakładamy że $\text{supp } T_0(x) \in (-M, M)$. Założenie oparte jest na tym że równanie nasze nie zależy jawnie od zmiennej x , a zatem jest niezmiennicze względnie translacji $\bar{x} = x + C$. A więc, jeżeli $\text{supp } T_0(x) \in (a, b)$ wówczas oznaczamy $b - a = M$ i, wykorzystując translację względem x z $C = -(a + b)/2$ otrzymamy żadaną konfigurację geometryczną. Ponadto wprowadzamy oznaczenie

$$H = \max_{-M < x < M} T_0(x).$$

Wiemy, że rozwiązanie zagadnienia o wybuchu cieplnym ma postać

$$T_{Auto} = Q_0^{\frac{2}{2+\sigma}} K_0^{-\frac{1}{2+\sigma}} t^{-\frac{1}{2+\sigma}} f(\xi) \quad \xi = \frac{1}{(Q_0^\sigma K_0)^{\frac{1}{2+\sigma}} t^{\frac{1}{2+\sigma}}} x \quad (2.61)$$

$$f(\xi) = \begin{cases} [(\xi_\phi^2 - \xi^2)^{\frac{\sigma}{2(2+\sigma)}}]^{\frac{1}{\sigma}} & |\xi| \leq \xi_\phi \\ 0 & |\xi| > \xi_\phi \end{cases} \quad (2.62)$$

ξ_ϕ - stała zależna od σ (szczegóły są podane w rozwiązaniu ćwiczenia....).

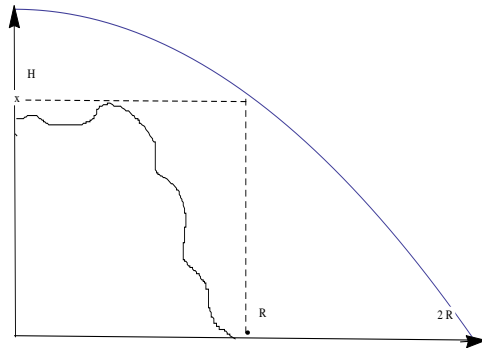
Jeżeli teraz nam się uda dobrać parametry Q oraz t_0 w taki sposób by funkcja $T_0(x)$ całkowicie leżała poniżej wykresu funkcji $T_{Auto}(t_0, x, ; Q)$, wówczas teza wynikałaby z twierdzenia porównawczego.

Uwaga. Korzystając z niezmienniczości równania transportu względem translacji $t \rightarrow t + C_1$, możemy bez utraty ogólności zadać warunek początkowy w chwili t_0 .

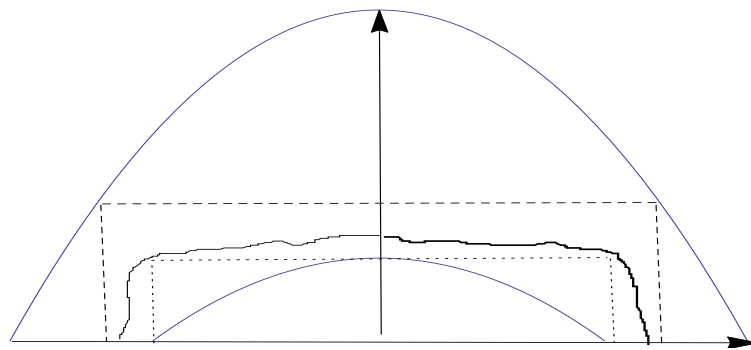
Dobieramy Q , t_0 w następujący sposób:

- żądamy spełnienia równości

$$x_\phi = \xi_\phi [Q^\sigma K_0 t_0]^{\frac{1}{2+\sigma}} = 2M;$$



Rys. 2.12:



Rys. 2.13:

- żądamy spełnienia nierówności

$$\min_{-M < x < M} T_{Auto}(t_0, x; Q) \geq H;$$

- zauważamy że funkcja $T_{Auto}(t_0, x; Q)$ jest monotoniczna przy $x > 0$ oraz jest symetryczna względem odbić; osiąga ona minimum na odcinku $[0, M]$ dokładnie w punkcie $x = M$.

Stąd nasze kolejne żądanie będzie następujące:

$$T_{Auto}(t_0, M; Q) = H \quad (2.63)$$

(na rys. 2.12) pokazana jest "połówka" konfiguracji geometrycznej, którą chcemy zrealizować)

Zatem do rozwiązania jest następujący układ równań algebraicznych"

$$T_{Auto}(t_0, M; Q) = \left[\frac{Q^2}{K_0 t_0} \right]^{\frac{1}{2+\sigma}} \left\{ \frac{3\xi_\Phi \sigma}{8(2+\sigma)} \right\}^{\frac{1}{\sigma}} = H, \quad (2.64)$$

$$Q^\sigma K_0 t_0 = \left[\frac{2M}{\xi_\Phi} \right]^{2+\sigma}. \quad (2.65)$$

Zmudne algebraiczne obrachunki (które najlepiej przeprowadzić w pakiecie *Mathematica*) dają ostatecznie następujące wartości parametrów:

$$Q = \frac{2 M H}{\xi_\Phi} \left[\frac{8(2+\sigma)}{3 \sigma \xi_\Phi} \right]^{\frac{1}{\sigma}},$$

$$t_0 = \frac{3 \sigma M^2}{2 K_0 (2+\sigma) \xi_\Phi H^\sigma}.$$

Nieco więcej możemy powiedzieć o ewolucji zagadnienia Cauchy'ego z funkcją $T_0(x)$ spełniającą warunki

$$\text{supp } T_0(x) \in (-M, M),$$

$$\max_{[-M, M]} T_0(x) \leq \mathbf{A},$$

$$\min_{[-M/2, M/2]} T_0(x) \geq \mathbf{a}$$

przy $0 < a < A < \infty$. Wówczas można skonfigurować majorantę i minorantę z rozwiązań samopodobnych $T_{Auto}(t, A; Q)$ oraz $T_{Auto}(t, a; q)$ oraz dobrać odpowiednie parametry w taki sposób że spełnione będą nierówności

$$T_{Auto}(t_0, a; q) < T_0(x) < T_{Auto}(t_0, A; Q),$$

(p. rys. 2.13). Z twierdzenia porównawczego wynika że fala cieplna przy $t > t_0$ będzie się znajdować pomiędzy tymi rozwiązaniami samopodobnymi. Odpowiednie odzaczowania pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie.

Rozdział 3

Modele typu hydrodynamicznego

3.1. Równania dynamiki cieczy i gazu

W rozdziale wstępnym wspominaliśmy o tym, że stany gazu i cieczy można opisać za pomocą pięciu parametrów makroskopowych: pola prędkości $\vec{u}(t, x)$, pola gęstości $\rho(t, x)$ oraz pola ciśnienia $p(t, x)$. Każdy opis jest idealizacją. W danym opisie pomijamy procesy cieplne oraz własności tensorowe płynów i gazów, które przejawiają się w procesach szybkich (wybuch, detonacja etc.) oraz w procesach w których istotną rolę odgrywa wymiana energii cieplnej (na przykład w procesie termokonwekcji, odgrywającym wyjątkową rolę w meteorologii oraz klimatologii).

Do pełnego opisu ośrodka scharakteryzowanego, w przypadku trójwymiarowym, przez pięć parametrów, potrzeba układu złożonego z pięciu równań cząstkowych. Układ taki można znaleźć, wykorzystując równania bilansu masy i pędu, które dają nam cztery równania, oraz *równanie stanu*, które wiąże pomiędzy sobą pole ciśnienia i pole gęstości.

3.1.1. Równanie bilansu masy. Zaczynamy od bilansu masy. Prawo zachowania masy mówi że materia nie znika i nie tworzy się "z niczego" (osoba nawet pobieżnie znająca z terań cząstek elementarnych może, oczywiście, podważyć daną tezę, jednak wspomniane prawo działa bardzo dokładnie w świecie małych prędkości i umiarkowanych energii).

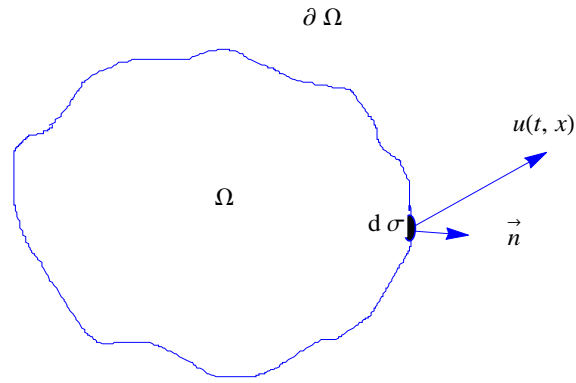
Masa skumulowana w obszarze Ω wyraża się następującym wzorem:

$$M(t) = \int_{\Omega} \rho(t, x) dx, \quad (3.1)$$

gdzie $\rho(t, x)$ -gęstość ośrodka w chwili t w punkcie x . Ze względu na wspomniane prawo zachowania, zmiany wielkości $M(t)$ mogą być spowodowane jedynie potokiem (unoszeniem) masy przez nieruchomą granicę $\partial\Omega$.

Równanie bilansu masy będzie więc miało postać

$$\frac{dM}{dt} = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} dx = - \int_{\partial\Omega} \rho \vec{u}(t, x) d\vec{\sigma}, \quad (3.2)$$



Rys. 3.1:

gdzie $d\vec{\sigma} = d\sigma \vec{n}$ - ukierunkowany element powierzchni, \vec{n} - wektor jednostkowy, skierowany na zewnątrz Ω , p. rys. 3.1.

Stosując twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego, otrzymamy:

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} [\rho \vec{u}] \right\} dx = 0. \quad (3.3)$$

Z dowolności objętości Ω wynika iż całka ta będzie równa zero tylko wtedy gdy wyrażenie podcałkowe będzie się zerować w dowolnym punkcie, w dowolnej chwili t , co daje w wyniku równanie

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x^k} [\rho(t, x) u^k(t, x)] = 0, \quad n = 1, 2, 3. \quad (3.4)$$

3.1.2. Równanie bilansu pędu. Równanie bilansu pędu jest bezpośrednio związane z drugim prawem Newtona. Dla punktu materialnego prawo to da się zapisać w postaci

$$\frac{d [m u^i]}{dt} = \sum_k F_k^i, \quad i = 1, \dots, n, \quad n = 1, 2, 3, \quad (3.5)$$

gdzie m -masa punktu materialnego, u^i - i -ta składowa wektora prędkości, $\sum_k F_k^i$ - i -ta składowa sumy sił działających na punkt materialny. Zwróćmy uwagę na to, że człon $m\vec{u}$ opisuje pęd punktu materialnego.

Z uwagi na to, iż wyraz dla pędu zawartego w objętości Ω ma postać

$$\vec{P}(t) = \int_{\Omega} \rho(t, x) \vec{u}(t, x) dx,$$

analog kontynualny wzoru (3.5) przybiera postać

$$\frac{d}{dt} P(t)^i = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(t, x) u(t, x)^i dx = \int_{\Omega} \sum_k f_k^i dx -$$

$$- \int_{\partial\Omega} \rho u^i(t, x) \vec{u}(t, x) d\vec{\sigma} - \int_{\partial\Omega} p(t, x) \delta_{ik} n^k d\sigma \quad i = 1, \dots, n, \quad n = 1, 2, \dots, 3,$$

dzie $\sum_k f_k^i$ - i -ta składowa gęstości sił zewnętrznych (najczęściej jako siła zewnętrzna występuje siła grawitacyjna $\rho \vec{g}$), natomiast człon $-p(t, x) \delta_{ik}$ w całce powierzchniowej opisuje rzut i -tej składowej siły ciśnienia ośrodka na powierzchnię $\partial\Omega$ na k -tą współrzędną (zgodnie z prawem Pascala, ciśnienie jest jednakowe we wszystkich kierunkach).

Stosując twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego, otrzymamy równanie

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\rho u^i] + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho u^i u^j + p \delta_{ij}] - \sum_k f_k^i \right\} dx =$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\rho u^i] + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho u^i u^j] + \frac{\partial p}{\partial x^i} - \sum_k f_k^i \right\} dx = 0.$$

Z dowolności objętości Ω wynika iż całka ta będzie równa zero tylko wtedy gdy wyrażenie podcałkowe będzie się zerować w dowolnym punkcie, w dowolnej chwili t , co daje równanie

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho u^i] + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho u^i u^j] + \frac{\partial p}{\partial x^i} = \sum_k f_k^i \quad n = 1, 2, 3.$$

Powyższe równanie można również przedstawić w postaci

$$\rho \left[\frac{\partial u^i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n u^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \right] + \frac{\partial p}{\partial x^i} - F^i +$$

$$u^i \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j} (\rho u^j) \right] = 0,$$

gdzie $F^i = \sum_k f_k^i$. Ponieważ w nawiasach kwadratowych ostatniego wiersza jest zapisane równanie (3.4), więc, ostatecznie, równanie bilansu pędu można przedstawić w postaci

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} u^i + \sum_{j=1}^n u^j \frac{\partial}{\partial x^j} u^i \right] + \frac{\partial p}{\partial x^i} = F^i, \quad i = 1, \dots, n, \quad n = 1, 2, 3. \quad (3.6)$$

Układ (3.4), (3.6) składa się z $n + 1$ równań dla $n + 2$ funkcji, więc jest on niepełny. Żeby dopełnić go, należy skorzystać z równania stanu $F(\rho, p)$, które lansuje związek pomiędzy ciśnieniem i pędem. W przypadku opisu procesów adiabatycznych (tzn. procesów "szybkich", w których wymiana cieplna nie odgrywa istotnej roli) przebiegających w gazie idealnym, równanie stanu przybiera postać

$$p = \frac{\beta}{\gamma + 1} \rho^{\gamma+1}.$$

Równanie stanu można wykorzystać w celu wyeliminowania funkcji p z równania bilansu pędu. Można też wykorzystać konsekwencje różniczkowe tego równania. W ostatnim przypadku otrzymamy klasyczny układ gazodynamiczny, który w nieobecności sił masowych przybiera postać

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} u^i + \sum_{j=1}^n u^j \frac{\partial}{\partial x_j} u^i \right] + \frac{\partial p}{\partial x^i} = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x^k} (\rho(t, x) u^k(t, x)) = 0, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{k=1}^n u^k \frac{\partial p}{\partial x^k} + \beta \rho^{\gamma+1} \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x^k} u^k = 0, \quad (3.9)$$

gdzie $i = 1, \dots, n$, $n = 1, 2, 3$.

W przypadku gdy ośrodek jest nieściśliwy ($\rho = \rho_0 = \text{const}$) i działa w nim siła tarcia, potocznie zwana lepkością, analog układu (3.7) przybiera postać

$$\rho_0 \left[\frac{\partial}{\partial t} u^i + \sum_k u^k \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \right] + \frac{\partial p}{\partial x^i} = \nu \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} u^i, \quad (3.10)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x^k} u^k(t, x) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \quad (3.11)$$

gdzie ν jest współczynnikiem lepkości. Jest to układ równań Naviera-Stokesa.

3.1.3. Równanie Hopfa. Równanie

$$u_t + u u_x = 0 \quad (3.12)$$

jest równaniem modelowym w stosunku do równań gazodynamiki.

Lemat 3.1..1. *Rozwiązanie zagadnienia Cauchyego*

$$u_t + u u_x = 0, \quad u(0, x) = \rho(x) \in C^1(R) \quad (3.13)$$

dane jest wzorem

$$u(t, x) = \rho(x - t u(t, x)). \quad (3.14)$$

Dowód. Policzmy pochodną funkcji (3.14) względem t :

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \dot{\rho}(z)|_{z=x-tu} [-u - t u_t].$$

Stąd

$$u_t = -\frac{u \dot{\rho}(z)}{1 + t \dot{\rho}(z)}.$$

Analogicznie otrzymujemy wzór dla pochodnej względem x :

$$u_x = \frac{\dot{\rho}(z)}{1 + t \dot{\rho}(z)}.$$

Po podstawieniu do równanie (3.13) otrzymujemy tożsamość. Nietrudno dostrzec że warunek początkowy figurujący w tym równaniu jest również spełniony.

W niektórych przypadkach rozwiązanie zagadnienia Cauchyego (3.13) udaje się skonstruować jawnie. Niech

$$\rho(x) = \begin{cases} 2 & \text{gdy } x < 0, \\ 2 - x & \text{gdy } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{gdy } x > 1. \end{cases}$$

Wiemy że rozwiązanie zagadnienia początkowego (3.13) dane jest wzorem (3.14). Zauważmy że równanie wyjściowe można również zapisać w równoważnej postaci charakterystycznej

$$\frac{du}{dt}|_{\Gamma} = 0, \quad \Gamma = \frac{dx}{dt} = u.$$

Powyższy wzór mówi nam iż funkcja u pozostaje stała wzdłuż każdej charakterystyki Γ . Zatem rozwiązanie można skonstruować z trzech kawałków.

- Lewy dany jest wzorem

$$u = 2 \quad \text{gdy } \arg = x - t u = x - 2t < 0,$$

lub, po rozwikłaniu nierówności,

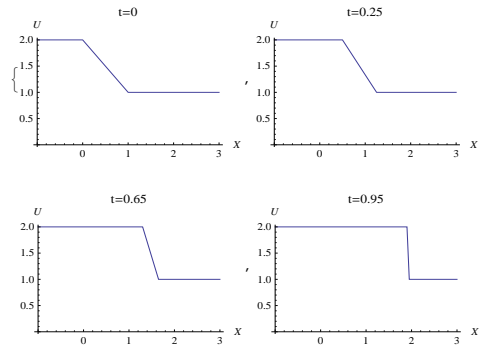
$$u = 2 \quad \text{gdy } x < 2t.$$

- Środkowy

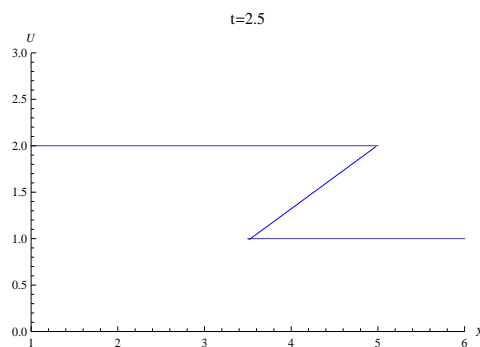
$$u = 2 - (\arg) = 2 - (x - ut) \quad \text{gdy } 0 < \arg = x - ut < 1.$$

Powyższe równanie oraz nierówności należy rozwiązać względem u . Po nieskomplikowanych obliczeniach (w których zakładało się że $1 - t > 0$), otrzymuje się "środkowe" rozwiązanie w jawnej postaci:

$$u = \frac{2 - x}{1 - t} \quad \text{gdy } 2t < x < 1 + t.$$



Rys. 3.2:



Rys. 3.3:

- Rozumując analogicznie, można otrzymamy trzeci kawałek rozwiązania w postaci

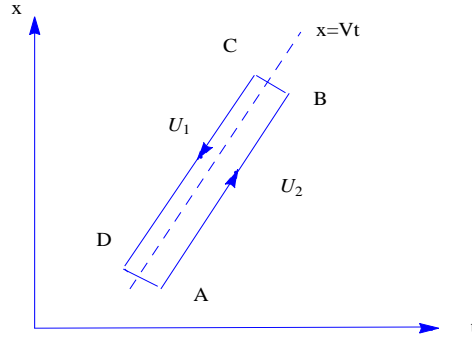
$$u = 1 \quad \text{gdy} \quad x > 1 + t.$$

Ostatecznie dla $0 < t < 1$ otrzymaliśmy rozwiązanie

$$u(t, x) = \begin{cases} 2 & \text{gdy} \quad x < 2t, \\ \frac{2-x}{1-t} & \text{gdy} \quad 2t < x < 1+t, \\ 1 & \text{gdy} \quad x > 1+t. \end{cases} \quad (3.15)$$

Powyższe rozwiązanie jest przedstawione graficznie na rys. 3.2. Rysunek ten ilustruje samoistne tworzenie się w trakcie ewolucji rozwiązania typu fali uderzeniowej (nieciągłości pierwszego rodzaju). Przy $t > 1$ wzór (3.15) określa rozwiązanie, które przestaje być funkcją jednoznaczną, p. rys. 3.3. Rozwiązanie takie nie jest stabilne i w praktyce nie jest realizowane, w odróżnieniu od rozwiązania typu fali uderzeniowej

$$u(t, x) = \begin{cases} u_2 & \text{gdy} \quad x < Vt, \\ u_1 & \text{gdy} \quad x > Vt, \end{cases} \quad (3.16)$$



Rys. 3.4:

które **jest stabilne**. Występujące we wzorze (3.16) parametry u_1 , u_2 są stałe, przy czym $u_2 > u_1$; parametr V określa stałą prędkość propagacji fali uderzeniowej.

Okazuje się że stała V jest jednoznacznie określona przez warunki graniczne $u_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} u(t, x)$, $u_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} u(t, x)$.

Lemat 3.1..2. Zachodzi wzór

$$V = \frac{u_1 + u_2}{2}. \quad (3.17)$$

Dowód. Równanie (3.12) można zapisać w postaci "prawa zachowania"

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad F = u(t, x), \quad G = \frac{u^2(t, x)}{2}.$$

Z powyższego równania wynikają równości całkowite

$$0 = \int \int_S \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} = \int_{ABCD} F dx - G dt,$$

gdzie prostokąt $ABCD$ jest symetryczny względem "linii światowej" frontu fali uderzeniowej (p. rys. 3.4), S - wnętrze prostokąta $ABCD$. Ściągając AB oraz AD do zera z zachowaniem relacji $|AB| = |DC| \ll |AD| = |BC|$, otrzymamy:

$$\int_{AB} u dx - \frac{u^2}{2} dt = \int_{DC} u dx - \frac{u^2}{2} dt + O(|AD|).$$

Uwzględniając że $dx = V dt$ oraz biorąc pod uwagę to że przed frontem fali $u = u_1$, zaś za frontem $u = u_2$, otrzymamy równość

$$\left(u_2 V - \frac{u_2^2}{2} \right) = \left(u_1 V - \frac{u_1^2}{2} \right) + O(|AB|).$$

Ściągając prostokąt do zera, otrzymamy równość (3.17).

Zadanie 3.1.1. Dane jest równanie

$$u_t + u^n u_x = 0.$$

Dla rozwiązania typu fali uderzeniowej

$$u(t, x) = \begin{cases} U_2 & \text{gdy } x < V t, \\ U_1 & \text{gdy } x > V t, \end{cases} \quad 0 \leq U_1 < U_2$$

znaleźć prędkość V .

Rozwiązanie. Powyższe równanie zapisujemy w postaci "prawa zachowania"

$$F_t + G_x = 0, \quad F = u, \quad G = \frac{u^{n+1}}{n+1}.$$

Konsekwencją tego równania jest równość całkowa

$$0 = \int \int_S F_t + G_x dt dx = \int_{ABCD} F dx - G dt$$

(konfiguracja i obszary całkowania jak na rys. 3.4). Stąd otrzymujemy równość

$$V U_1 - \frac{U_1^{n+1}}{n+1} = V U_2 - \frac{U_2^{n+1}}{n+1}.$$

Wynika z niej że

$$V = \frac{U_2^n + U_2^{n-1} U_1 + \dots + U_1^n}{n+1}.$$

Zadanie 3.1.2. Znaleźć rozwiązanie samopodobne problemu

$$u_t + \alpha u u_x = 0, \quad x > 0, \quad t > 0 \tag{3.18}$$

$$u(0, x) = 0, \quad x > 0, \tag{3.19}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) dx = Q > 0, \quad t > 0 \tag{3.20}$$

(zakładamy że $0 \leq u(t, x)$).

Rozwiązanie. Jako jednostki o wymiarach niezależnych wybieramy $Q [E L]$, $\alpha \left[\frac{L}{T E} \right]$ oraz $t [T]$ (zakładamy że $[u] = [E]$). Analiza wymiarów pozwala wyrazić rozwiązanie w następującej postaci prowadzącej do redukcji:

$$u(t, x) = \sqrt{\frac{Q}{\alpha t}} \varphi(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{t \alpha Q}}.$$

Podstawiając ten ansatz do (3.18), otrzymamy równanie zredukowane

$$\frac{d}{d\xi} [\xi \varphi - \varphi^2] = 0.$$

Stąd

$$\varphi(\xi - \varphi) = C.$$

Z warunku (3.19) natychmiast wynika że $C = 0$. Z nieujemności rozwiązania wynika istnienie stałej $\xi_{\Phi} > 0$ takiej że

$$\varphi = \begin{cases} \xi & \text{gdy } 0 < \xi < \xi_{\Phi}, \\ 0 & \text{gdy } \xi > \xi_{\Phi}. \end{cases}$$

Stałą ξ_{Φ} określamy z warunku (3.20) - jest ona równa $\sqrt{2}$. Zatem

$$u(t, x) = \frac{1}{\alpha} \begin{cases} \frac{x}{t} & \text{gdy } 0 < x < x_{\Phi} = \sqrt{2t\alpha Q}, \\ 0 & \text{gdy } x > x_{\Phi}. \end{cases} \quad (3.21)$$

3.1.4. Równanie Burgersa. Równanie

$$u_t + u u_x = \nu u_{xx} \quad (3.22)$$

jest równaniem modelowym w stosunku do równań Naviera-Stokesa.

Rozpatrzmy zagadnienia brzegowe

$$\begin{aligned} u_t + u u_x = \nu u_{xx}, \quad u(-\infty, x) = u_2, \quad u(+\infty, x) = u_1, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, \pm\infty) = 0, \quad u_2 > u_1 \geq 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Rozwiązanie poszukujemy w postaci

$$u(t, x) = U(z), \quad z = x - s t, \quad s = \text{const}. \quad (3.24)$$

Podstawiając (3.24) do (3.23), otrzymamy równanie zwyczajne

$$\frac{d}{dz} \left\{ \frac{U^2}{2} - s U - \nu \dot{U} \right\} = 0.$$

Całkując otrzymamy

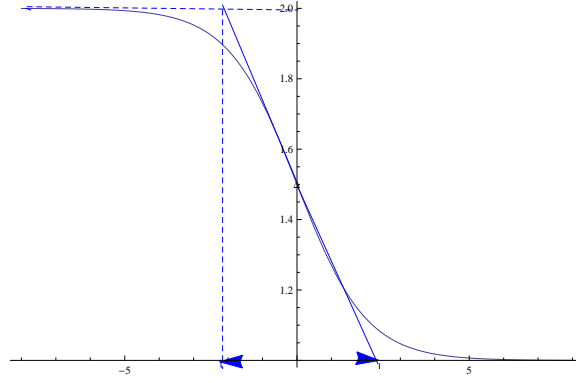
$$\frac{U^2}{2} - s U - \nu \dot{U} = C.$$

Z warunków brzegowych mamy

$$\frac{u_2^2}{2} - s u_2 = C = \frac{u_1^2}{2} - s u_1$$

Stąd mamy wyrażenie dla s :

$$s = \frac{u_2 + u_1}{2}.$$



Rys. 3.5:

Uwaga. *Zauważmy że prędkość fali s jest identyczna jak w odpowiednim rozwiązaniu równania Hopfa.*

Następnie, podstawiając wartość s do pierwszej równości, otrzymamy że

$$C = -\frac{u_1 u_2}{2}.$$

Zatem pozostaje rozwiązać równanie

$$\nu \dot{U} = \frac{1}{2} U(U - 2s) + \frac{u_1 u_2}{2},$$

które można przedstawić w postaci

$$\frac{dU}{U(U - 2s) + u_1 u_2} = \frac{1}{2\nu} dz.$$

Całkując lewą i prawą strony otrzymujemy:

$$\frac{1}{u_2 - u_1} \log \frac{|U - u_2|}{|U - u_1|} = \frac{1}{2\nu} (z - z_0).$$

Zakładając dodatkowo że $u_1 < U < u_2$ (monotoniczność profilu), otrzymamy

$$u_2 - U = (U - u_1) \exp \lambda (z - z_0), \quad \lambda = \frac{u_2 - u_1}{2\nu}.$$

Po nieskomplikowanych algebraicznych przekształceniach uzyskamy rozwiązanie

$$u(t, x) = \frac{u_2 + u_1 e^{\lambda(z-z_0)}}{1 + e^{\lambda(z-z_0)}}. \quad (3.25)$$

Wzór (3.25) opisuje tak zwaną rozmytą falę uderzeniową. Następnym pytaniem jest zależność szerokości efektywnej fali od parametrów. Mając wyrażenie analityczne dla szerokości efektywnej, możemy przeanalizować wpływ członu lepkościowego na rozwiązanie.

Szerokość efektywna może być określona na wiele sposobów które, na ogół, prowadzą do jakościowo identycznych wyników. Szerokość określimy w następujący sposób (p. rys. 3.1):

1. wyznaczamy punkt przegięcia wykresu funkcji $U(z)$;
2. określamy punkty przecięcia się prostej stycznej do punktu przegięcia z asymptotami $u = u_2$ oraz $u = u_1$ (określamy je jako (u_2, z_2) oraz (u_1, z_1) , odpowiednio);
3. szerokość efektywną określamy jako $\Delta = z_1 - z_2$.

Obliczając drugą pochodną otrzymujemy:

$$U''(z) = \lambda(u_1 - u_2)e^{\lambda(z-z_0)} \frac{e^{\lambda(z-z_0)} - 1}{(1 + e^{\lambda(z-z_0)})^3}. \quad (3.26)$$

Dla $z_0 = 0$, punkt przegięcia ma współrzędną $z = 0$.

Prosta styczna do rozwiązania w punkcie przegięcia określa się wzorem

$$L: \quad \frac{u_1 + u_2}{2} - \frac{(u_2 - u_1)^2}{2\nu} z.$$

Punkty przecięcia się L z asymptotami u_1, u_2 wynoszą, odpowiednio $z_{1,2} = \pm \frac{4\nu}{u_2 - u_1}$; tak więc

$$\Delta = \frac{8\nu}{u_2 - u_1}. \quad (3.27)$$

Wnioskujemy stąd że szerokość efektywna jest wprost proporcjonalna do współczynnika lepkości i odwrotnie proporcjonalna do różnicy asymptot. W przypadku gdy $\nu \rightarrow 0$, rozwiązanie (3.25) przechodzi w rozwiązanie równania Hopfa, opisujące propagację fali uderzeniowej. Widać, więc, że lepkość powoduje *rozmycie* frontu fali uderzeniowej. Pod innymi względami rozwiązania (3.25) oraz (3.16) są identyczne.

3.1.5. Zupełna całkowalność równania Burgersa.

Twierdzenie 3.1..1. *Zamianą zmiennych*

$$u(t, x) = -\frac{\Phi_x(t, x)}{\Phi(t, x)} \quad (3.28)$$

równanie Burgersa sprowadza się do równania transportu

$$\Phi_t - \nu \Phi_{xx} = 0.$$

Dowód. Obliczamy pochodne wyrażenia stojącego w prawej stronie równania (3.28):

$$u_t = -2\nu \frac{\Phi \Phi_{xt} - \Phi_x \Phi_t}{\Phi^2}, \quad u_x = -2\nu \frac{\Phi \Phi_{xx} - \Phi_x^2}{\Phi^2},$$

$$u_{xx} = -2\nu \frac{\Phi^2 \Phi_{3x} - 3\Phi \Phi_x \Phi_{xx} + 2\Phi_x \Phi_x^2}{\Phi^3}.$$

Podstawiając te wzory do równania Burgersa otrzymamy:

$$\begin{aligned} & -\frac{2\nu}{\Phi^3} \left\{ \Phi^2 \Phi_{xt} - \Phi \Phi_x \Phi_t - 2\nu \Phi_x (\Phi \Phi_{xx} - \Phi_x^2) - \right. \\ & \quad \left. -\nu (\Phi^2 \Phi_{3x} - 3\Phi \Phi_x \Phi_{xx} + 2\Phi_x^3) \right\} = \\ & -\frac{2\nu}{\Phi^3} \left\{ \Phi^2 (\Phi_{xt} - \nu \Phi_{3x}) - \Phi \Phi_x (\Phi_t - \nu \Phi_{xx}) \right\} = \\ & = -\frac{2\nu}{\Phi^3} \left(\Phi^2 \frac{\partial}{\partial x} - \Phi \Phi_x \right) (\Phi_t - \nu \Phi_{xx}). \end{aligned}$$

Lemat 3.1..3. *Transformacja Cole'a-Hopfa (3.28) wiąże rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego*

$$\begin{aligned} u_t + u u_x &= \nu u_{xx}, \\ u(0, x) &= F(x), \end{aligned} \tag{3.29}$$

gdzie $F(x)$ jest funkcją ciągłą i ograniczoną, z rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$\begin{aligned} & \Phi_t - \Phi_{xx}, \\ \Phi(0, x) &= C_1 \exp \left[-\frac{1}{2\nu} \int_0^x F(\xi) d\xi \right] \end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\tag{3.31}$$

Dowód. Warunki początkowe są związane transformacją

$$u(0, x) = -2\nu [\log \Phi(0, x)]_x.$$

Stąd

$$d \log \Phi(0, x) = -\frac{F(x)}{2\nu} dx.$$

Całkując otrzymamy

$$\log \Phi(0, x) = -\frac{1}{2\nu} \int_C^x F(\xi) d\xi,$$

lub

$$\Phi(0, x) = C_1 \exp \left[-\frac{1}{2\nu} \int_0^x F(\xi) d\xi \right].$$

Uwaga. Można pokazać, że wartość stałej całkowania C_1 nie jest istotna, dlatego przyjmujemy że $C_1 = 1$.

Lemat 3.1..4. *Jeżeli $\theta(x)$ jest funkcją ciągłą i ograniczoną, to rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego*

$$\begin{aligned}\Phi_t - \Phi_{xx} &= 0, \\ \Phi(0, x) &= \theta(x)\end{aligned}$$

dane jest wzorem

$$\Phi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(\xi) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\nu t}\right] d\xi. \quad (3.32)$$

Dowód tego lematu można znaleźć w większości podręczników z równań fizyki matematycznej ¹.

Wniosek 3.1..1. *Rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego (3.29) dane jest wzorem*

$$u(t, x) = \frac{\int_R \frac{x-\xi}{t} e^{-\frac{f(\xi, t, x)}{2\nu}} d\xi}{\int_R e^{-\frac{f(\xi, t, x)}{2\nu}}}, \quad (3.33)$$

gdzie

$$f(\xi, t, x) = \int_0^\xi F(z) dz + \frac{(x-\xi)^2}{2t}.$$

Przykład 3.1..1. *Rozpatrzmy zagadnienie początkowe*

$$u_t + u u_x - \nu u_{xx} = 0, \quad (3.34)$$

$$u(0, x) = F(x) = A\delta(x)H(x), \quad (3.35)$$

gdzie A -nieujemna stała, $\delta(x)$ - funkcja uogólniona, zwana deltą Diraca. Jest to funkcjonal liniowy zdefiniowany na zbiorze $C_0^\infty(R)$ funkcji nieskończenie różniczkowalnych o zwartym nośniku. Wartość tego funkcjonału na funkcji "próbnej" $\varphi(x) \in C_0^\infty(R)$ nieformalnie można przedstawić w następujący sposób ²:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x) dx = \varphi(0).$$

¹można go znaleźć w skrypcie <http://wms.mat.agh.edu.pl/vladimir/courses/Maindst7c.pdf>

²Reprezentacją delta-funkcji za pomocą całki jest działaniem niewłaściwym, gdyż $\delta(x)$ nie jest funkcją. Poprawną definicję można oprzeć na tym że $\delta(x)$ jest słabą granicą ciągu funkcji całkownych:

$$\delta(x) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left[-\frac{x^2}{4t}\right].$$

W terminach tych poprawna definicja przybiera postać

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{x^2}{4t}\right] \varphi(x) dx.$$

Dalej,

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \geq 0 \\ 0 & \text{gdzie indziej.} \end{cases}$$

Określmy

$$\int_0^x F(z) dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^x F(z) \varphi_{\varepsilon}(z) dz,$$

gdzie

$$C_0^{\infty} \ni \varphi_{\varepsilon}(z) = \begin{cases} \begin{cases} 1 & \text{na } \langle \varepsilon, x + \varepsilon/2 \rangle, \\ 0 & \text{na } R \setminus \langle \varepsilon/2, x + \varepsilon \rangle, \end{cases} & \text{gdy } x > 0, \\ \begin{cases} 1 & \text{na } \langle x - \varepsilon/2, \varepsilon/2 \rangle, \\ 0 & \text{na } R \setminus \langle x - \varepsilon, \varepsilon \rangle, \end{cases} & \text{gdy } x < 0, \end{cases}$$

Z powyższych wzorów wynika, że

$$\int_0^{\xi} F(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \xi > 0, \\ -A & \text{gdy } \xi < 0. \end{cases}$$

Mamy stąd równość

$$\Phi(0, x) = C_1 \exp \left[-\frac{1}{2\nu} \int_0^x F(\xi) d\xi \right] = C_1 \begin{cases} e^{\frac{A}{2\nu}} & \text{gdy } x < 0, \\ 1 & \text{gdy } x \geq 0. \end{cases}$$

Wprowadzając parametr $R = A/(2\nu)$ oraz wykorzystując wzór (3.32) otrzymamy

$$\Phi(t, x) = \frac{C_1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \left\{ \int_{-\infty}^0 e^R \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\nu t} \right] d\xi + \int_0^{\infty} \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\nu t} \right] d\xi \right\}.$$

Dalej, różniczkując ten wzór po x i podstawiając wyniki obliczeń do wzoru (3.29) otrzymamy

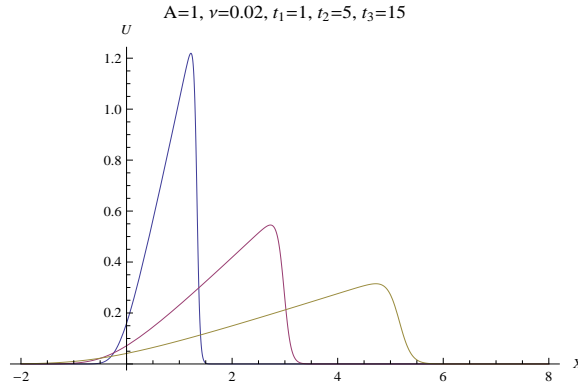
$$u(t, x) = \frac{\left(\int_{-\infty}^0 e^R + \int_0^{+\infty} \right) \frac{x-\xi}{2\nu t} \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\nu t} \right] d\xi}{\left(\int_{-\infty}^0 e^R + \int_0^{+\infty} \right) \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\nu t} \right] d\xi}.$$

Całki w liczniku obliczamy stosując zamianę zmiennych $(x-\xi)^2/(4\nu t) = \tau$. Żeby obliczyć całki w mianowniku, stosujemy zamianę zmiennych $(x-\xi)/(\sqrt{4\nu t}) = \tau$. Po wycalkowaniu otrzymamy wzór

$$u(t, x) = \sqrt{\frac{\nu}{t}} e^{-\xi^2/4} \frac{e^R - 1}{\frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 + e^R + (1 - e^R) \operatorname{erf}(\xi/2)]}, \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{\nu t}}, \quad (3.36)$$

gdzie

$$\operatorname{erf}[z] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp[-\tau^2] d\tau.$$



Rys. 3.6:

Asymptotyka. Przy $\nu \gg 1$ $R \rightarrow 0$, $e^R \approx 1 + R$,

$$\operatorname{erf} \left[\frac{x}{\sqrt{4\nu t}} \right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4\nu t}}} \left(1 - \frac{\xi^2}{1} + \frac{\xi^4}{2} + \dots \right) d\xi \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{x}{\sqrt{4\nu t}}.$$

A więc $\operatorname{erf} \left[\frac{x}{\sqrt{4\nu t}} \right]$ dąży do zera przy bardzo dużych wartościach parametru ν . Zatem przy takim założeniu

$$u(t, x) \approx \sqrt{\frac{\nu}{t}} e^{-\frac{x^2}{4\nu t}} \frac{A}{\sqrt{\pi}} = \frac{A}{\sqrt{4\pi t \nu}} e^{-\frac{x^2}{4\nu t}}. \quad (3.37)$$

Wniosek 3.1..2. Przy dużych ν rozwiązanie zagadnienia (3.34)-(3.35) dąży do rozwiązania o wybuchu cieplnym dla liniowego równania transportu.

Co się dzieje z rozwiązaniem (3.36) przy dużych R ? Można pokazać iż dąży ono do rozwiązania

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{x}{t} & \text{gdy } 0 < x < x_{\Phi} = \sqrt{2tA}, \\ 0 & \text{gdy } x > x_{\Phi}, \end{cases}$$

które równanie Burgersa "dzieli" z równaniem Hopfa. Dowód tego stwierdzenia jest żmudny, i my go pomijamy. Każdy jednak może się przekonać że teza jest prawdziwa, interpretując wzór (3.36) w pakiecie "Mathematica" Na rys. 3.6 jest to zobrazowane dla $R = 25$.

Zadanie 3.1..3. Wykorzystując metody wymiarów i podobieństwa, rozwiązać problem

$$u_t + u u_x = \nu u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in R, \quad (3.38)$$

$$\partial_x^k u(0, x) = 0 \quad \text{gdy } x \neq 0, \quad k = 0, 1, \quad (3.39)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) dx = A. \quad (3.40)$$

Rozwiązanie. Wybieramy jako jednostki o wymiarach niezależnych

$$\nu[L^2/T], \text{ oraz } t[T]$$

Pozostałe jednostki (czyli $x[L]$, $u[L/T]$) wyrażamy w postaci:

$$u = \sqrt{\frac{\nu}{t}}\varphi(\xi), \quad x = \xi\sqrt{\nu t}.$$

Po podstawieniu uzyskanego ansatzu do równania Burgersa, otrzymujemy równanie zredukowane

$$2\ddot{\varphi} = \frac{d}{d\xi} [\varphi(\varphi - \xi)].$$

Całkując raz i kładąc stałą całkowania równą 0 (warunki początkowe), otrzymamy równanie

$$\frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{1}{2}(\varphi - \xi).$$

Wprowadzając nową zmienną $p(\xi) = \log[\varphi]$, otrzymamy

$$\frac{dp}{d\xi} - \frac{1}{2}e^p = -\frac{1}{2}\xi.$$

Równanie to rozwiązujemy metodą uzmienniania stałej. Najpierw rozwiązujemy równanie jednorodne

$$\frac{d\tilde{p}}{d\xi} - \frac{1}{2}e^{\tilde{p}} = 0.$$

Łatwo widać, że równanie to spełnia funkcja

$$\tilde{p} = -\log[C - \xi/2].$$

Postulujemy że

$$\varphi = e^p = \frac{1}{C(\xi) - \xi/2}.$$

Funkcja $C(\xi)$ spełnia równanie

$$C' - \frac{1}{2}\xi C = -\frac{1}{4}\xi^2.$$

Jest to równanie liniowe niejednorodne. Do jego rozwiązania ponownie stosujemy metodę uzmienniania stałej. W wyniku otrzymujemy rozwiązanie

$$C(\xi) = C_2 e^{\xi^2/4} - \frac{1}{4} \int_0^\xi \tau^2 \exp\left[\frac{\xi^2 - \tau^2}{4}\right] d\tau.$$

Całkę w powyższym wzorze obliczamy wykorzystując pakiet *Mathematica*:

$$\int_0^\xi \tau^2 \exp\left[\frac{-\tau^2}{4}\right] d\tau = -2\xi e^{-\xi^2/4} + 2\sqrt{\pi} \operatorname{erf}[\xi/2]$$

(przypomnijmy, że $\operatorname{erf}[z] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\tau^2} d\tau$). Wykorzystując ten wzór otrzymujemy następujące rozwiązanie:

$$u(t, x) = \sqrt{\frac{\nu}{t}} \frac{e^{-\xi^2/4}}{C_2 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}[\xi/2]}, \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{\nu t}}.$$

Stałą C_2 otrzymamy wykorzystując warunek (3.40). Podstawiając do niego uzyskane rozwiązanie oraz całkując (w pakiecie "Mathematica") otrzymamy:

$$A = \nu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\tau^2/4}}{C_2 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}[\tau/2]} d\tau = 4\nu \operatorname{arccoth} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi} C_2} \right].$$

Stąd

$$C_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{e^{\frac{A}{4\nu}} + e^{-\frac{A}{4\nu}}}{e^{\frac{A}{4\nu}} - e^{-\frac{A}{4\nu}}}.$$

Wprowadzając parametr $R = \frac{A}{2\nu}$ (analog liczby Reynoldsa), możemy zapisać rozwiązanie w postaci

$$u(t, x) = \sqrt{\frac{\nu}{t}} e^{-\xi^2/4} \frac{e^R - 1}{\frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 + e^R + (1 - e^R) \operatorname{erf}(\xi/2)]}, \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{\nu t}}.$$

Powyższe rozwiązanie jest identyczne z (3.36)

Zadanie 3.1.4. Znaleźć rozwiązanie równania

$$q_t + aq_x - bq_{xx} - cq - jq^n = 0, \quad q = q(t, x) \quad (3.41)$$

postaci

$$q = \frac{\alpha}{\operatorname{ch}^p[\beta z]}, \quad z = x - Dt. \quad (3.42)$$

Rozwiązanie. Różniczkując lewą i prawą stronę (3.42) po odpowiednich zmiennych otrzymamy:

$$\begin{aligned} q_t &= pD\alpha\beta \frac{\operatorname{sh}[\beta z]}{\operatorname{ch}^{(p+1)}[\beta z]}, \\ q_x &= -p\alpha\beta \frac{\operatorname{sh}[\beta z]}{\operatorname{ch}^{(p+1)}[\beta z]}, \\ q_{xx} &= p\alpha\beta^2 \frac{p \operatorname{ch}^2[\beta z] - (p+1)}{\operatorname{ch}^{p+2}[\beta z]}. \end{aligned}$$

Podstawiając prawe strony do (3.41), otrzymamy:

$$\begin{aligned} p\alpha\beta(D-a) \frac{\operatorname{sh}[\beta z]}{\operatorname{ch}^{p+1}[\beta z]} - bp\alpha\beta^2 \frac{p \operatorname{ch}^2[\beta z] - (p+1)}{\operatorname{ch}^{p+2}[\beta z]} &= \\ &= c \frac{\alpha}{\operatorname{ch}^p[\beta z]} + j \frac{\alpha^n}{\operatorname{ch}^{np}[\beta z]}. \end{aligned}$$

Analiza pokazuje że poszczególne wyrazy stojące przy niezależnych funkcjach hiperbolicznych (po sprowadzeniu do wspólnego mianownika) da się "zbilansować" jeżeli $np = p + 2$. Stąd

$$p = \frac{2}{n-1}, \quad n \neq 1.$$

Przy uwzględnieniu tej równości, sprowadzamy wyrazy do wspólnego mianownika i następnie przyrównujemy do zera współczynniki przy niezależnych funkcjach hiperbolicznych. W wyniku otrzymujemy układ równań algebraicznych:

$$\operatorname{sh}[\beta z] \operatorname{ch}[\beta z] : \quad D - a = 0, \quad (3.43)$$

$$\operatorname{ch}^2[\beta z] : \quad bp^2 \alpha \beta^2 + c \alpha = 0, \quad (3.44)$$

$$1 : \quad bp(p+1) \alpha \beta^2 = j \alpha^n = 0. \quad (3.45)$$

Z (3.43) natychmiast wynika że $D = a$; z (3.44) mamy równość

$$\beta^2 = -\frac{c}{bp^2} > 0,$$

wreszcie z (3.45), po uwzględnieniu powyższych równości,

$$\alpha = \left[-\frac{c(n+1)}{2j} \right]^{\frac{1}{n-1}}.$$

Żeby rozwiązanie było rzeczywistym, musimy (zakładając że $n+1 > 0$) dodatkowo zażądać by c i j miały różne znaki. Tak, więc, na przykład, funkcja

$$q(t, x) = \frac{3}{2 \operatorname{ch}^2 \left[\frac{x-t}{2} \right]} \quad (3.46)$$

spełnia równanie (odpowiadające wartościom $a = b = 1$, $j = -c = 1$, $n = 2$)

$$q_t + q_x = q_{xx} - q(1-q). \quad (3.47)$$

Uwaga. Zamiana zmiennych niezależnych

$$\tau = t, \quad \xi = x - t$$

sprowadza równanie (3.47) do standardowego równania typu reakcji dyfuzji

$$q_\tau = q_{\xi\xi} - q(1-q),$$

zaś funkcję (3.46) - do stacjonarnego rozwiązania

$$q = \frac{3}{2 \operatorname{ch}^2 \left[\frac{\xi}{2} \right]}$$

tego równania.

Zadanie 3.1..5. *Rozpatrzmy równanie konwekcji-reakcji-dyfuzji (K-R-D)*

$$u_t + u u_x + B u_x = \kappa u_{xx} + \lambda u (u - S) (u + Q)$$

Stosując ansatz Hiroty

$$u(t, x) = \frac{f_x}{f}, \quad f = f(t, x) \quad (3.48)$$

i postulując że

$$f(t, x) = 1 + \epsilon F(z), \quad z = x - s t \quad (3.49)$$

znaleźć rozwiązanie typu fali biegnącej.

Rozwiązanie. Podstawiamy ansatza (3.48) z f w postaci (3.49) do równania wyjściowego. Po sprowadzeniu wszystkich wyrazów do wspólnego mianownika otrzymamy duży wyraz algebraiczny, który możemy potraktować jako wielomian względem ϵ . Przyrównując wyrazy przy odpowiednich potęgach ϵ do zera, otrzymamy układ równań algebraicznych:

$$(1 + Q) \lambda (1 - S) = 0, \quad (3.50)$$

$$-B + s + \kappa - Q S \lambda = 0, \quad (3.51)$$

$$-s + 1 + \kappa + 2 Q S \lambda + B + (S - Q) \lambda = 0, . \quad (3.52)$$

Rozpatrzmy przypadek $S = 1$ przy którym równanie (3.50) spełnia się tożsamościowo. Z równania (3.49) wyrażamy s :

$$s = \lambda Q + B - \kappa. \quad (3.53)$$

Podstawiając s do (3.52) otrzymamy następujące wyrażenie dla κ :

$$\kappa = -\frac{1 + \lambda}{2}. \quad (3.54)$$

Wracając do (3.53) otrzymamy

$$s = \frac{2(\lambda Q + B) - (1 + \lambda)}{2}. \quad (3.55)$$

Można pokazać, że przy takich ograniczeniach (czyli gdy $S = 1$ i są spełnione warunki (3.54), (3.55)) wzory (3.48)-(3.49) określają rozwiązanie równania wyjściowego - najprościej można to sprawdzić, wykorzystując pakiet "Mathematica".

Przypadek $Q = -1$ pozostawiamy czytelnikowi dla samodzielnego rozwiązania.

Zadanie 3.1.6. Wykazać że funkcja

$$u(t, x) = \frac{1}{1 + e^{a\xi}}, \quad \xi = x - Vt \quad (3.56)$$

spełnia przy $a = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $V = \sqrt{6} \frac{5}{6}$ równanie Fishera

$$u_t = u_{xx} + u - u^2.$$

W pakiecie "Mathematica" sprawdzenie wygląda następująco:

Komórka XX

$$\begin{aligned} \text{In}[1] := & \quad \xi = x - 5\sqrt{6}t/6; \\ & u = 1/(1 + \text{Exp}[\xi\sqrt{6}])^2; \\ & \text{Simplify}[D[u, t] - D[u, x, x] - u + u^2] \\ \text{Out}[4] = & \quad 0 \end{aligned}$$

Uwaga. Bezpośrednie podstawienie wzoru (3.56) do równania Fishera pozwala wykazać istnienie dwóch rozwiązań typu kinku, mianowicie,

$$u(t, x) = \frac{1}{1 + e^{a_{\pm}\xi}}, \quad \xi = x - V_{\pm}t, \quad a_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad V_{\pm} = \pm \sqrt{6} \frac{5}{6}.$$

3.1.6. Hiperboliczna modyfikacja równania Burgersa. Równanie Burgersa formalnie można wyprowadzić z prawa zachowania

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} u(t, x) dx = - \int_{\partial\Omega} G d\sigma$$

przy $G = u^2/2 - \nu u_x$, pod warunkiem że obszar Ω można ściągnąć do punktu. Jeżeli jednak modelowana substancja jest wieloskładnikowa, lub, ogólnie, posiada strukturę wewnętrzną odmienną od atomowej (jak to ma miejsce przy opisie mieszanek wielofazowych, piasku, gleby, etc.), wówczas tego uczynić nie można i trzeba w jakiś sposób uwzględnić strukturę. Najprostszy sposób polega na wprowadzeniu opóźnienia dopływu:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t + \tau, x) = - \frac{\partial}{\partial x} G(t, x).$$

Rozkładając lewą stronę w szereg względem τ i odrzucając wyrazy rzędu $O(\tau^2)$ otrzymamy stąd równanie

$$\tau u_{tt} + u_t + u u_x = \nu u_{xx}. \quad (3.57)$$

Parametr τ (który na ogół jest mały) nazywa się *czasem relaksacji*. Zauważmy że w powyższym wzorze możemy wykorzystać funkcję G , uwzględniającą nieliniowość współczynnika

transportu ν , jak również obecność źródeł masowych. Tak więc w ogólnym wypadku mamy do czynienia z równaniem

$$\tau u_{tt} + u_t + u u_x = \kappa [u^n u_x]_x + f(u), \quad (3.58)$$

$$(3.59)$$

Równanie (3.58) przy pewnych konkretnych funkcjach $f(u)$ posiada szereg fizycznie treściwych rozwiązań typu fali biegnącej (m. in., rozwiązań typu kinków, solitonów, rozwiązań okresowych). Rozpatrzmy, dla przykładu, nieco ogólniejsze równanie z wielomianowym członem źródłowym

$$\tau u_{tt} + A u u_x + B u_t + H u_x - \kappa u_{xx} = f(u) = \lambda (u - m_1)(u - m_2)(u - m_3). \quad (3.60)$$

Poszukujemy rozwiązań postaci

$$u = v(t, x) = U(\xi), \quad \xi = x + \mu t. \quad (3.61)$$

Po podstawieniu ansatzu (3.61) do równania (3.60), otrzymamy RRZ

$$(\tau \mu^2 - \kappa) U'' + (H + B \mu) U' + A U U' = \lambda (U - m_1)(U - m_2)(U - m_3). \quad (3.62)$$

Równanie to, ogólnie rzecz biorąc (czli przy dowolnych wartościach parametrów), nie jest całkowne. W celu wyodrębnienia podrodziny rozwiązań dopuszczającej opis w terminach funkcji analitycznych, przedstawimy rozwiązanie w postaci zbliżonej do reprezentacji Cole'a-Hopfa:

$$U(\xi) = \frac{\Psi'(\xi)}{\Psi(\xi)}. \quad (3.63)$$

Reprezentacja ta prowadzi do równania

$$\begin{aligned} & \Psi(\xi)^2 [\lambda m_1 m_2 m_3 \Psi(\xi) - \lambda (m_2 m_3 + m_1 m_2 + m_1 m_3) \Psi'(\xi) + (H + B \mu) \Psi''(\xi) + \\ & (\mu^2 \tau - \kappa) \Psi'''(\xi)] + \Psi(\xi) \Psi'(\xi) [\Psi''(\xi) (A + 3\kappa - 3\mu^2 \tau) - \Psi'(\xi) (H - \\ & - \lambda (m_1 + m_2 + m_3) + B \mu)] + [\Psi'(\xi)]^3 (A - \lambda - 2\kappa + 2\mu^2 \tau) = 0. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Łatwo możemy się przekonać w tym, że ma miejsce następujące stwierdzenie:

Lemat 3.1..5. *Ansatz (3.63) prowadzi do równania liniowego*

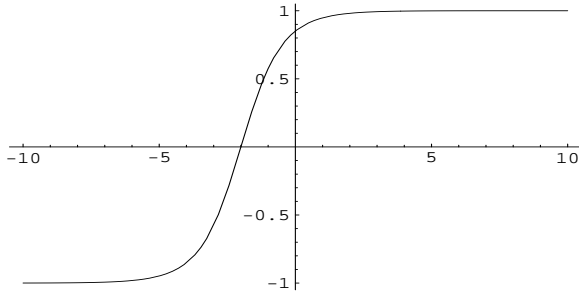
$$\lambda [m_1 m_2 m_3 \Psi - (m_2 m_3 + m_1 m_2 + m_1 m_3) \Psi'] + (H + B \mu) \Psi'' + (\mu^2 \tau - \kappa) \Psi''' = 0, \quad (3.65)$$

gdy spełnione są następujące warunki:

$$A + 3\kappa - 3\mu^2 \tau = 0, \quad (3.66)$$

$$H - \lambda (m_1 + m_2 + m_3) + B \mu = 0, \quad (3.67)$$

$$A - \lambda - 2\kappa + 2\mu^2 \tau = 0. \quad (3.68)$$



Rys. 3.7: Rozwiązanie typu kinku, opisywane przez wzór(3.70)

Rozwiązania równania (3.65) mogą być wyrażone poprzez perwiastki $\{\sigma_k\}_{k=1,2,3}$ odpowiedniego równania charakterystycznego. Jeżeli warunki (3.66)–(3.68) są spełnione, to równanie charakterystyczne przybiera postać

$$\sigma^3 - (m_1 + m_2 + m_3) \sigma^2 + (m_2 m_3 + m_1 m_2 + m_1 m_3) \sigma - m_1 m_2 m_3 = 0. \quad (3.69)$$

Pierwiastki tego równania algebraicznego pokrywają się z liczbami m_1 , m_2 and m_3 . Niżej są przeanalizowane cztery możliwe przypadki.

Przypadek I. Gdy $m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq m_1$, ogólne rozwiązanie równania (3.65) przybiera postać

$$\Psi(\xi) = e^{m_1 \xi} c_1 + e^{m_2 \xi} c_2 + e^{m_3 \xi} c_3.$$

Jeżeli $c_1 \neq 0$, wówczas, dzieląc licznik i mianownik (3.63) przez tę liczbę, otrzymamy rozwiązanie

$$u(t, x) = \frac{m_1 e^{m_1 \xi} + c_2 m_2 e^{m_2 \xi} + c_3 m_3 e^{m_3 \xi}}{e^{m_1 \xi} + c_2 e^{m_2 \xi} + c_3 e^{m_3 \xi}}, \quad \xi = x + \mu t. \quad (3.70)$$

Przy dodatnich c_2 oraz c_3 wzór (3.70) opisuje rozwiązanie typu kinku, rys. 3.7.

Przypadek II: Gdy $m_1 \neq m_2 = m_3$, wówczas

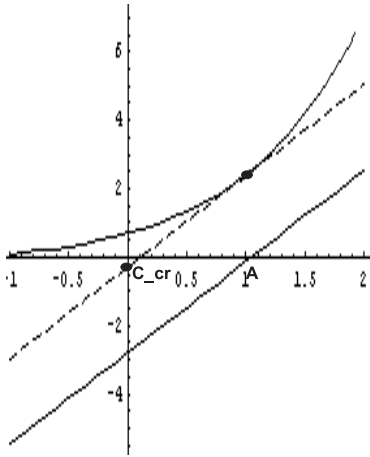
$$\Psi(\xi) = e^{m_1 \xi} + e^{m_2 \xi} (c_2 + c_3 \xi).$$

Podstawiając tę funkcję do (3.63), otrzymamy rozwiązanie

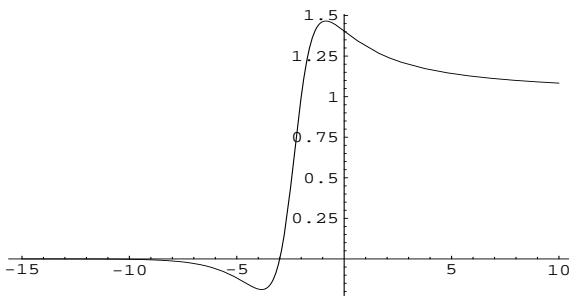
$$u(t, x) = \frac{m_1 e^{m_1 \xi} + e^{m_2 \xi} (c_2 m_2 + c_3 + m_2 c_3 \xi)}{e^{m_1 \xi} + e^{m_2 \xi} (c_2 + c_3 \xi)}. \quad (3.71)$$

Rozwiązanie (3.71) dąży do stałej m_1 lub m_2 gdy $\xi \rightarrow \pm \infty$. Żeby rozwiązanie było niesingularne, powinien być spełniony warunek

$$e^{(m_1 - m_2) \xi} > -(c_2 + c_3 \xi). \quad (3.72)$$



Rys. 3.8: Przypadek II: niesingularne rozwiązanie. Linie ciągłe odpowiadają wykresom funkcji $f_1(\xi) = e^{(m_1-m_2)\xi}$ oraz $f_2(\xi) = -(c_2 + c_3\xi)$. Linia przerywana określa styczną do $f_1(\xi)$, równoległą do $f_2(\xi)$



Rys. 3.9: Przykład rozwiązania typu fali biegnącej opisywanego wzorem (3.71)

Jest to możliwe gdy $m_1 - m_2 > 0$ i jednocześnie $c_3 < 0$. Istnieje również inna opcja, mianowicie: $m_2 - m_1 > 0$, oraz $c_3 > 0$. Rys. 3.8 ilustruje pierwszy przypadek. Z analizy rys. 3.8 wynika że warunek (3.72) jest spełniony gdy $-c_2 < c_{cr}$, gdzie

$$c_{cr} = -A [c_3 + e^{m_1-m_2}], \quad A = \frac{1}{m_1 - m_2} \ln \frac{c_3}{m_2 - m_1}.$$

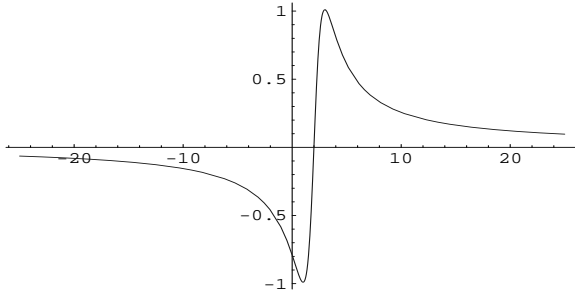
Przypadek III: Przy $m_1 = m_2 = m_3 = m$

$$\Psi(\xi) = e^{m\xi} [c_3 + \xi(c_2 + \xi)].$$

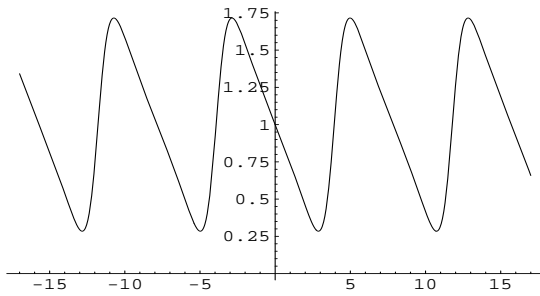
Wykorzystując (3.63) otrzymamy rozwiązanie

$$u(t, x) = m + \frac{c_2 + 2\xi}{c_3 + \xi(c_2 + \xi)}. \quad (3.73)$$

Wzór (3.73) określa rozwiązanie solitonowe z "ciężkim" ogonem (rys. 3.10), pod warunkiem że ma miejsce nierówność $c_2^2 - 4c_3 < 0$.



Rys. 3.10: Przykład rozwiązania opisywanego wzorem (3.73)



Rys. 3.11: Okresowe rozwiązanie równania (3.60) reprezentowane wzorem (3.74)

Przypadek IV: Gdy $m_1, m_2 = \alpha \pm \beta i$, zaś m_3 , jest liczbą rzeczywistą

$$u(\xi) = \frac{c_3 m_3 e^{m_3 \xi} + 2e^{\alpha \xi} [\alpha \cos(\beta \xi) - \beta \sin(\beta \xi)]}{c_3 e^{m_3 \xi} + 2e^{\alpha \xi} \cos(\beta \xi)} \quad (3.74)$$

Rozwiązanie to nie jest syngularne pod warunkiem że $m_3 = \alpha$ i $|c_3| > 2$. W tym przypadku mamy do czynienia z rozwiązaniem okresowym (rys.. 3.11).

Przy innej postaci funkcji $f(u)$, wykorzystując następującą modyfikację wzoru (3.63)

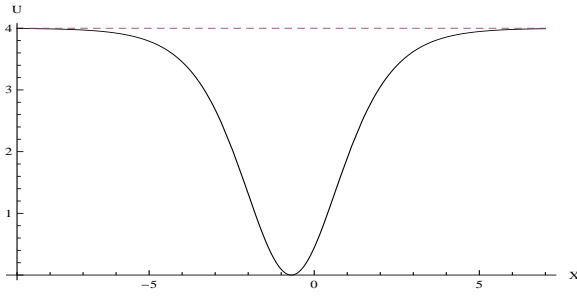
$$u(\xi) = \frac{\sum_{\mu=0}^m a_{\mu} \exp(\mu \alpha \xi)}{\sum_{\nu=0}^n b_{\nu} \exp(\nu \alpha \xi)}, \quad (3.75)$$

można uzyskać wykładniczo zlokalizowane rozwiązania solitonowe. Ma to, na przykład, miejsce w przypadku równania

$$\tau u_{tt} + u_t - \kappa u_{xx} = f(u) = \sum_{\nu=0}^4 \lambda_{\nu/2} u^{\nu/2}. \quad (3.76)$$

Wykorzystując pakiet "Mathematica" możemy się łatwo przekonać że funkcja

$$u(t, x) = \left[\frac{a_0 + a_1 e^{\alpha(x+vt)}}{b_0 + b_1 e^{\alpha(x+vt)}} \right]^2 \quad (3.77)$$



Rys. 3.12: "Ciemny" soliton opisywany wzorem (3.77) przy $a_0 = 2$, $a_1 = -4$, $b_0 = 1$, $b_1 = 2$, $v = 2$, $\alpha = 1$.

spełnia równanie (3.76) pod warunkiem że

$$\lambda_0 = 2a_0^2 a_1^2 \alpha h / \Delta^2, \quad \lambda_{1/2} = -2a_0 a_1 \alpha (3h\Theta + Bv\Delta) / \Delta^2,$$

$$\lambda_1 = 2\alpha (h(3\Theta^2 - \Delta^2) + Bv\Delta\Theta) / \Delta^2, \quad \lambda_{3/2} = -2b_0 b_1 \alpha (5h\Theta + Bv\Delta) / \Delta^2,$$

$$\lambda_2 = 6b_0^2 b_1^2 h \alpha / \Delta^2.$$

Powyżej wykorzystane zostały oznaczenia

$$h = \alpha, \quad \Delta = a_1 b_0 - a_0 b_1, \quad \Theta = a_1 b_0 + a_0 b_1.$$

Rozwiązanie to opisuje falę solitonopodobną przy spełnieniu dodatkowych warunków

$$b_0 b_1 > 0, \quad |a_0|/|b_0| = |a_1|/|b_1| \quad \text{oraz} \quad a_0/b_0 \neq a_1/b_1.$$

Rozwiązanie takie jest przedstawione na rys. 3.12.

W ogólnym przypadku nie można opisać rozwiązanie solitonowe w terminach funkcji elementarnych lub specjalnych. Rozwiązania takie można znaleźć (o ile, oczywiście, ono istnieje), wykorzystując analizę jakościową oraz symulacje numeryczne. Najbardziej wyczerpującą odpowiedź analiza jakościowa daje w tym przypadku gdy równanie zredukowane jest równoważne układowi hamiltonowskiemu

$$\dot{U} = -\frac{\partial H}{\partial W}, \quad \dot{W} = \frac{\partial H}{\partial U}$$

przy pewnej funkcji $H(U, W)$. Taka sytuacja ma miejsce, na przykład, w przypadku równania

$$\tau u_{tt} - \kappa u_{xx} = \gamma u (\alpha^2 - u^2).$$

Poszukując rozwiązanie w postaci fali biegnącej $u(t, x) = U(\xi)$, $\xi = x - \mu t$, otrzymamy równanie

$$h U'' = -\gamma U (U^2 - \alpha^2), \quad h = \tau \mu^2 - \kappa.$$

Równanie to jest równoważne układowi hamiltonowskiemu

$$\frac{dU}{dT} = -W = -\frac{\partial H}{\partial W}, \quad (3.78)$$

$$\frac{dW}{dT} = \gamma U (U^2 - \alpha^2) = \frac{\partial H}{\partial U}, \quad (3.79)$$

gdzie $\frac{d}{dT} = h \frac{d}{d\xi}$,

$$H(U, W) = \frac{W^2}{2} + \gamma \left[\frac{U^4}{4} - \alpha^2 \frac{U^2}{2} \right] \equiv \frac{W^2}{2} + V(U).$$

Funkcja $V(U)$ nazywa się *energiją potencjalną* układu (3.78)-(3.79). Zachodzi

Lemat 3.1..6.

- Wszystkie punkty stacjonarne układu (3.78)-(3.79) znajdują się na osi poziomej.
- Jeżeli funkcja $V(U)$ ma w punkcie U_0 minimum (maksimum) lokalne, wówczas punkt stacjonarny (U_0, W) jest środkiem (siodłem).
- Funkcją $H(U, W)$ zachowuje stałą wartość na rozwiązaniach (trajektoriach fazowych) układu (3.78)-(3.79).

Z tego natychmiast wynika

Wniosek 3.1..3. Jeżeli rozwiązanie przechodzi przez punkt (U_0, W_0) płaszczyzny fazowej, wówczas dla dowolnego T spełnione są warunki

$$U_{min} \leq U(T) \leq U_{max},$$

gdzie U_{min} (U_{max})- współrzędna lewego (prawego) przecięcia wykresu funkcji $V(U)$ z poziomą $H(U_0, W_0)$, p. rys. 3.13

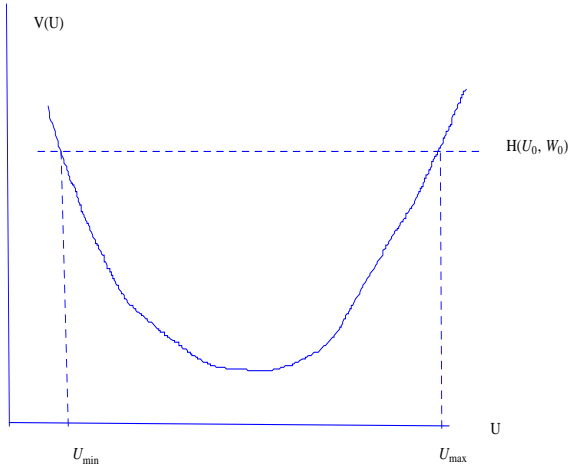
Sformułowane stwierdzenia dają klucz do odtworzenia trajektorii fazowych układu (3.78)-(3.79), p. rys. 3.14. Zauważmy, że trajektorie bi-asymptotyczne do punktu siodłowego $(0, 0)$, zwane trajektoriami **homoklinicznymi**, odpowiadają rozwiązaniom solitonowym. Bardziej dokładnie, lewa trajektoria homokliniczna odpowiada "ciemnemu" solitonowi, lub, inaczej, solitonowi rozrzedzenia, wtenczas gdy prawa - solitonowi ścisłu.

W przypadku równania

$$\tau u_{tt} + u_t + u u_x - \kappa u_{xx} = \gamma u (1 - u^2) \quad (3.80)$$

rozwiązanie w postaci fali biegnącej $u(t, x) = U(\xi)$, $\xi = x - \mu t$, spełnia równanie

$$h U'' + (U - \mu) U = -\gamma U (U^2 - 1),$$



Rys. 3.13: zakres zmienności współrzędnej $U(T)$ układu (3.78)-(3.79)

$h = \tau \mu^2 - \kappa$. Równanie to jest równoważne układowi

$$\frac{dU}{dT} = -W \quad (3.81)$$

$$\frac{dW}{dT} = (U - \mu) + \gamma U (U^2 - 1) \quad (3.82)$$

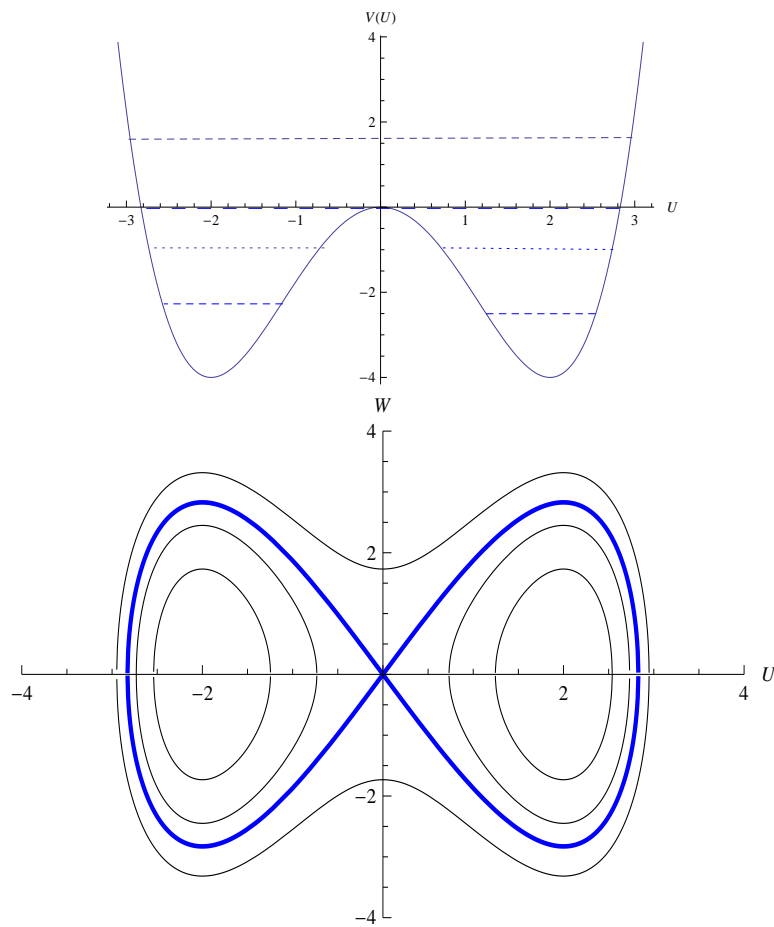
gdzie $\frac{d}{dT} = h \frac{d}{d\xi}$. Układ ten nie jest hamiltonowskim. Odpowiedź o istnieniu rozwiązania homoklinicznego (odpowiadającego solitonowi) daje twierdzenie Andronova-Hopfa³, które formułuje warunki tworzenia się w małym otoczeniu środka nieliniowego rozwiązania okresowego (zwanego *cyklem granicznym*). Wzrost średnicy cyklu granicznego, położonego w sąsiedztwie punktu siodłowego, przy zmianie parametru bifurkacji prowadzi, bowiem, do bifurkacji homoklinicznej, p. rys. 3.15.

Dla układu (3.81)-(3.82) cykl graniczny o zerowej średnicy tworzy się gdy $\mu = -1$. Rozmiar cyklu rośnie wraz ze wzrostem μ . Przy $\mu = \mu_{cr} = -0.836$ zachodzi homokliniczna bifurkacja. A więc przy tej wartości parametru μ równanie (3.80) posiada rozwiązanie solitonowe.

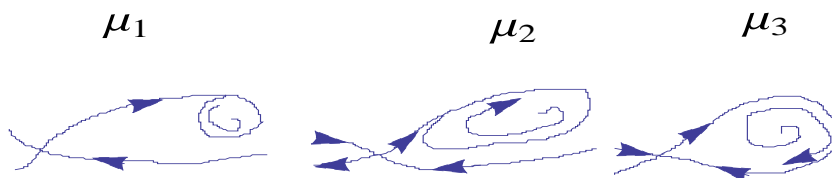
Uwaga. Przy realizacji takiego scenariusza rozwiązanie solitonowe istnieje tylko przy konkretnych wartościach parametrów. Cecha ta jest charakterystyczne dla układów dysypatywnych.

Otrzymane wyżej rozwiązania typu fali biegnącej (okresowe, kinki, solitonopodobne) można wykorzystać jako dane Cauchy'ego w eksperymentach numerycznych. Okazuje się że ewolucja czasowa tak postawionych zagadnień początkowych w sposób bardzo istotny zależy od

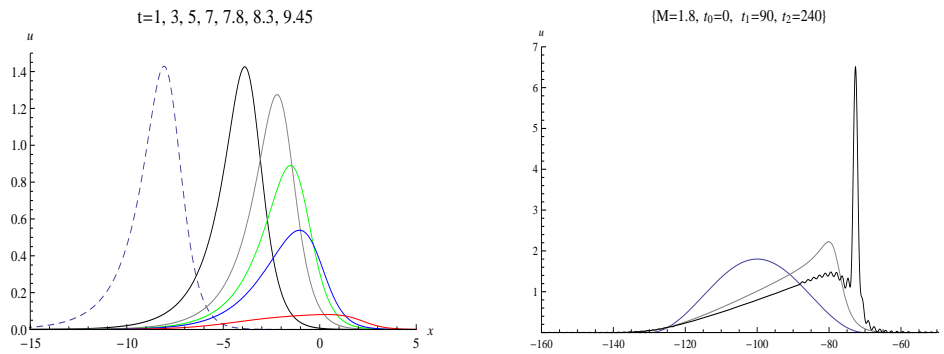
³A. Hassard, B. Kazarinoff, H. Wan, *Hopf bifurcation and its applications*, Wiley and Sons, New Jersey, 1981



Rys. 3.14: U góry: wykres energii potencjalnej układu (3.78)-(3.79) oraz poziomice odpowiadające wartościom $H(U, W) = 1.5; 0; -1; -2.5$. U dołu: trajektorie fazowe odpowiadające poziomicom: zewnętrzna odpowiada $H(U, W) = 1.5$; para pętli homoklinicznych odpowiada $H(U, W) = 0$; duże (małe) trajektorie eliptyczne wewnątrz pętli homoklinik odpowiadają wartości $H(U, W) = -1$ ($H(U, W) = -1.5$)



Rys. 3.15: Evolucja cyklu granicznego w pobliżu punktu siodłowego: zmiana parametru bifurkacyjnego μ prowadzi do wzrostu średnicy trajektorii okresowej (środkowy portret fazowy); przy $\mu = \mu_2$ cykl graniczny zamienia się w trajektorię homokliniczną, która jest obrazem rozwiązania solitonowego



Rys. 3.16: Na lewym rysunku przedstawione wyniki symulacji numerycznej ewolucji rozwiązana solitonowego równania (3.80) przy wartościach parametrów odpowiadającym ”liczbie Macha” $M = 0.9$; na prawym rysunku przedstawiono wynik symulacji numerycznej zaburzenia solitonowego przy wartościach parametrów odpowiadającym $M = 1.8$

wartości parametrów. Tak, na przykład, wykładniczo zlokalizowane rozwiązania typu solitonowego nigdy nie są stabilne, a ich ewolucja zależy od ”liczby Macha”

$$M = \frac{\max_{x \in \mathbb{R}} |u(0, x)|}{\sqrt{\kappa/\tau}}.$$

Przy $M < 1$ rozwiązanie zanika w skończonym czasie, zaś przy $M > 1$ (również w skończonym czasie) tworzy się rozwiązanie typu ”blow-up”, p. rys. 3.16. Definicja stabilności rozwiązań typu fali biegnącej oraz pewne stwierdzenia dotyczące konkretnych rozwiązań omawianych w poprzednich paragrafach będą podane w ostatnim rozdziale niniejszego skryptu.

Rozdział 4

Fale nieliniowe

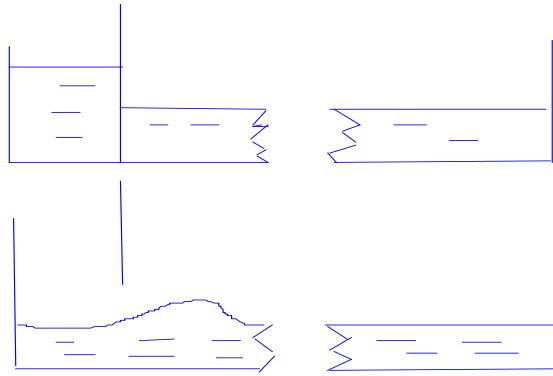
4.1. Wstęp. Odkrycie solitona

Soliton - to fala nieliniowa, posiadająca szereg niezwykłych własności. Obserwowany był na pewno w pradawnych czasach, jako bardzo długa (rzędu dziesiątków i setek metrów, a niekiedy nawet kilometrów) fala na powierzchni wody (która docierając do brzegu spiętrza się, zamieniając się na falę *tsunami*). Pierwszą udokumentowaną obserwację solitonu zawdzięczamy Scottowi Russellowi (1834). Oto jego opis.

Obserwowałem, jak łódź ciągnięta przez parę koni poruszała się wąskim kanałem, gdy nagle łódź utknęła w miejscu. Cała masa wody przysłała w ruch, skupiając się przy dziobie w stanie silnego zawirowania, potem nagle oderwała się od niego i poszła do przodu z dużą prędkością, przybierając kształt dużego pojedynczego garbu. Garb ten poruszał się wzdłuż kanału nie zmieniając swego kształtu. Rzuciłem się konno za nim i dogoniłem go gdy wciąż jeszcze się poruszał z prędkością 8-9 mil na godzinę zachowując kształt. Fala ta miała około 30 stóp długości i 1-1.5 stóp wysokości. Wysokość fali powoli się zmniejszała. Po przejechaniu ok. dwóch mil zgubiłem falę w zagięciach kanału. W ten oto sposób, w r. 1834 dzięki zbiegu okoliczności obserwowałem po raz pierwszy to piękne i niezwykle zjawisko.

Scott Russell był z zawodu inżynierem. Usiłował on odtworzyć sytuację w warunkach laboratoryjnych (rys. 4.1 ilustruje eksperyment laboratoryjny, przeprowadzony przez Scotta Russella). Nazwał tę falę "solitary wave", czyli "falą odosobnioną". S.R. usiłował również bez powodzenia zgadnąć równania opisujące soliton. Zwracał się również do wielu współczesnych mu matematyków, i też bez skutku, gdyż fala solitonowa, będąca obiektem istotnie nieliniowym, nie mieściła się w ramach ówczesnych teorii. Potwierdzenie teoretyczne znalazła w r. 1895 w pracach uczonych Holenderskich Kortevęga i de Vriesa. Opracowali oni teorię fal długich poruszających się na powierzchni płytkiej wody, a wyprowadzone przez nich równanie ma następującą postać:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{3}{2} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \eta^2 + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (4.1)$$



Rys. 4.1:

gdzie η - wysokość fali, T - napięcie powierzchniowe, ρ - gęstość, g - stała grawitacyjna,

$$\sigma = l^3/3 - T L/(\rho g).$$

Wykorzystując skalowanie

$$t \rightarrow \alpha t, \quad x \rightarrow \beta x, \quad \eta \rightarrow \gamma u,$$

równanie to można przedstawić w postaci obecnie uważanej za standardową:

$$u_t + 12u u_x + u_{xxx} = 0.$$

Rozwiązanie opisujące fale solitonową (również podane przez Kortewega i de Vriesa) w tej reprezentacji ma postać

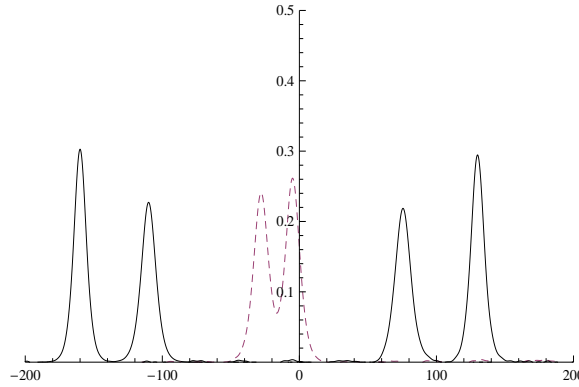
$$u(t, x) = s \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{s}}{2} z \right], \quad z = x - s t.$$

Własności rozwiązań solitonowych.

- Amplituda maksymalna fali solitonowej jest proporcjonalna do jego prędkości s .
- Amplituda solitonu wykładniczo szybko zmierza do zera gdy $|z| \rightarrow \infty$.
- Soliton ewolucjonuje bez zmiany kształtu.

Dalsze własności.

- Elastyczne oddziaływanie (rys. 4.2)



Rys. 4.2: Symulacja numeryczna oddziaływania dwóch solitonów poruszających się w prawo. W chwili $t_0 = 0$ soliton o większej amplitudzie znajduje się po lewej od mniejszego solitonu; linia przerywana odpowiada chwili $t_1 = 1400$; w chwili $t_2 = 2800$, gdy oddziaływanie jest zakończone, solitony odtwarzają swe kształty, z tym że większy soliton, poruszający się z większą prędkością, znajduje się po prawej od mniejszego.

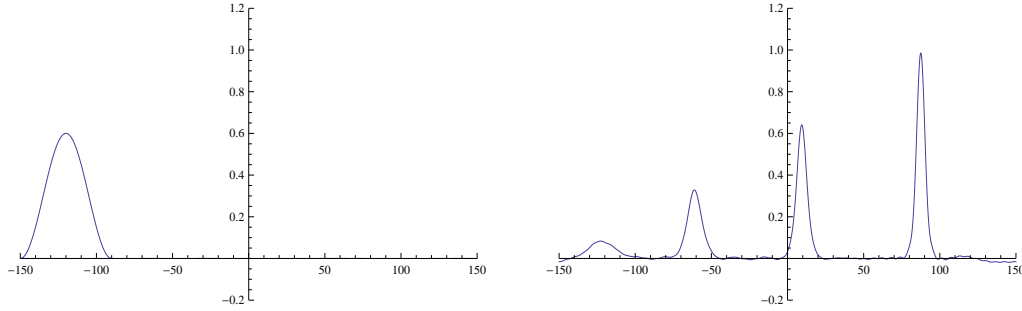
- Istnienie szerokiej klasy gładkich danych Caucyego $\varphi(x) \in C_0^k$ takich że rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$u_t + 12 u u_x + u_{xxx} = 0, \quad u(0, x) = \varphi(x), \quad (4.2)$$

w trakcie ewolucji "rozszczenia się" na skończoną liczbę solitonów. Na rys. 4.3 pokazany jest wynik symulacji numerycznej zagadnienia Cauchyego (4.2) z

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x < -150, \\ 0.3 \cos \left[\frac{\pi}{30} (x + 120) + 1 \right] & \text{gdy } -150 < x < -90, \\ 0 & \text{gdy } x > -90. \end{cases} \quad (4.3)$$

4.1.1. Drugie odkrycie solitona: problem Fermiego-Pasty-Ulama. W latach 50-ch XX st. E. Fermi, J. Pasta oraz S. Ulam (F-P-U) zajmowali się problemem dystrybucji energii w łańcuhu składającym się z mas połączonych sprężynkami (p. rys. 4.4). Gdy siła sprężystości była liniowa - energia pierwotna, dostarczana za pośrednictwem krótkiego uderzenia skrajnej kulki, z upływem czasu równomiernie się dzieliła na wszystkie stopnie swobody (mody), kojarzone ze wszelkimi możliwymi częstotliwościami ω_j drgań własnych układu (p. rys. 4.5). A więc dla układu liniowego spełniona jest t. zw. *hipoteza ergodyczności*. Ku wielkiemu zdumieniu badaczy, eksperymenty numeryczne z długim łańcuszkiem kulek (było ich rzędu 60), związanych nieliniowymi siłami sprężystości nie potwierdziły hipotezy ergodycznej.



Rys. 4.3: Symulacja numeryczna tworzenia się wiązki solitonów. Lewy rysunek: wykres funkcji początkowej $u(0, x) = \varphi(x)$; prawy rysunek: wykres funkcji $u(600, x)$.

Układ dynamiczny w eksperymencie F-P-U wyglądał następująco:

$$\ddot{Q}_n(t) = f(Q_{n+1} - Q_n) - f(Q_n - Q_{n-1}), \quad (4.4)$$

gdzie Q_n - odchylenie od równowagi n -j kulki,

$$f(z) = \gamma z + \alpha z^2.$$

Układem (4.4) zaczęli się interesować w szczególny sposób. W r. 1965 Kruskal oraz Zabusky zajęli się poszukiwaniem analogu kontynualnego równania (4.4). Tok ich rozumowań był następujący. Zakładając że odległość a dzieląca kulki w stanie spoczynku jest bardzo mała, utożsamili oni wielkość $n \cdot a$, określającą (w przybliżeniu) współrzędną n -j kulki, z (ciągłą) wielkością x , dokonując podmiany

$$Q_n(t) = Q(t, na) \equiv Q(t, x).$$

Do opisu sąsiednich kulek był wykorzystany wzór

$$Q_{n\pm 1} = Q(t, x \pm a) = e^{\pm a D_x} Q(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm a)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial x^k} Q(t, x).$$

Przy powyższych założeniach układ (4.4) można przedstawić w postaci

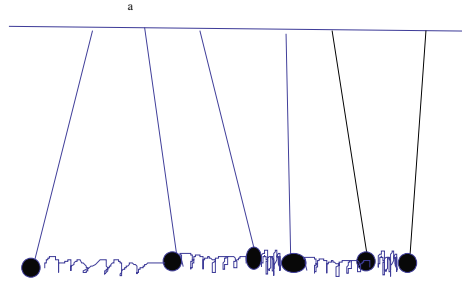
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} Q(t, x) = f \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial x^k} Q(t, x) \right] - f \left[- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-a)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial x^k} Q(t, x) \right].$$

Stąd, po nieskomplikowanych obrachunkach, można otrzymać następujące równanie:

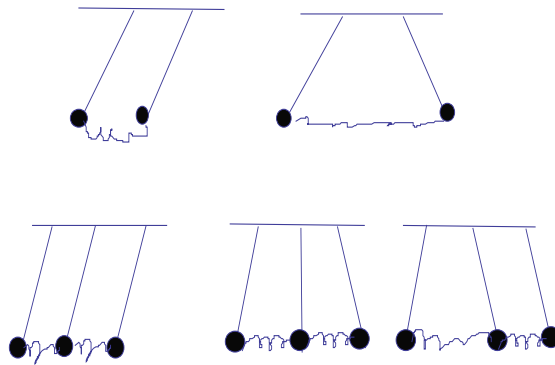
$$Q_{tt} = \gamma \left(a^2 Q_{2x} + \frac{a^4}{12} Q_{4x} \right) + 2\alpha a^3 Q_x Q_{xx} + O(a^5).$$

Kolejnym krokiem jest skalowanie $Q = a P$, które daje równanie

$$P_{tt} = \gamma \left(a^2 P_{2x} + \frac{a^4}{12} P_{4x} \right) + 2\alpha a^3 P_x P_{xx} \quad (4.5)$$



Rys. 4.4: Schemat układu rozpatrywanego przez Fermiego, Pastę oraz Ulama



Rys. 4.5: U góry: układ o dwóch stopniach swobody; u dołu: układ o trzech stopniach swobody.

(od tego miejsca ignorujemy "nieistotny" ogon). Różniczkując równanie (4.5) po zmiennej x , wprowadzając zmienną zależną $u(t, x) = P_x(t, x)$, oraz dokonując podmiany zmiennej czasowej

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sqrt{\gamma} a \frac{\partial}{\partial T}$$

otrzymujemy równanie Boussinesq'a

$$u_{TT} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u + \frac{a^2}{12} u_{xx} + \frac{\alpha a}{\gamma} u^2 \right) \quad (4.6)$$

Uwaga. Podobnie jak równanie KdV, równanie (4.6) posiada rozwiązania solitonowe, lecz są one niestabilne.

Dalej dokonywane jest skalowanie

$$u = \varepsilon^m W, \quad \xi = \varepsilon^p (x - T), \quad \tau = \frac{1}{2} \varepsilon^q T, \quad a = \varepsilon^\mu,$$

gdzie $0 < \varepsilon \ll 1$ jest małym parametrem. Jeżeli parametry skalowania dobrać w ten sposób by były spełnione relacje

$$p + q = 4p + 2\mu = 2(p + \mu) + m < q,$$

wówczas człon z drugą pochodną po czasie będzie zaniedbany i otrzymamy równanie

$$W_{\tau\xi} + 2B(W^2)_{\xi\xi} + AW_{4\xi} = 0.$$

Całkując równanie po zmiennej ξ ostatecznie równanie KdV

$$W_{\tau} + BWW_{\xi} + AW_{\xi\xi\xi} = 0.$$

4.1.2. Prawa zachowania

Rozpatrzmy równanie ewolucyjne

$$u_t = F(t, x, u, u_x \dots u_{nx}). \quad (4.7)$$

Definicja 4.1..1. *Prawem zachowania rzędu n nazywa się para funkcji $\rho(t, x, u, u_x \dots u_{nx})$, $\sigma(t, x, u, u_x \dots u_{nx})$ taka że równość*

$$D_t \rho + D_x \sigma = 0 \quad (4.8)$$

zachodzi na mocy równania (4.7) oraz jego konsekwencji różniczkowych. Symbole D_t , D_x oznaczają pochodne zupełne po odpowiednich zmiennych.

Jeżeli funkcja σ spełnia dodatkowy warunek

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \sigma(t, x, u, u_x \dots u_{nx}) = 0,$$

wówczas, całkując równanie (4.8) względem x , otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} D_x \sigma dx = - \lim_{M, N \rightarrow \infty} \sigma \Big|_{x=-M}^{x=N} = 0.$$

Zatem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho dx = \text{const}$$

na rozwiązaniach równania (4.7).

Przykłady praw zachowania natychmiast dostarczają równania gazodynamiki, które w przypadku jednej zmiennej przestrzennej mogą być przedstawione w postaci

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho u + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u^2 + \frac{\beta}{n+2} \rho^{n+2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} \rho u &= 0. \end{aligned}$$

Wnioskujemy stąd że wielkości

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho u dx \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \rho dx$$

nie zależą od zmiennej t . Pierwsza całka wyraża prawo zachowania pędu, druga - prawo zachowanie masy. *Niezwykłość równania KdV polega m.in. na tym, że ma ono przeliczalnie nieskończoną liczbę praw zachowania!*

Rozpatrzmy równanie KdV w postaci

$$P(u) = u_t - 6u u_x + u_{xxx} = 0. \quad (4.9)$$

Wprowadzamy przekształcenie pomocnicze

$$u = w + \varepsilon w_x + \varepsilon^2 w^2, \quad (4.10)$$

gdzie ε traktujemy jako mały parametr.

Twierdzenie 4.1.1. *Podstawienie (4.10) wiąże (4.9) z równaniem Gardnera*

$$Q(w) = w_t - 6(w + \varepsilon^2 w^2) w_x + w_{xxx} = 0 \quad (4.11)$$

Dowód. Dowód. Podstawiając do (KdV6) wzory

$$\begin{aligned} u_t &= w_t + \varepsilon w_{xt} + 2\varepsilon^2 w w_t, \\ u_x &= w_x + \varepsilon w_{xx} + 2\varepsilon^2 w w_x, \\ u_{xx} &= w_{xx} + \varepsilon w_{xxx} + 2\varepsilon^2 (w_x^2 + w w_{xx}) \\ u_{xxx} &= w_{xxx} + \varepsilon w_{xxxx} + 2\varepsilon^2 (3w_x w_{xx} + w w_{xxx}) \end{aligned}$$

otrzymamy:

$$\begin{aligned} P(u) &= w_t + \varepsilon w_{xt} + 2\varepsilon^2 w w_t - 6(w + \varepsilon w_x + \varepsilon^2 w^2) (w_x + \varepsilon w_{xx} + 2\varepsilon^2 w w_x) + \\ &\quad + w_{xxx} + \varepsilon w_{xxxx} + 2\varepsilon^2 (3w_x w_{xx} + w w_{xxx}) = \\ &\quad w_t - 6(w + \varepsilon^2 w^2) w_x + w_{xxx} + \\ &\quad + \varepsilon \{ w_{tx} - 6[(w + \varepsilon^2 w^2) w_{xx} + w_x (w_x + 2\varepsilon^2 w w_x)] + w_{4x} \} + \\ &\quad + 2\varepsilon^2 w [w_t - 6w_x (w + \varepsilon^2 w^2) + w_{xxx}] = \\ &\quad \left[1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} + 2\varepsilon^2 w \right] Q(w). \end{aligned}$$

Równanie (4.11) można przedstawić w następującej równoważnej postaci:

$$Q(w) = w_t + (w_{xx} - 3w^2 - 2\varepsilon^2 w^3)_x = 0. \quad (4.12)$$

Funkcję w poszukujemy w postaci szeregu

$$w = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j w_j. \quad (4.13)$$

Funkcje w_j znajdujemy rozwiązując rekurencyjnie równanie (4.10):

$$u = w + \varepsilon w_x + \varepsilon^2 w^2 = \\ = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j w_j + \varepsilon \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j w_{j,x} + \varepsilon^2 \left(\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j w_j \right)^2.$$

W ten sposób otrzymujemy układ nieskończony. Pierwsze trzy równania przedstawiamy poniżej (wszystkie pozostałe uzyskuje się rekurencyjnie)

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 : \quad u &= w_0, \\ \varepsilon^1 : \quad 0 &= w_1 + w_{0,x}, \\ \varepsilon^2 : \quad 0 &= w_2 + w_{1,x} + w_0^2, \\ \varepsilon^3 : \quad w_3 + w_{2,x} + 2w_0 w_1, \\ &\dots \end{aligned}$$

Rozwiązując równania z góry w dół, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} w_1 &= -u_x, \\ w_2 &= -u^2 + u_{xx}, \\ w_3 &= 4u u_x - u_{xxx}. \end{aligned}$$

Przeliczalną liczbę praw zachowania możemy znaleźć podstawiając (4.13) do wzoru (4.12) i przyrównując do zera współczynniki przy jednakowych potęgach ε . Pierwsze trzy z nich mają postać:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 : \quad w_{0,t} + [w_{0,xx} - 3w_0^2]_x &= 0, \\ \varepsilon^1 : \quad w_{1,t} + [w_{1,xx} - 6w_0 w_1]_x &= 0, \\ \varepsilon^2 : \quad w_{2,t} + [w_{2,xx} - 3(w_1^2 + 2w_0 w_1)]_x &= 0. \end{aligned}$$

Wniosek 4.1..1. *Równanie KdV posiada nieskończoną hierarchię praw zachowania.*

Równania różniczkowe nieliniowe posiadające nieskończoną liczbę praw zachowania są, na ogół, w jakimś sensie równoważne równaniom liniowym. W następnym punkcie związek z równaniem liniowym będzie wykazany dla równania KdV.

4.2. Zupełna całkowalność równania KdV.

Lemat 4.2..1. *Równanie (4.9) jest niezmiennicze względem przekształceń Galileusza*

$$u' = u + \frac{1}{6}c, \quad t' = t, \quad x' = x - ct.$$

Dowód. Wyrażamy pochodne względem t , x w zmiennych primowanych:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - c \frac{\partial}{\partial x'}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}.$$

Stąd

$$\begin{aligned} P(u) &= \left(\frac{\partial}{\partial t'} - c \frac{\partial}{\partial x'} \right) u' - 6 \left(u' - \frac{1}{6}c \right) u'_{x'} + u'_{x'x'x'} = \\ &= \frac{\partial u'}{\partial t'} - 6 u' u'_{x'} + u'_{x'x'x'} = P(u') = 0. \end{aligned}$$

Rozpatrzmy równanie

$$K(v) = v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0 \tag{4.14}$$

zwane zmodyfikowanym (modified) równaniem KdV (odtąd mKdV).

Uwaga. *mKdV można otrzymać jako przybliżenie kontynualne problemu F-P-U, jeżeli założyć że siła oddziaływania sprężystego ma postać $f(z) = \gamma z + \alpha z^3$.*

Twierdzenie 4.2..1. *Równania (4.9) i (4.14) są związane przekształceniem*

$$u = v_x + v^2. \tag{4.15}$$

Dowód. Podstawiając do (KdV6) wzory

$$\begin{aligned} u_t &= v_{xt} + 2v v_t, \\ u_x &= v_{xx} + 2v v_x, \\ u_{xx} &= v_{xxx} + 2(v_x^2 + v v_{xx}), \\ u_{xxx} &= v_{xxxx} + 2(3v_x v_{xx} + v v_{xxx}), \end{aligned}$$

otrzymamy:

$$\begin{aligned} P(u) &= v_{xt} + 2v v_t - 6(v_x + v^2)(v_{xx} + 2v v_x) + \\ &+ v_{xxxx} + 2(3v_x v_{xx} + v v_{xxx}) = \\ &= 2v(v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx}) = \\ &= \left(2v + \frac{\partial}{\partial x} \right) K(v). \end{aligned}$$

Uzyskane równanie

$$\left(2v + \frac{\partial}{\partial x}\right) K(v) = 0 \quad (4.16)$$

jest równaniem typu Riccatiego, które jest linearyzowalne za pomocą spotykanego już wcześniej przekształcenia typu *Cole'a-Hopf*

$$v = \frac{\Psi_x}{\Psi}.$$

Podstawiając ten ansatz do równości (4.15), otrzymamy:

$$u = v_x + v^2 = \frac{\Psi_{xx}}{\Psi},$$

lub

$$-\Psi_{xx} + u(t, x) \Psi = 0. \quad (4.17)$$

Równanie to jest "częścią przestrzenną" znanego równania Schrodingera

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}(\tau, x; t)}{\partial \tau} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{\Psi}(\tau, x; t) + u(t, x) \tilde{\Psi}(\tau, x; t). \quad (4.18)$$

Zauważmy że zmienna t w tym równaniu odgrywa rolę parametra.

Rozwiązanie równania (4.18) poszukujemy w postaci

$$\tilde{\Psi}(\tau, x; t) = e^{-i\lambda\tau} \Psi(x; t).$$

W ten sposób dochodzimy do zagadnienia Sturm-Liouville'a

$$-\Psi_{xx} + u(t, x) \Psi = \lambda \Psi, \quad (4.19)$$

które przechodzi w (4.17) gdy $\lambda = 0$.

Okazuje się że parametr λ można "dokooptować" wykorzystując następującą szczegółową postać przekształcenia Galileusza, które pozostawia niezmienniczym zarówno równanie KdV (co pokazywaliśmy wcześniej), jak i równanie Schrodingera:

$$t' = t, \quad u' = u + \lambda, \quad \lambda = \frac{c}{6}, \quad x' = x - 6\lambda t, \quad \Psi' = \Psi.$$

Dokonując takiego przekształcenia otrzymamy równanie

$$-\Psi'_{x'x'} + u'(t', x') \Psi' = \lambda \Psi'.$$

A więc, z dokładnością do zmiany zmiennych, równanie (4.17) pokrywa się z (4.19). Dlatego rozwiązanie nieliniowego równania KdV sprowadza się do rozwiązania t. zwanego *odwrotnego zagadnienia rozpraszania* dla równania (4.19). Problem jest tylko taki, że $\lambda = \lambda(t)$. Zależność od parametru t , w tym konkretnym wypadku nie jest, jednak, istotna, gdyż, jak się okazuje,

problem jest *izospektralny*. Innymi słowy, parametr λ od t nie zależy, w związku z czym można zamiast $u(t, x)$ wykorzystać w równaniu (4.19) funkcję $u(0, x) = \varphi(x)$. Zatem dla pewnej szerokiej klasy danych początkowych rozwiązując zagadnienie Sturm-Liouville'a

$$-\Psi_{xx} + \varphi(x) \Psi = \lambda \Psi, \quad (4.20)$$

uzyskujemy rozwiązanie zagadnienia Cauchyego

$$u_t - 6u u_x + u_{xxx} = 0, \quad u(0, x) = \varphi(x). \quad (4.21)$$

Wykażemy że $\lambda_t = 0$. Zróżniczkujemy wyrażenie

$$u = \frac{\Psi_{xx}}{\Psi} + \lambda(t),$$

które jest równoważne równaniu (4.19), względem x . W wyniku otrzymamy wyrażenie

$$\Psi^4 \dot{\lambda}(t) = \Psi^2 \frac{\partial}{\partial x} [\Psi_x M - M_x \Psi] + \Psi^4 P(u), \quad (4.22)$$

gdzie

$$M = \Psi_t - 2(u + 2\lambda) \Psi_x + u_x \Psi.$$

Wyprowadzenie równości (4.22) wymaga dużej sprawności rachunkowej. Można ją jednak łatwo sprawdzić używając pakietu "Mathematica", jak jest to przedstawione poniżej.

Komórka 3.1.

```
In[1] := u = D[Ψ[x, t], x, x]/Ψ[x, t] + λ[t];
         ut = Simplify[D[u, t]];
In[3] := ux = Simplify[D[u, x]];
         u3x = Simplify[D[u, x, x, x]];
In[5] := Vyr1 = Simplify[ut - 6uux + u3x];
In[6] := Vyr2 = Simplify[Vyr1Ψ[x, t]^4];
         M = Simplify[D[Ψ[x, t], t] - 2(u + 2λ[t])D[Ψ[x, t], x] + D[u, x]Ψ[x, t]];
         Vyr3 = Simplify[D[D[Ψ[x, t], x]M - D[M, x]Ψ[x, t], x]];
         Vyr4 = Simplify[Vyr2 - Ψ[x, t]^4λ'[t] + Vyr3Ψ[x, t]^2]
Out[9] = 0
```

Zakładając że funkcje Ψ należą do przestrzeni L_2 oraz całkując równość (4.22), otrzymamy

$$\dot{\lambda}(t) \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^2 dx = [\Psi_x M - M_x \Psi] |_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

4.3. Metoda Hiroty

Rozpatrzmy rżonanie KdV postaci

$$u_t + 12 u u_x + u_{xxx} = 0. \quad (4.23)$$

Różniczkując (4.23) względem x oraz dokonując zamiany zmiennej $u = w_x$ można go sprowadzić do postaci

$$w_t + 6 w_x^2 + w_{xxx} = 0. \quad (4.24)$$

W r. 1971 R. Hirota zastosował do (4.24) przekształcenie Cole'a-Hopf'a

$$w = \frac{\partial}{\partial x} \log f,$$

które sprowadza go do postaci biliniowej

$$f f_{xxxx} - 4 f_x f_{xxx} + 3 f_{xx}^2 + f f_{xt} - f_x f_t = 0. \quad (4.25)$$

Można zauważyć że rozwiązanie (jedno-)solitonowe w tej reprezentacji dane jest wzorem

$$u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log f \quad (4.26)$$

przy $f = 1 + \exp \theta$, $\theta = a x - a^3 t$. Stąd zrodził się pomysł poszukiwania rozwiązań w postaci

$$f = 1 + \sum_{n=1}^N \varepsilon^n f^{(n)}, \quad (4.27)$$

formalnie traktując ε jako mały parametr. Podstawiając (4.27) do (4.25) oraz przyrównując do zera współczynniki przy odpowiednich potęgach ε , otrzymamy następujące równania:

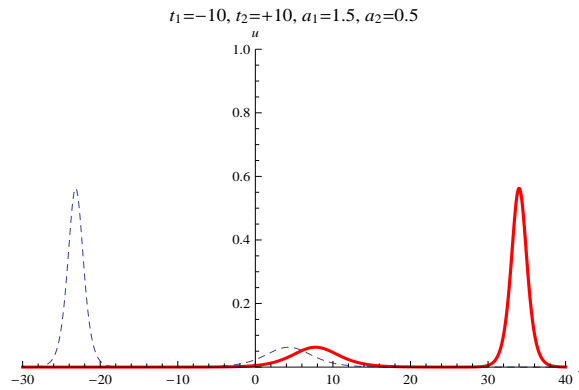
$$\varepsilon^1 : f_{xxxx}^{(1)} + f_{xt}^{(1)} = 0,$$

$$\varepsilon^2 : f_{xxxx}^{(2)} + f_{xt}^{(2)} = - \left[f^{(1)} f_{xxxx}^{(1)} - 4 f_x^{(1)} f_{xxx}^{(1)} + 3 f_{xx}^{(1)} f_{xx}^{(1)} + f^{(1)} f_{xt}^{(1)} - f_x^{(1)} f_t^{(1)} \right],$$

$$\varepsilon^3 : f_{xxxx}^{(3)} + f_{xt}^{(3)} = - \left[f^{(1)} f_{xxxx}^{(2)} - 4 f_x^{(1)} f_{xxx}^{(2)} - 4 f_{xx}^{(1)} f_x^{(2)} + 6 f_{xx}^{(1)} f_{xx}^{(2)} + \right.$$

$$\left. f^{(2)} f_{xxxx}^{(1)} + f^{(2)} f_{xt}^{(1)} - f_x^{(1)} f_t^{(2)} + f^{(1)} f_{xt}^{(2)} - f_t^{(1)} f_x^{(2)} \right],$$

$$\varepsilon^k : f_{xxxx}^{(k)} + f_{xt}^{(k)} = F \left[f_{\mu}^{(k-1)} f_{\nu}^{(k-1)}, f_{\alpha}^{(k-1)} f_{\beta}^{(k-2)} \right].$$



Rys. 4.6:

Ponieważ pierwsze równanie tego układu jest liniowe, więc spełnia go dowolna funkcja postaci

$$f^{(1)} = 1 + \sum_{k=1}^m \exp \theta_k, \quad \theta_k = a_k x - a_k^3 t.$$

Ograniczmy się tutaj przypadkiem $m = 2$. Podstawiając funkcję $f^{(1)}$ do drugiego równania otrzymamy ¹

$$f_{xxxx}^{(2)} + f_{xt}^{(2)} = 3 a_1 a_2 (a_1 - a_2)^2 \exp(\theta_1 + \theta_2).$$

Całkując to równanie otrzymamy

$$f^{(2)} = \left[\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right]^2 \exp(\theta_1 + \theta_2).$$

Okazuje się przy tym że prawe strony kolejnych iteracji się zerują, tak więc funkcja (4.26) z funkcją

$$f = 1 + \exp \theta_1 + \exp \theta_2 + A \exp[\theta_1 + \theta_2], \quad A = \left[\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right]^2$$

spełnia równanie (4.23). Jest to rozwiązanie bi-solitonowe, którego ewolucja czasowa przedstawiona jest na rys. 4.6.

Zadanie 4.3..1.

- Wykazać że funkcja

$$u(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log f(t, x), \quad f(t, x) = 1 + e^\theta, \quad \theta = a x + b t + c_1$$

jest reprezentowana przez funkcję hiperboliczną i znaleźć tę reprezentację.

¹”Ręczne” wyprowadzenie tego wzoru nie jest łatwe, więc oplaca się znów skorzystać z pakietu ”*Mathematica*”

- Przy jakich ograniczeniach na parametry b i c funkcja ta spełnia równanie

$$K[u] = u_t + 12u u_x + u_{xxx} = 0$$

Rozwiązanie.

$$\begin{aligned} [\log f(t, x)]_x &= \frac{f_x}{f} = \frac{a e^\theta}{1 + e^\theta}; \\ [\log f(t, x)]_{xx} &= \frac{f f_{xx} - f_x^2}{(1 + e^\theta)^2} = \frac{(1 + e^\theta) a^2 e^\theta - a^2 e^{2\theta}}{(1 + e^\theta)^2} = \\ &= \frac{a^2 e^\theta}{1 + 2e^\theta + e^{2\theta}} = \frac{a^2}{4} \cosh^{-2} \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

A więc,

$$u(t, x) = \frac{a^2}{4} \cosh^{-2} \frac{\theta}{2}.$$

Do części drugiej zadania wykorzystujemy pakiet "Mathematica":

Komórka 3.2.

```
In[1] :=  \theta = ax + bt + c1;  u = a^2/(4Cosh[\theta/2]^2);
          ut = Simplify[D[u, t]];  ux = Simplify[D[u, x]];
          uxxx = Simplify[D[u, x, x, x]];
          Eq1 = Simplify[ut + 12uux + uxxx /.ax + bt + c1 - > z]
Out[2] =  -2a^2(a^3 + b)Csch[z]^3 Sinh[z/2]^4
```

Odpowiedź:

$$b = -a^3, \quad c_1 - \text{dowolna.}$$

4.4. Modele "niecałkowalne", posiadające rozwiązania solitonopodobne.

Niezwykłe cechy solitonów będących rozwiązaniami równania KdV oraz równań o podobnych własnościach (zwanymi równaniami **S-całkowalnymi**) w literaturze często są tłumaczone jako konsekwencję istnienia przeliczalnej liczby praw zachowania. Są jednak inne klasy równań posiadające rozwiązania zlokalizowane demonstrujące własności bardzo zbliżone do tych które demonstrują "prawdziwe" solitony, a jednak, raczej, nie posiadające nieskończonej liczby praw zachowania. Niżej są przedstawione niektóre z nich.

4.4.1. Równania Rosenau-Hyman. W r. 1993 Philip Rosenau oraz James M. Hyman zaproponowali następujące uogólnienie równania KdV ²:

$$K(m, n) = u_t + (u^m)_x + (u^n)_{xxx} = 0, \quad m > 0, \quad 1 < n \leq 3, \quad (4.28)$$

oraz wykazali że przy pewnych wartościach parametrów m oraz n równanie to posiada uogólnione rozwiązanie typu fali biegnącej o zwartym nośniku. Dla równanie $K(2, 2)$ autorzy w tym że artykule podali takie rozwiązanie w jawnej postaci:

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{4\lambda}{3} \cos^2 \left[\frac{x-\lambda t}{4} \right] & \text{gdzie } |x - \lambda t| \leq 2\pi \\ 0 & \text{gdzie indziej.} \end{cases} \quad (4.29)$$

Rozwiązane typu fali biegnącej, stacjonarne w odpowiednim układzie współrzędnych oraz posiadające zwarty nośnik w literaturze często są nazywane kompaktonami (od angielskiego *compactons*). Przyjmujemy zatem takie oznaczenie dla (4.29).

Autorzy odnotowują że równanie $K(2, 2)$ ma cztery prawa zachowania i raczej nie ma ich więcej ³.

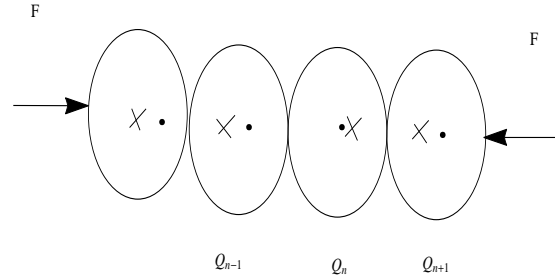
Analizując rozwiązanie (4.29), łatwo można dostrzec iż prędkość fali jest proporcjonalna do jej prędkości λ . Natomiast szerokość kompaktonu jest stała i tym on się, między innymi, różni od solitonu. Eksperymenty numeryczne wykazują że kompaktony w modelu $K(2, 2)$ oddziałują ze sobą "prawie" sprężysto: odtwarzają one swój kształt po zderzeniu, natomiast w miejscu zderzenia po pewnym czasie tworzy się para kompakton - antykompakton, przy czym oba te zaburzenia są wolno poruszające się oraz posiadają bardzo małe amplitudy. Przy rozwiązywaniu zagadnienia Cauchy dla równania $K(2, 2)$ z gładkimi danymi Cauchy'ego o zwartych nośnikach obserwuje się, podobnie jak w przypadku równania KdV, tworzenie się ciągu kompaktonów poruszających się z różnymi prędkościami. Zachowanie to będzie zilustrowane poniżej dla nieco innych równań modelowych posiadających podobne własności.

4.4.2. Analogi modeli fizycznych, posiadające rozwiązania kompaktonowe.

Na odmianę od równania KdV, oraz równań należących do rodziny zwanej KdV-hierarchią, równania $K(m, n)$ początkowo były wprowadzone jako pewne uogólnienia równań solitonowych. Odniesienie tych równań do modeli fizycznych jest zadaniem trudniejszym niż w przypadku równania KdV, które pojawia się w sposób naturalny w mechanice nieliniowej,

²Philip Rosenau and James M. Hyman, *Pys. Rev. Letter*, vol. 70 (1993), 564-567.

³W pracy J. Vodová *Nonlinearity*, **26** (2013), 757-762 zostało ściśle udowodnione że równania z rodziny (4.28) przy $m = 2$ posiadają dokładnie cztery lokalne (tzn zależne od u oraz u_{kx} przy $k < \infty$) prawa zachowania.



Rys. 4.7: Zaburzenie szerzące się w łańcuchu poprzednio naprężonych bloków powoduje zmiany położenia środków mas, a to, z kolei, powoduje powstanie dodatkowej siły oddziaływania między sąsiednimi blokami. Krzyżyk oznacza pozycję środka masy w równowadze, czarny punkt - aktualne położenie środka masy

dynamice cieczy, i t.p. Dlatego, odnosząc równania do pewnych modeli, będziemy zmuszeni na pewnym etapie, zamiast "ściślego" wyprowadzenia, udawać się do *analogów* rozpatrywanych modeli.

Rozpatrzmy układ poprzednio naprężonych bloków, rys. 4.7, który traktować można jako najprostszy model litosfery. Analog równania z zagadnienia F-P-U, opisujący dynamikę bloków, będzie miał następującą postać:

$$\ddot{Q}_n(t) = F(Q_{n-1} - Q_n) - F(Q_n - Q_{n+1}), \quad (4.30)$$

gdzie Q_n - odchylenie od równowagi środka masy n -go bloku (zwrócić uwagę na zmianę znaków w porównaniu z (4.4)). Zakłada się w poprzednio naprężonym ośrodku człon liniowy nie występuje i

$$F(z) = A z^n, \quad n > 1.$$

Tak samo jak poprzednio, zakładając że odległość pomiędzy blokami przed zaburzeniem wynosi $a \ll 1$, stosujemy podmianę

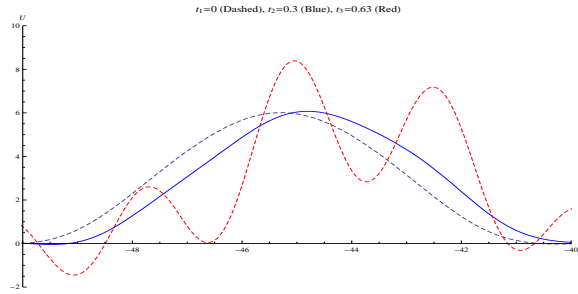
$$Q_n(t) = u(t, na) \equiv u(t, x),$$

oraz wzór

$$Q_{n\pm 1} = u(t, x \pm a) = e^{\pm a D_x} u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm a)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial x^k} u(t, x).$$

Jeżeli wprowadzimy oznaczenia

$$\begin{aligned} N &= -a u_x, \\ \varphi &= \frac{a^2}{2} u_{xx} - \frac{a^3}{6} u_{xxx} + \frac{a^4}{24} u_{xxxx} + \dots, \\ \psi &= - \left(\frac{a^2}{2} u_{xx} + \frac{a^3}{6} u_{xxx} + \frac{a^4}{24} u_{xxxx} + \dots \right), \end{aligned}$$



Rys. 4.8:

wówczas układ (4.30) można będzie przepisać w następującej postaci:

$$u_{tt} = A \{ (N + \varphi)^n - (N + \psi)^n \}.$$

Z tej reprezentacji, z kolei, wynika łańcużek przybliżonych równości

$$\begin{aligned} u_{tt} &= A \left[N^n + nN^{n-1} \varphi + \frac{n(n-1)}{2} N^{n-2} \varphi^2 + \dots \right] - \\ & A \left[N^n + nN^{n-1} \psi + \frac{n(n-1)}{2} N^{n-2} \psi^2 + \dots \right] = \\ A \left\{ nN^{n-1} (\varphi - \psi) + \frac{n(n-1)}{2} N^{n-2} (\varphi^2 - \psi^2) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} N^{n-3} (\varphi^3 - \psi^3) + \dots \right\} &= \\ A \left\{ nN^{n-1} (\varphi - \psi) + \frac{n(n-1)}{2} N^{n-2} (\varphi^2 - \psi^2) + \right. & \\ \left. + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} N^{n-3} (\varphi^3 - \psi^3) \right\} &= \\ A \left\{ nN^{n-1} \left[a^2 u_{xx} + \frac{a^4}{12} u_{4x} + \frac{a^6}{360} u_{6x} + O(a^7) \right] + \frac{n(n-1)}{2} N^{n-2} \left[-\frac{a^5}{3} u_{xx} u_{xxx} + O(a^7) \right] + \right. & \\ \left. \frac{n(n-1)(n-2)}{6} N^{n-3} \left[\frac{a^6}{4} u_{xx}^3 + O(a^7) \right] \right\}. & \end{aligned}$$

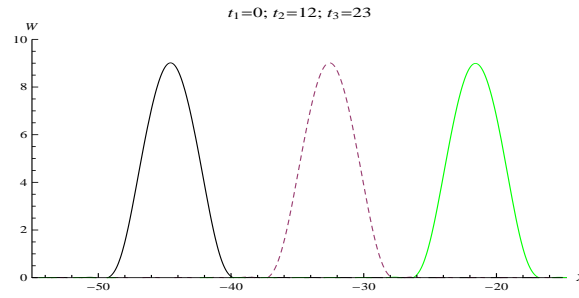
Odrzucając wyrażenie proporcjonalne $\frac{a^6}{360} u_{6x}$ w przedostatnim wierszu (które jest małe ze względu na mianownik), różniczkując lewą i prawą względem x oraz stosując podmianę $u_x = -S$, równanie to można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} S_{tt} &= A a^{n+1} \left\{ nS^{n-1} \left[S_x + \frac{a^2}{12} S_{3x} \right] + \frac{n(n-1)}{6} a^2 S^{n-2} S_x S_{xx} + \right. \\ & \left. + \frac{n(n-1)(n-2)}{24} a^2 S^{n-3} S_x^3 \right\}_x + O(a^{n+3}). \end{aligned} \quad (4.31)$$

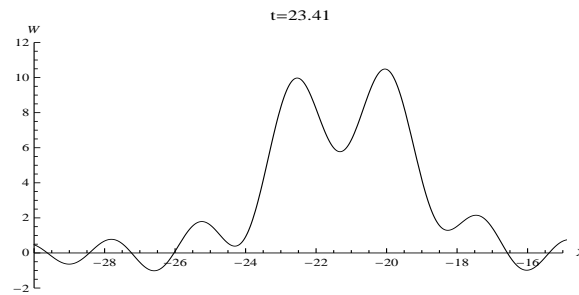
(odtąd pominiemy wyrazy rzędu $O(a^{n+3})$).

Równanie (4.31) można również przedstawić w zwartej postaci:

$$S_{tt} = C \left\{ S^n + \beta S^{\frac{n-1}{2}} \left[S^{\frac{n+1}{2}} \right]_{xx} \right\}_{xx}, \quad (4.32)$$



Rys. 4.9: Ewolucja czasowa rozwiązania kompaktowego równania (4.35)



Rys. 4.10: Początek destrukcji rozwiązania kompaktowego

gdzie $C = A a^{n+1}$, $\beta = \frac{n a^2}{6(n+1)}$.

Lemat 4.4.1. *Równanie (4.32) posiada uogólnione rozwiązanie typu fali biegnącej postaci*

$$S(t, x) = A \begin{cases} \cos^{\frac{2}{n-1}} [B z] & \text{gdzie } |B z| < \pi/2, \\ 0 & \text{gdzie indziej,} \end{cases} \quad (4.33)$$

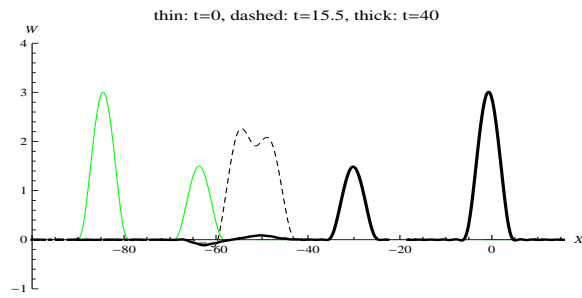
gdzie

$$A = \left[\frac{\lambda(n+1)}{2} \right]^{\frac{1}{n-1}}, \quad B = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \frac{n-1}{n+1},$$

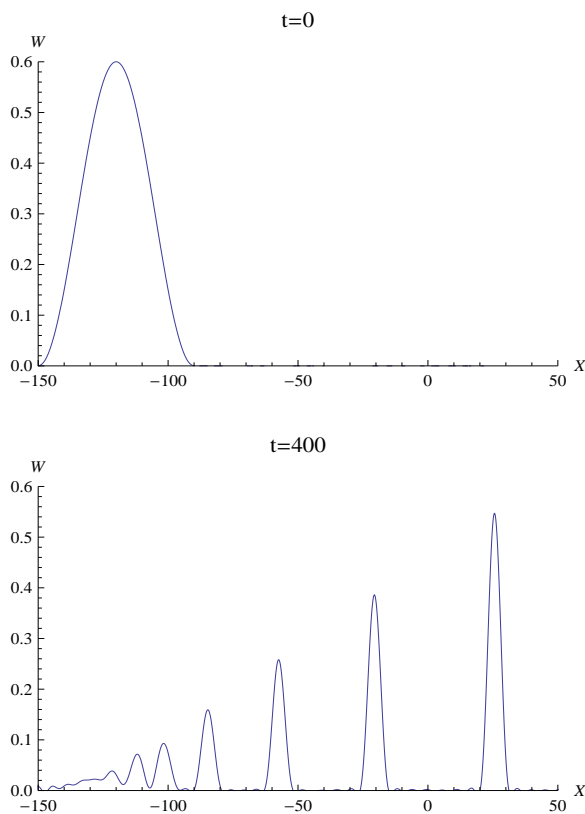
$$\lambda = V^2/C.$$

Stwierdzenie to sprawdza się bezpośrednim sprawdzeniem.

Wspominaliśmy już o tym, że rozwiązanie solitonowe równanie Boussinesq'a jest niestabilne. Równanie (4.32), które uzyskuje się w podobny sposób, również posiada rozwiązanie zlokalizowane (4.33), które jest niestabilne. Ilustruje to rys. 4.8.



Rys. 4.11: "Prawie" sprężyste oddziaływanie kompaktów spełniających równanie (4.37)



Rys. 4.12: U góry: zaburzenie o zwartym nośniku w chwili $t = 0$; u dołu: wynik symulacji numerycznej równania (4.37) w chwili $t = 400$

Naturalnym wydaje się w tym miejscu zastosowanie przekształceń wieloskalowych w celu uzyskania równania rzędu pierwszego względem zmiennej czasowej, które by było analogiem równania KdV. Zastosujmy więc transformacje scalingowe

$$T = \frac{1}{2}\varepsilon^q t, \quad X = \varepsilon^p(x - V t), \quad S = \varepsilon^\mu W, \quad a = \varepsilon^\nu.$$

Po podstawieniu do (4.31) otrzymamy:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}\varepsilon^{2q} W_{TT} - V W_{TX} \varepsilon^{q+p} + V^2 W_{XX} \varepsilon^{2p} = \\ & = \tilde{C} \varepsilon^{2p+\nu(n+1)+(n-1)\mu} \left\{ W^n + \tilde{\beta} \varepsilon^{2p+2\nu} W^{\frac{n-1}{2}} \left[W^{\frac{n+1}{2}} \right]_{XX} \right\}_{XX}, \end{aligned}$$

gdzie $\tilde{C} = A$, $\tilde{\beta} = \frac{n}{6(n+1)}$. Kładąc $\nu = -p$, $\mu = \frac{q+n p}{n-1}$ oraz spełniając nierówności

$$2q > p + q > 2p > 0$$

można, odrzucając małe wyrażenie $\frac{1}{4}\varepsilon^{2q} W_{TT}$, oraz całkując względem X , otrzymać równanie

$$W_T - \alpha W_X + \hat{C} \left\{ W^n + \hat{\beta} W^{\frac{n-1}{2}} \left[W^{\frac{n+1}{2}} \right]_X \right\}_X = 0, \quad (4.34)$$

gdzie $\hat{C} = A/S$, $\hat{\beta} = \tilde{\beta}$, $\alpha = S \varepsilon^{p-q} \gg 1$.

Dla równania (4.34), można podać jawną postać posiada uogólnionego rozwiązania typu fali biegnącej. Na przykład, przy $\hat{C} = \hat{\beta} = 1$ zachodzi

Lemat 4.4..2. Równanie

$$W_T - \alpha W_X + \left\{ W^n + \beta W^{\frac{n-1}{2}} \left[W^{\frac{n+1}{2}} \right]_{XX} \right\}_X = 0, \quad (4.35)$$

posiada uogólnione rozwiązanie typu fali biegnącej postaci

$$W(T, X) = A \begin{cases} \cos^\gamma [B Z] & \text{gdzie } |B Z| < \pi/2, \\ 0 & \text{gdzie indziej,} \end{cases} \quad (4.36)$$

gdzie $Z = X - V T$,

$$\gamma = \frac{2}{n-1}, \quad A = \left[\frac{(n+1)(V+\alpha)}{2} \right]^{\frac{1}{n-1}}, \quad B = \frac{n-1}{n+1}.$$

Eksperymenty numeryczne w których rozwiązanie (4.36) odpowiadające chwili $T = 0$ brane było jako dane Cauchy'ego wykazują że przez pewien czas kompakton ewolucjonuje bez widocznej zmiany kształtu (p. rys. 4.9). Jednak po pewnym czasie dochodzi do destrukcji kompaktonu - jej początek zobrazowany jest na rys. 4.10. Przyczyną powodującą rozpad kompaktonu może być zarówno zastosowanie niewłaściwego schematu numerycznego, jak i

niestabilność samego rozwiązania. Pewne kwestie dotyczące stabilności rozwiązań typu fali biegnącej zostaną omówione w ostatnim rozdziale niniejszego skryptu.

Oprócz równania (4.35) rozpatrzmy równanie odpowiadające wartości $\alpha = 0$:

$$W_t + \left\{ W^n + W^{\frac{n-1}{2}} \left[W^{\frac{n+1}{2}} \right]_{xx} \right\}_x = 0. \quad (4.37)$$

Równanie to nie może być uzyskane z (4.32) za pomocą rozkładów wieloskalowych, niemniej w ostatnich latach często figuruje ono w publikacjach naukowych jako równanie które, podobnie jak (4.28), jest "niecałkowalnym" analogiem równania KdV posiadającym rozwiązania zlokalizowane demonstrujące własności solitonowe. Z poprzedniego lematu bezpośrednio wynika

Wniosek 4.4..1. *Równanie (4.37) posiada uogólnione rozwiązanie typu fali biegnącej postaci*

$$W(t, x) = \begin{cases} A \cos^{\frac{2}{n-1}} [B z] & \text{gdzie } |B z| < \pi/2, \\ 0 & \text{gdzie indziej,} \end{cases} \quad (4.38)$$

gdzie $z = x - V t$,

$$A = \left[\frac{V(n+1)}{2} \right]^{\frac{1}{n-1}}, \quad B = \frac{n-1}{n+1}.$$

Rozwiązania (4.38) wykorzystane było przy $n = 2$ jako dane Cauchyego w eksperymentach numerycznych. Wyniki eksperymentów wykazują stabilność ewolucji pojedynczego kompaktone. Ponadto wybierając jako dane Cauchyego parę kompaktone poruszających się wprawo, oraz dobierając parametry w taki sposób by kompaktone o większej amplitudzie znajdował się w chwili początkowej po lewej stronie od mniejszego, mogliśmy obserwować wzajemne oddziaływanie tych fali. Wyniki symulacji numerycznej zderzenia dwóch kompaktone jest przedstawiony na rys. 4.11, z którego widać że po zakończeniu oddziaływania kompaktone odtwarzają swoje kształty. Osobliwością oddziaływania jest to że po jakimś czasie w miejscu oddziaływania tworzy się para kompaktone-antykompaktone, przy czym te zaburzenia wtórne mają amplitudy o rząd wielkości mniejsze od rozwiązań, które powstanie tej prary zainicjowały.

Numeryczne rozwiązywanie zagadnienia Cauchyego dla równania (4.37) z gładkimi danymi Cauchyego o spójnym i zwartym nośniku (odmiennymi od rozwiązania (4.38)) wykazują, że w trakcie ewolucji zaburzenie początkowe produkuje ciąg kompaktone poruszających się z różnymi prędkościami, p. rys. 4.12. Poprzednie rozważania pozwalają wnioskować o tym, że równanie (4.37) nie jest zupełnie całkowalne. Niemniej, jednak, jego rozwiązania zlokalizowane ewoluują podobnie jak rozwiązania solitonowe równania KdV. Można więc domniemać, iż zupełna całkowalność nie jest warunkiem koniecznym sprężystego oddziaływania

rozwiązań zlokalizowanych. Natomiast nie ma szans na takie zachowanie w przypadku gdy pakiet falowy jest niestabilny. Ze względu na wyjątkową wagę tego pojęcia, w ostatnim rozdziale niniejszego kursu będą (z konieczności w dużym skrócie) omówione podstawowe pojęcia dotyczące stabilności rozwiązań typu fali biegnącej.

Rozdział 5

Stabilność rozwiązań typu fali biegnącej

5.1. Wstęp. Sformułowanie zagadnienia

Rozwiązania typu fali biegnącej w modelach ewolucyjnych są szczególnie ważne z punktu widzenia zastosowań wtedy, gdy są one stabilne. Badanie stabilności rozwiązań stanowi osobny (niekiedy bardzo trudny) problem.

Rozpatrzmy równanie ewolucyjne

$$U_t = F(U, U_x, \dots, U_{nx}), \quad U \in \mathbf{R}^n. \quad (5.1)$$

Ponieważ zakładamy że prawa strona powyższego równania nie zależy jawnie od zmiennych t, x , więc ma ono rozwiązania typu fali biegnącej postaci

$$U = U(z), \quad z = x - st.$$

Spełnia ono równanie zwyczajne

$$sU'(z) + F(U, U', \dots, U^{(n)}) = 0.$$

Przy rozpatrywaniu zagadnień stabilności wygodniej jest pracować w układzie współrzędnych

$$\bar{t} = t, \quad \bar{z} = x - st, \quad (5.2)$$

w którym rozwiązania typu fali biegnącej nie zależą od (nowej) zmiennej czasowej. W zmiennych (5.2) równanie (5.1) będzie miało postać

$$U_{\bar{t}} = \Phi(U, U_{\bar{z}}, \dots, U_{n\bar{z}}), \quad \Phi(U, U_{\bar{z}}, \dots, U_{n\bar{z}}) = sU_{\bar{z}} + F(U, U_{\bar{z}}, \dots, U_{n\bar{z}}) \quad (5.3)$$

(odtąd dla uproszczenia pomijamy kreski nad zmiennymi niezależnymi).

Stabilność spektralna. Rozpatrzmy następujące zaburzenie rozwiązania $U(z)$ opisującego falę biegnącą:

$$u(t, z) = U(z) + \epsilon e^{\lambda t} g(z), \quad (5.4)$$

gdzie ϵ -mały parametr. Pomijając wyrazy rzędu $O(\epsilon^2)$, otrzymamy, po podstawieniu ansatzu (5.4) do równania (5.3) równanie liniowe

$$\lambda g(z) = \sum_{0 \leq j \leq n} \frac{\partial \Phi}{\partial U^{(j)}} \frac{d^j g(z)}{dz^j}. \quad (5.5)$$

Równanie to można przepisać w postaci operatorowej

$$\hat{L} g(z) = \lambda g(z), \quad (5.6)$$

gdzie

$$\hat{L} = \sum_{0 \leq j \leq n} \frac{\partial \Phi}{\partial U^{(j)}} \frac{d^j}{dz^j}.$$

L nazywamy operatorem linearyzacji odpowiadającym równaniu (5.3). Na funkcję "próbna" $g(z)$, na ogół, nakłada się pewne ograniczenia, na przykład

$$\text{supp } g \subset (a, b), \quad \text{orza} \quad \lim_{z \rightarrow a+0} g^{(k)}(z) = \lim_{z \rightarrow b-0} g^{(k)}(z) = 0, \quad k = 0, 1, \dots,$$

przy czym odcinek (a, b) może być zarówno skończonym, jak i nieskończonym.

Niech X, Y - przestrzenie Banacha, zaś \hat{L} - liniowy operator, odwzorowujący zbiór B , gęsty w X , w zbiór Y .

Definicja 5.1..1 *Mówimy że \hat{L} jest operatorem ograniczonym, jeżeli*

$$\sup \left\{ \|\hat{L} u\|_Y : u \in X, \|u\|_X = 1 \right\} < \infty.$$

Definicja 5.1..2 *Zbiorem rezolwenty $\rho(\hat{L})$ operatora \hat{L} nazywa się zbiór liczb $\lambda \in \mathbb{C}$ takich że*

[(a)] $\lambda I - \hat{L}$ jest operatorem odwracalnym;

[(b)] $(\lambda I - \hat{L})^{-1}$ jest operatorem ograniczonym gdy $\lambda \in \rho(\hat{L})$.

Definicja 5.1..3 *Zbiór $\sigma(\hat{L}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\hat{L})$ nazywamy widmem operatora \hat{L} .*

Rozróżniamy widmo punktowe (dyskretne) $\sigma_{pt}(\hat{L})$ oraz widmo zasadnicze $\sigma_{ess}(\hat{L})$. Widmo punktowe określa się następująco:

Definicja 5.1..4 Liczba $\lambda \in \mathbb{C}$ należy do $\sigma_{pt}(\hat{L})$, jeżeli $\lambda I - \hat{L}$ jest operatorem nieodwracalnym, a ponadto istnieje zbiór otwarty $U \in \mathbb{C}$ zawierający λ taki że $\{U \setminus \lambda\} \cap \sigma(\hat{L}) = \emptyset$.

$\sigma_{ess}(\hat{L})$ określa się jako zbiór $\sigma(\hat{L}) \setminus \sigma_{pt}(\hat{L})$.

Własnościom zbiorów σ_{pt} oraz σ_{ess} poświęcona jest bardzo obszerna literatura. My, niestety, z uwagi na brak miejsca i czasu, będziemy przytaczać tu tylko te fakty, które dotyczą omawianych kwestii stabilności rozwiązań typu fali biegnącej. "Folklorystycznie" można powiedzieć, iż σ_{ess} odpowiada za stabilność rozwiązań asymptotycznych $U_{\pm} = \lim_{z \rightarrow \pm\infty} U(z)$, wtenczas gdy σ_{pt} - za stabilność samego rozwiązania $U(z)$. Zasadność takiego podziału potwierdza, w pewnym sensie, następujące stwierdzenie ¹

Twierdzenie 5.1..1. Zbiór $\sigma_{ess}(\hat{L})$ jest ograniczony z prawej strony przez zbiór

$$\sigma_{ess}(\hat{L}_+) \cup \sigma_{ess}(\hat{L}_-),$$

gdzie

$$\hat{L}_{\pm} = \hat{L} \left(U_{\pm}, U_{\pm}^{(1)}, \dots, U_{\pm}^{(n)} \right), \quad U_{\pm}^{(k)} = \lim_{z \rightarrow \pm\infty} U^{(k)}(z), \quad k = 0, 2, \dots, n$$

(zakłada się że $|U_{\pm}^{(k)}| < \infty$).

Ograniczenia na $\sigma_{ess}(\hat{L})$ można więc uzyskać analizując zagadnienia własne

$$\hat{L}_{\pm} g(z) = \lambda g(z) = \sum_{0 \leq j \leq n} \frac{\partial \Phi}{\partial U^{(j)}} [U_{\pm}] \frac{dg(z)}{dz^j}, \quad [U_{\pm}] = \left(U_{\pm}, U_{\pm}^{(1)}, \dots, U_{\pm}^{(n)} \right). \quad (5.7)$$

Ponieważ operatory L_{\pm} mają stałe współczynniki, zagadnienie to można rozwiązać stosując transformację Fouriera.

Z ogólnych własności nadmienić należy jeszcze następującą:

Lemat 5.1..1. Jeżeli $U(z)$ jest rozwiązaniem typu fali biegnącej spełniającym równanie (5.3), wówczas funkcja $g_0(z) = U'(z)$ jest rozwiązaniem zagadnienia spektralnego (5.5) odpowiadająca wartości własnej $\lambda = 0$.

Dowód. Łatwo widać iż równanie (5.3) jest niezmiennicze względem translacji $z \rightarrow z + \delta$. zatem, ponieważ $U(z)$ spełnia równanie

$$\Phi \left(U, U^{(1)}(z), \dots, U^{(n)}(z) \right) = 0,$$

¹D. Henry, *Geometric theory of semi-linear parabolic equations*, - Springer, New York, 1981.

więc $U(z + \delta)$ spełnia równanie

$$\Phi(U(z + \delta), U^{(1)}(z + \delta), \dots, U^{(n)}(z + \delta)) = 0.$$

Z tego wynikają równości

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \Phi(U(z + \delta), U^{(1)}(z + \delta), \dots, U^{(n)}(z + \delta)) \Big|_{\delta=0} = \sum_{0 \leq j \leq n} \frac{\partial \Phi}{\partial U^{(j)}} \frac{d^{j+1}}{dz^{j+1}} U = \hat{L}U'(z) = 0.$$

5.2. Stabilności rozwiązań typu kinków i solitonów w modelach typu konwekcji-reakcji-dyfuzji.

5.2.1. Twierdzenie oscylacyjne Sturma. Operator postaci

$$\mathfrak{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_1(x) \frac{\partial}{\partial x} + a_0(x), \quad C^k(a, b) \ni a_i(x) \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1$$

naywa się operatorem Sturma. Będziemy rozpatrywać \mathfrak{L} na zbiorze funkcji całkowalnych z kwadratem na odcinku (a, b) . Zakłada się że funkcja f na którą działa operator \mathfrak{L} spełnia warunki

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = 0 \tag{5.8}$$

Istnieją dwie wersje oscylacyjnego twierdzenia Sturma. W pierwszej wersji funkcje są zadane na zbiorze skończonym, który bez utraty ogólności można utożsamić z odcinkiem $(-1, 1)$. W drugiej wersji zbiór jest nieskończony.

Zachodzi

Lemat 5.2..1. *Operator \mathfrak{L} jest symetryczny względem iloczynu skalarnego*

$$\langle u, v \rangle_\rho = \int_a^b \overline{v(x)} u(x) \rho(x) dx, \quad \rho(x) = e^{\int_0^x a_1(s) ds}.$$

Dowód przeprowadza się bezpośrednio za pomocą całkowania przez części, z uwzględnieniem warunków brzegowych (5.8).

Wniosek 5.2..1. *Wszystkie wartości własne operatora \mathfrak{L} są rzeczywiste.*

Podamy teraz bez dowodu dwie wersje oscylacyjnego twierdzenia Sturma.

Twierdzenie 5.2..1. *Rozpatrzmy zagadnienie Sturma*

$$\mathfrak{L}p(x) = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_1(x) \frac{\partial}{\partial x} + a_0(x) \right] p(x) = \lambda p(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} p(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} p(x) = 0, \quad p(x) \in L_2(-1, 1).$$

Teza:

(a) *Wszystkie wartości własne $\lambda_k \in \sigma_{pt}(\mathfrak{L})$ mogą być uporządkowane w taki sposób że będą zachodzić nierówności*

$$\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots$$

$$\text{przy czym } \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = -\infty.$$

(b) *funkcje własne $\{p_j(x)\}_{0 \leq j \leq N}$ odpowiadające $\{\lambda_j\}_{0 \leq j \leq N}$ mogą być unormowane w taki sposób że, po-pierwsze,*

$$\langle p_j, p_k \rangle_\rho = \delta_{jk},$$

po-drugie, $p_j(x)$ ma dokładnie j zer (przecięć transwersalnych z osią OX) na odcinku $(-1, 1)$.

W przypadku gdy odcinek (a, b) jest nieograniczony, twierdzenie oscylacyjne jest nieco inne.

Twierdzenie 5.2..2. *Rozpatrzmy zagadnienie Sturma*

$$\mathfrak{L}p(x) = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_1(x) \frac{\partial}{\partial x} + a_0(x) \right] p(x) = \lambda p(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = 0, \quad p(x) \in L_2(-\infty, +\infty).$$

Teza:

(a) *Liczba wartości własnych λ_k należących do $\sigma_{pt}(\mathfrak{L})$ jest skończona. Mogą one być uporządkowane w taki sposób że będą zachodzić nierówności*

$$\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots \lambda_N > \max a_0(\pm), \quad \text{gdzie } a_0(\pm) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_0(x).$$

(b) *Funkcje własne $\{p_j(x)\}_{0 \leq j \leq N}$ odpowiadające wartościom własnym $\{\lambda_j\}_{0 \leq j \leq N}$ mogą być unormowane w taki sposób że, po-pierwsze,*

$$\langle p_j, p_k \rangle_\rho = \delta_{jk},$$

po-drugie, $p_j(x)$ ma dokładnie j zer (przecięć transwersalnych z osią OX) na odcinku $(-\infty, +\infty)$.

5.2.2. Równanie konwekcji-reakcji-dyfuzji: warunki stabilności rozwiązań typu kinków. Rozpatrzmy rodzinę równań konwekcji-reakcji-dyfuzji (K-R-D)

$$u_t + g(u) u_x = [\kappa(u) u_x]_x + f(u). \quad (5.9)$$

Uwaga. Z sensu fizycznego funkcji $\kappa(u)$ opisującej współczynnik transportu (na przykład ciepła) wynika że jest ona nieujemna co najmniej dla nieujemnych wartości funkcji $u(t, x)$.

Z poprzednich rozważań wiemy że rodzina równań K-R-D (do której, m.in., należy równanie Burgersa) posiada rozwiązania typu kinków i solitonów. Przedyskutujemy więc kwestię stabilności tych rozwiązań. Dokonując zamiany zmiennych $(t, x) \rightarrow (t, z = x - st)$, przepiszemy równanie (5.9) w standardowej postaci

$$u_t = \Phi(u, u_z, u_{zz}) = f(u) + [s - g(u)] u_z + \dot{\kappa}(u) u_z^2 + \kappa(u) u_{zz}. \quad (5.10)$$

Załóżmy teraz że równanie (5.10) posiada rozwiązanie stacjonarne $U(z)$, które jest kinkiem lub solitonem i rozpatrzmy zaburzenie

$$u(t, x) = U(z) + \epsilon e^{\lambda t} p(z).$$

Podstawiając ten wzór do (5.10), otrzymamy, odrzucając człony rzędu $O(\epsilon^2)$, zagadnienie Sturm-Liouville'a

$$\lambda h(z) = \mathfrak{L} p(z) = \left[a_2 \frac{d^2}{dz^2} + a_1 \frac{d}{dz} + a_0 \right] p(z), \quad (5.11)$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_2 &= \kappa(U), \\ a_1 &= 2\dot{\kappa}(U) U_z + s - g(U), \\ a_0 &= \dot{f}(U) + \dot{\kappa}(U) U_{zz} + \ddot{\kappa}(U) U_z^2 - \dot{g}(U) U_z. \end{aligned}$$

Najpierw zajmiemy się oszacowaniem σ_{ess} . Rozwiązania typu kinków i solitonów posiadają następujące własności asymptotyczne:

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} U(z) = m_{\pm}, \quad \text{gdzie } |m_{\pm}| < \infty, \quad \lim_{z \rightarrow \pm\infty} U^{(k)}(z) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

W przypadku rozwiązania solitonowego zachodzi, oczywiście, równość $m_+ = m_-$. Z twierdzenia podanego w poprzednim paragrafie wynika że oszacowanie σ_{ess} wiąże się z analizą spektralną operatorów

$$\mathfrak{L}_{\pm} = [\kappa(m_{\pm})] \frac{d^2}{dz^2} + [s - g(m_{\pm})] \frac{d}{dz} + \dot{f}(m_{\pm}),$$

czyli z rozwiązaniem zagadnień spektralnych

$$\lambda h(z) = \mathfrak{L}_\pm h(z).$$

Ponieważ operatory \mathfrak{L}_\pm mają stałe współczynniki, do rozwiązania tego problemu efektywne jest zastosowanie transformaty Fouriera \mathfrak{F} ². Dokonując tej transformaty przy założeniu że $h(z)$ należy do zbioru dystrybucji temperowanych $S'(\mathbb{R})$ otrzymamy równanie

$$\left[\lambda - (g(m_\pm) - s) i \xi - \left(\dot{f}(m_\pm) - \kappa(m_\pm) \right) \xi^2 \right] \hat{h}(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{h}(\xi) = \mathfrak{F} h[\xi].$$

Zgodnie z definicją, λ należy do widma wtedy i tylko wtedy gdy operator $\lambda I - \mathfrak{L}_\pm$ nie ma odwrotnego. Stąd natychmiast wynika

Wniosek 5.2..2. *Widmo operatora \mathfrak{L}_\pm pokrywa się ze zbiorem*

$$\sigma = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda - (g(m_\pm) - s) i \xi - \left(\dot{f}(m_\pm) - \kappa(m_\pm) \right) \xi^2 = 0, \quad \xi \in \mathbb{R} \right\}.$$

Z nieujemności liczb $\kappa(m_\pm)$ natychmiast wynika

Wniosek 5.2..3. *Jeżeli $\dot{f}(m_\pm) \leq 0$, to $\sigma_{ess} \cap \mathbb{C}^+ = \emptyset$.*

Zastosujmy uzyskane wyniki do badania stabilności rozwiązania (3.22) równania Burgersa. Operator linearyzacji tego równania ma postać

$$\mathfrak{L} = \kappa \frac{d^2}{dz^2} + (s - U) \frac{d}{dz} + U_z,$$

natomiast funkcja $f(U)$ jest tożsamościowo równa zeru. Wynika z tego, że $\sigma_{ess}[\mathfrak{L}]$ nie przecina się z półpłaszczyzną \mathbb{C}^+

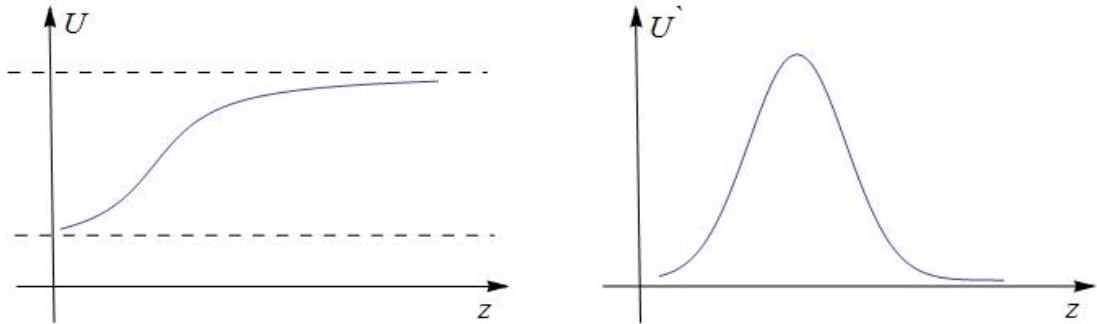
Ze względu na to, że współczynnik κ jest stały, do analizy widma dyskretnego można wykorzystać oscylacyjne twierdzenie Sturma. Rzeczywiście, dzieląc lewą i prawą strony równania (5.13) przez $\kappa > 0$ otrzymamy zagadnienie Sturma-Liouville'a

$$\tilde{\lambda} p(z) = \mathfrak{L} p(z) \left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{s - U}{\kappa} \frac{d}{dz} + \frac{U_z}{\kappa} \right] p(z), \quad (5.12)$$

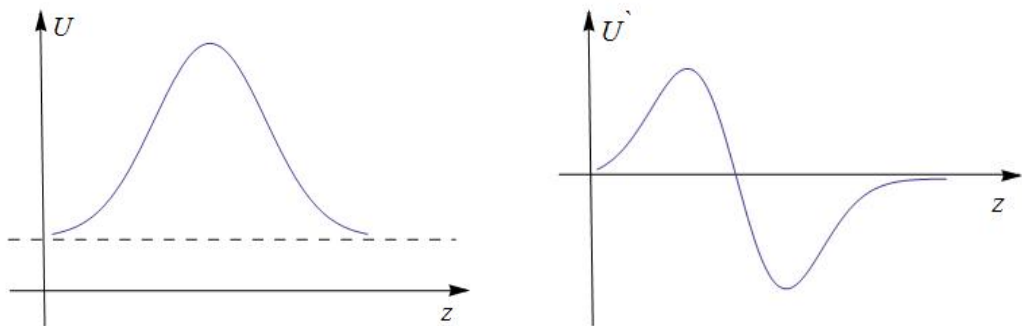
gdzie $\tilde{\lambda} = \lambda/\kappa$.

We wstępie do niniejszego rozdziału wykazaliśmy że funkcja $p_\nu(z) = U'(z)$ jest funkcją własną operatora \mathfrak{L} odpowiadającą wartości własnej $\lambda_\nu = 0$. I teraz, jeżeli $U(z)$ opisuje kink o profilu monotonicznym, tak jak ma to miejsce w przypadku rozwiązania (3.22), wówczas $p_\nu(z)$ jest funkcją posiadającą jedno ekstremum lokalne oraz zmierzającą wykładniczo do zera gdy $|z| \rightarrow \infty$ (p. rys. 5.1). Zatem, na mocy twierdzenia oscylacyjnego Sturma, $U'(z) = p_0(z)$ jest funkcją własną odpowiadającą największej wartości własnej $\tilde{\lambda}_0 = 0$, natomiast wszystkie inne wartości własne są mniejsze od zera.

²p., na przykład, **V. Vladimirov**, *Wstęp do teorii dystrybucji*, Kraków, 2007 (<http://wms.mat.agh.edu.pl/vladimir/courses/Maindst7c.pdf>)



Rys. 5.1: Wykres funkcji $U(z)$ opisującej kink (po lewej) oraz wykres funkcji $U'(z)$ (po prawej)



Rys. 5.2: Po lewej: wykres rozwiązania solitonowego $U(z)$; po prawej: wykres funkcji $U'(z)$

Wniosek 5.2..4. *Rozwiązanie (3.22) jest spektralnie stabilne.*

Teorię Sturma można również zastosować do analizy stabilności rozwiązania solitonowego równania (5.9) w przypadku $\kappa = const$. Rzeczywiście, odpowiednie zagadnienie S-L w tym przypadku można przedstawić w postaci

$$\tilde{\lambda} h(z) = \left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{s - g(U)}{\kappa} \frac{d}{dz} + \frac{\dot{f}(U) - \dot{g}(U) U_z}{\kappa} \right] p(z), \quad (5.13)$$

gdzie $\tilde{\lambda} = \lambda/\kappa$. Ponownie wykorzystujemy to że funkcja $p_\nu(z) = U'(z)$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej $\tilde{\lambda}_\nu = 0$. Jednak tym razem funkcja $U'(z)$ ma dwa ekstrema lokalne i jeden raz przecina oś OX (p. rys. 5.2). Zatem funkcja ta odpowiada wartości $\tilde{\lambda}_1 = 0$ i, na mocy twierdzenia Sturma, istnieje również wartość własna $\tilde{\lambda}_0 > 0$.

Wniosek 5.2..5. *Rozwiązanie solitonowe równania K-R-D (5.9) z $\kappa = const$ nigdy nie jest spektralnie stabilne.*

LITERATURA

- [1] Barenblatt G. I., *Scaling, Self-similarity and Intermediate Asymptotics*, Cambridge University Press, New York, 1996.
- [2] Dodd R., Eilbeck J., Gibbon J., Morris H., *Solitons and nonlinear wave Equations*, Academic Press, London, 1984.
- [3] Rosenau Ph., Hyman J., *Compactons: Solitons with finite wavelength*, Phys. Rev. Letters, **70** (1993), 564-567.
- [4] Kapitula T., Piskunov K., *Spectral and Dynamical Stability of Nonlinear Waves*, Springer, New York, 2012.
- [5] Gilding B. H., Kersner R., *Travelling Waves in Nonlinear Diffusion-Convection-Reaction*, Birkhauser, 2004.
- [6] Zeldovich Ya., *Theory of Flame Propagation*, National Advisory Committee for Aeronautics Technical Memorandum 1282 (1951), 39 pp.
- [7] Kolmogorov A., Petrovskii I., Piskunoff N., *Dynamics of Curved Fronts* (edited by P. Pelce), Academic Press, Boston, 1988, pp. 105-130.
- [8] Makarenko A.S., Moskalkov M., Levkov S., *Phys Lett. A*, vol. 23 (1997), 391-397
- [9] Kar S., Banik S.K., Ray Sh., *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 36, No. 11 (2003), 2771-2780.
- [10] nesterenko V.F., *Dynamics of Heterogeneous Materials*, Springer, New York, 2001.
- [11] Vladimirov V., Kutafina E., *Rep. Math. Physics*, vol. 54 (2004), 261-271.
- [12] Vladimirov V., Kutafina E., *Rep. Math. Physics*, vol. 56 (2005), 421-436.
- [13] Vladimirov V., Kutafina E., *Rep. Math. Physics*, vol. 58 (2006), 465-476.
- [14] Vladimirov V., Mączka Cz., *Rep. Math. Physics*, vol. 60 (2007), 317-328.
- [15] Kutafina E., *Journ. of Nonlinear Mathematical Physics*, vol. 16 (2009), 517-519.

- [16] Vladimirov V., Mączka Cz., *Rep. Math. Physics*, vol. 65 (2010), 141-156.
- [17] Vladimirov V., *Wave patterns within the generalized convection-reaction-diffusion equation*, arXiv:0911.2759v1 [nlin.PS]
- [18] Guckenheimer J., Holmes Ph., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, NY, 1987.
- [19] Hassard , Kazarinoff, Wan *Theory and Applications of the Hopf Bifurcation*, Springer, NY, 1981.
- [20] Simon B., *Sturm Oscillation and Comparison Theorems*, arXiv:math/0311049 v1 [math.SP]
- [21] Idris I., Biktashev V.N., *An analytical approach to initiation of propagating fronts*, arxiv:0809.0252v1 [nlin.PS]
- [22] Vladimirov V., Mączka Cz., *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 44 (2011), 677-684.
- [23] Cattaneo C., *Sulla condizione de calore*, Atti del Semin. Mat. Ital., Ser. 6, **5A** (1948), 33.
- [24] *Heat Waves*,
- [25] Vladimirov V. and Kutafina E., *Analytical Description of the Coherent Structures within the Hyperbolic Generalization of Burgers Equation*, Rep. Math. Physics, **58** (2006), 465.
- [26] Samarskii A., Galaktionov V.,Kurdiumov A., Mikhailov A., *Blow-up in Quasilinear Parabolic Equations*, Walter de Gruyter, NY, 1995.
- [27] Samarskii, A., Mikhailov A., *Principles of Mathematical Modelling*, CRC Press, Boca Raton, 2001.
- [28] Vladimirov V., *Compacton-like Solutions of the Hydrodynamic System Describing Relaxing Media*, Rep. Math. Phys. 61 (2008), 381-400.
- [29] Vladimirov V., Maczka Cz., *On the Localized Wave Patterns Supported by Convection-Reaction-Diffusion Equation*, Rep. Math. Physics, (2010)
- [30] Dubin, D., *Numerical and Analytical Methods for Scientists and Engineers Using "Mathematica "* Wiley and Sons, New Jersey, 2003.
- [31] Vladimirov V.A., *Wstęp do teorii dystrybucji*, <http://wms.mat.agh.edu.pl/vladimir/courses/Maindst7c.pdf>