Akademia Górniczo-Hutnicza imienia S. Staszica
Wydział Matematyki Stosowanej

Analiza grupowa równań różniczkowych

Vsevolod Vladimirov

Kraków 11 lipca 2012

SPIS TREŚCI

Wstęp

Równania różniczkowe są podstawowym narzędziem nauk technicznych, przyrodniczych, a nawet, w ostatnim czasie, humanistycznych. Posdstawowe modele nauk przyrodniczych formułowane są w postaci równań różniczkowych cząstkowych (RRCz) lub zwyczajnych (RRZ) (równania dynamiki Newtona, równanie transportu ciepła, równanie falowe, równanie Schrödingera, etc., etc.). Pierwszym krokiem przy opisie zjawiska przyrodniczego jest sformułowanie adekwatnego modelu, którym najczęściej jest równanie różniczkowe. Następnym krokiem jest próba rozwiązania tego równania oraz fizyczna interpretacja uzyskanych rozwiązań.

Nie stanowi większego problemu rozwiązywanie liniowych równań różniczkowych o stałych współczynnikach. Jest to jednak sytuacja wyjątkowa: równania liniowe nie obejmują swoim zakresem większości ciekawych zjawisk, takich jak grawitacyjne oddziaływanie ciał, przepływy rzeczywiste cieczy i gazu, procesy szybkie (uderzenie, wybuch) i wiele-wiele innych.

Na odmianę od rownań liniowych, uzyskanie rozwiązań analitycznych nieliniowych RR zwyczajnych lub cząstkowych stanowi duży problem. Przeglądając metody rózwiązywania RRZ, czytelnik często gubi się w rozmaitych, na pozór w żaden sposób nie związanych ze sobą, metodach stosowanych do pewnych klas równań. Jeśli chodzi o nieliniowe równania cząstkowe, to sytuacja tu jest jeszcze dramatyczniejsza, gdyż ogólne metody rozwiązywannia konkretnych zagadnień początkowo-bregowych poprostu nie istnieją. Dlatego teoretyczne badania nieliniwych RRCz najczęściej sprowadzają się do wykazania istnienia i jednoznaczności rozwiązań, natomiast w praktyce równania takie rozwiązuje się za pomocą maszyn cyfrowych z czym wiąże się szereg problemów zarówno teoretycznych jak i praktycznych.

Jedną z nielicznych alternatyw metodam numerycznym w odniesieniu do nieliniowych RR są metody symetrii, bardziej dokładnie, teoria grup Liego. Motywacją dla twórcy tej teorii, wybitnego norweskiego matematyka Sophusa Liego, było skuteczne zastosowanie teorii grup Galois do problemu rozwiązalnoći w radykałach równań algebraicznych dowolnego rzędu. Próba stworzenia analogicznej teorii na potrzeby RR doprowadziła do powstania teorii grup ciągłych.

Plan kursu jest następujący. Na początku omówione zostaną pojęcie lokalnej jenoparametrowej grupy przekształceń oraz generatora przekształceń infinitezymalnych. Dalej będą sformułowane kryteria niezmienniczości funkcji oraz rozmaitości algebraicznej względem działania grupy. Poęcia te są bardzo naturalne i łatwo interpretują się geometrycznie. Prawdziwie rewolucynym pomysłem twórcy analizy grupowej RR było spojrzenie na układ równań różniczkowych jako na rozmaitość algebraiczną należącą do rozszerzonej przestrzeni Euklidesowej, ktorej punktami są zmienne niezależne, zależne oraz poczodne zmiennych zależnych. Zakłada się że na tej przestrzeni działa t.zw. *grupa przedłużona*, która nie jest obiektem samodzielnym lecz jest indukowana dzialaniem grupy ciągłej na przestrzeni zmiennych zależnych i niezależnych Po omówieniu tych podstawowych pojęć bedzie podane algorytmiczne kryterium niezmienniczości RR. Następnie będzie pokazane w jaki sposób znajomość grupy symetrii konkretnego RR można wykorzystać do uzyskania rozwiązań. Podana również będzie procedura teorio-gropowego "rozmnażania " już istniejących rozwiązań i inne zastosowania, m.in. zastosowanie symetrii do całkowania równań różniczkowych zwyczajnych rzędu 1 i 2.

Rozdział 1

Grupy i algebry Liego

1.1. Lokalna jednoparametrowa grupa Liego

1.1.1. Pojęcie grupy

Definicja 1.1. *Grupą nazywa się zbiór G z działaniem $\phi : G \times G \longrightarrow G$ o następujących własnościach:*

1. *Łączność:*

$$\phi(a, \phi(b,\, c)) = \phi(\phi(a,\, b),\, c)).$$

2. *Element neutralny: istnieje (jedyny) element $e \in G$ taki że $\forall\, a \in G$*

$$\phi(a,\, e) = \phi(e,\, a) = a.$$

3. *Element odwrotny: $\forall\, a \in G\ \exists$ (jedyny) element b określany jako a^{-1} taki że*

$$\phi(a,\, a^{-1}) = \phi(a^{-1},\, a) = e$$

Definicja 1.2.
Grupa G nazywa się grupą abelową (przemienną) jeżeli $\forall\, a,\, b \in G\ \ \phi(a,\, b) = \phi(b,\, a)$.

Przykłady grup

1. G - zbiór wszystkich liczb całkowitych z działaniem "+".
2. G - zbiór wszystkich liczb dodatnich z działaniem "$\cdot$".
3. Grupa obrotów trójkąta równobocznego ABC zachowująca jego symetrię przestrzenną (obrót o wielokrotność $\pm 120^o$). Element neutralny: obrót o zero stopni; element odwrotny do $2\,k\,\pi/3$: $-2\,k\,\pi/3$ (obrót traktujemy modulo 360^o!!! zatem $k = 0, 1, 2, 3.$)
4. Zbiór wszystkich macierzy kwadratowych wymiaru n o nieznikających wyznacznikach, z działaniem określonym jako mnożenie macierzy.

1.1.2. Jednoparametrowa grupa przekształceń Niech U - zbiór otwarty w R^n. Rozpatrzmy jednoparametrową rodzinę przekształcenia $T_a : U \longrightarrow U$:

$$\bar{x}^k = f^k(x_1,\, x_2,\, ...x_n;\, a), \quad (x_1...x_n) \in U, \quad a \in \Delta \subset R^1. \tag{1.1}$$

Będziemy zakładać że funkcje f^i są klasy C^3 ze względu na zmienne x_k, oraz klasy C^∞ ze względu na parametr a.

Mówimy że rodzina $\{T_a\}_{a \in \Delta}$ jest lokalnie domknięta ze względu na superpozycję odwzorowań, jeżeli istnieje podzbiór otwarty $\Delta' \subset \Delta$ taki iż $\forall\, b,\, c \in \Delta'$ $T_c \cdot T_b \in \{T_a\}_{a \in \Delta}$. Przy tym powstaje funkcja $d = \varphi(b,\, c)$ która zadaje prawo superpozycji elementów tego zbioru zgodnie ze wzorem

$$T_d = T_c \cdot T_b.$$

Definicja 1.3.

Rodzinę $\{T_a\}_{a \in \Delta}$ nazywamy lokalną jednoparametrową grupą przekztałceń jeżeni jest ona lokalnie domknięta ze względu na superpozycję przekształceń oraz jeżeli podzbiór Δ' można wybrać w taki sposób by spełnione były następujące warunki:

1. *istnieje jedyna liczba $e \in \Delta$ taka że T_e jest odwzorowaniem tożsamościowym.*
2. *Funkcja $\varphi(a,\, b)$ jest trzy razy różniczkowana w spoób ciągły, oraz równanie $\varphi(a, b) = e$ ma jedyne rozwiązanie $\forall\, a \in \Delta'$.*

Paremetr $a \in \Delta$ nazywamy kanonicznym jeżeli $\varphi(a,\, b) = a + b$.

Twierdzenie 1.1.

W dowolnej grupie jenoparametrowej można wprowadzić parametr kanoniczny.

Dowód.

Niech $T_c = T_b \cdot T_a$ jest taka że $c = \varphi(a,\, b)$. Jeżeli nadamy mały przyrost $\Delta\, b$ parametrowi b wówczas parametr c zmieni się o małą wielkość $\Delta\, c$: $c + \Delta\, c = \varphi(a,\, b + \Delta b)$. W terminach przekśztaɫceń można to zapisać w postaci $T_{b+\Delta\, b} \cdot T_a = T_{c+\Delta\, c}$. Mnożąc to z prawej przez $T_c^{-1} = T_a^{-1} \cdot T_b^{-1}$ otrzymamy:

$$T_{b+\Delta\, b} \cdot T_b^{-1} = T_{c+\Delta\, c} \cdot T_c^{-1},$$

lub, w terminach φ,

$$\varphi(c^{-1},\, c + \Delta\, c) = \varphi(b^{-1},\, b + \Delta\, b).$$

Wprowadźmy oznaczenie $V(b) = \frac{\partial\,\varphi(a,b)}{\partial\, b}|_{a=b^{-1}}$. Ze wzoru Taylora mamy:

$$\varphi(b^{-1},\, b + \Delta\, b) = V(b)\Delta\, b + O(\Delta\, b^2).$$

Z gładkości funkcji wynika że $|\Delta\, c| = O(\Delta\, b)$. Zatem

$$V(c)\Delta\, c = V(b) + O(\Delta\, b^2).$$

Dzieląc obie części przez $\Delta\, b$ oraz stosując operację $\lim\limits_{\Delta\, b \to 0}(\cdot)$, otrzymamy zagadnienie początkowe

$$V(c)\frac{d\,c}{d\,b} = V(b), \qquad c|_{b=e} = a. \tag{1.2}$$

Zauważmy, że $V(e) = 1$ (wynika to z definicji V).

Wprowadźmy funkcję

$$\bar{a} = \tau(a) = \int_e^a V(s)\,d\,s. \tag{1.3}$$

Tak zdefiniowan funkcją będzie rozwiązaniem zagadnienia początkowego (1.2). Rzeczywiście, całkując równanie (1.2) na odcinku $< e,\, b >$ otrzymamy:

$$\int_e^b V[c(a,\, b)]\,\frac{\partial\, c}{\partial\, s}\,d\,s = \int_{\varphi(a,\, e)}^{\varphi(a,\, b)} V[\sigma]\ d\,\sigma =$$
$$= \int_a^c V[\sigma]\,d\,\sigma = \int_e^b V[s]\,d\,s.$$

Zatem, uwzględniając że

$$\int_a^c (\cdot) = \int_a^e (\cdot) + \int_e^c (\cdot),$$

otrzymujemy równość

$$\bar{c} = \int_e^c V(s)\,d\,s = \bar{a} + \bar{b} \equiv \int_e^a V(s)\,d\,s + \int_e^b V(s)\,d\,s.$$

Przykłady.

1. Grupa przesunęć w R^2

   $x' = x + a, \quad y' = y + 2\,a;$ a jest parametrem kanknocznym.

2. Grupa scalingowa działająca w R^1:

   $x' = ax, \quad a > 0$; parametr a nie jest kanoniczny. Ponieważ $a^{-1} = 1/a$ więc $V(b) = \frac{\partial a\, b}{\partial b}|_{a=1/b} = 1/b$. Zatem przejście do parametru kanonicznego dane jest wzorem

$$\tau(a) = \int_1^a \frac{d\,s}{s} = log(a).$$

   Wyrażzjąc a przez τ, otrzymamy: $x' = e^{\tau}\, x = \varphi(x;\, \tau)$, przy czym $\phi(\phi(x, \tau_1), \tau_2) = \phi(x; \tau_1 + \tau_2)$.

3. Obróty w R^2 (grupa $O(2)$)

$$x^* = x\, \cos a - y \sin a' \qquad y^* = x\, \sin a + y\, \cos a.$$

   Zadanie: wykazać że $O(2)$ jest grupą i że parametr a jest kanoniczny.

1.2. Przekształceńia infinitezymalne. Pierwsze fundamentalne twierdzenie S. Liego

Odtąd uważamy że parametr a jest parametrem kanonicznym. Zdefiniujmy funkcje

$$\xi^k(x) = \frac{\partial f^k(x;\, a)}{\partial\, a}|_{a=0}, \qquad k = 1, 2, ...m.$$

Funkcje te nazywamy *współrzędnymi generatora przekształceń infinitezymalnych* . Nazwa ta pochodzi stąd iż dla $|a| << 1$

$$\bar{x}^k = x^k + a\, \xi^k(x) + O(a^2).$$

Zachodzi

Twierdzenie 1.2.*(Pierwsze Fundamentalne Twierdzenie Liego). Funkcje $f^k(x;\, a)$ spełniają następujące zagadnienie początkowe:*

$$\frac{\partial\, f^k}{\partial\, a} = \xi^k(f), \qquad f^k|_{a=0} = x^k. \tag{1.4}$$

Odwrotnie, dla dowolnego zbioru funckji gładkucj $\{\xi^k\}_{k=1}^n$ zagadnienie początkowe (1.4)określa lokalną jednoparametrową grupę dla której funkcje $\{\xi^k\}_{k=1}^n$ tworzą zbiór współrzędnych generatora przekształceń infinitezymalnych.

<u>**Dowód.**</u> Zapiszemy równość $T_{a+\Delta\, a} = T_{\Delta\, a} \cdot T_a$ w terminach funkcji f^i (zakładamy że parametr jest kanoiczny):

$$f^i(x,\, a + \Delta\, a) = f^i(f(x,a), \Delta\, a).$$

Do obu stron równości zastosujemy wzór Taylora:

$$f^i(x, a + \Delta\, a) = f^i(x,a) + \frac{\partial\, f^i(x,\, a)}{\partial\, a} \Delta\, a + O(|\Delta\, a|^2),$$
$$f^i(f(x,a),\, \Delta\, a) = f^i(x,a) + \frac{\partial\, f^i(f)}{\partial\, \Delta\, a}|_{\Delta\, a=0}\, \Delta\, a + O(|\Delta\, a|^2).$$

Przywównując stronami, dizeląc przez $\Delta\, a$, a następnie stosując operację $\lim\limits_{\Delta\, a \to 0}(\cdot)$, otrzymamy równanie (1.4). Warunek poczatkowy jest spełniony ponieważ $T_0 = Id$.

Niech teraz dany jest zbiór gładkich funkcji $\{\xi^k(x)\}_{k=1}^n$. Układ (1.4) jest układem RRZ ze względu na a. Zgodnie z klasycznym twierdzeniem analizy, układ ten posiada jedyne rozwiązanie dla dostatecznie małych wartości parametru a. Wykażemy że jednoparametrowa rodzina przekształceń którą można skojarzyć z rozwiązanime powyższego problemu tworzy grupę. Do tego wystarczyłoby wykazać że $T_b \cdot T_a = T_{a+b}$, lub, w terminach f, że

$$f^i(f(x,a),\, b) = f^i(x, a + b).$$

Oznaczmy $f^i(f(x,a),\, b)$ przez $y^i(b)$, zaś $f^i(x, a+b)$ przez $z^i(b)$. Różniczkując te funkcje otrzymamy:

$$\frac{\partial\, y^i}{\partial\, b} = \frac{\partial\, f^i(f,b)}{\partial\, b} = \xi(y), \qquad f^i(f,0) = y^i(0) = f^i(x,a),$$

oraz

$$\frac{\partial\, z^i}{\partial\, b} = \frac{\partial\, f^i(x,a+b)}{\partial\, b} = \xi(z), \qquad z^i(0) = f^i(x,a).$$

Zatem funkcje te spełniają taki sam układ równań zwyczajnych oraz jednakowe dane początkowe. Ze standardowego twierdzenia od jednoznaczności rozwiązań wynika teza.

Zadania do rozdziałów 2,3

1. Spradzić, które z poniższych przekształceń tworzą 1-parametrową grupę Liego:

   (a) $x^* = x - a\, y, \quad y^* = y + a\, x,$

   (b) $x^* = x - a^2, \quad y^* = y,$

   (c) $x^* = x + a, \quad y^* = \frac{x+y}{x+a}.$

2. Rozpatrzmy 1-parametrową rodzinę przekształceń

$$x' = \sqrt{1-a^2}\, x - a\, y, \qquad y' = a\, x + \sqrt{1-a^2}\, y.$$

- Wykazać że przekształcenia te tworzą grupę 1-parametrową oraz znaleźć funkcję $\varphi(a, b)$;
- Znaleźć parametr kanoniczny oraz $\xi(x)$.

Rozpatrzmy 1-parametrową rodzinę przekształceń

$$x' = x + a, \qquad y' = \frac{x\, y}{x + a}.$$

- Wykazać że przekształcenia te tworzą grupę 1-parametrową oraz znaleźć funkcję $\varphi(a, b)$;
- Znaleźć parametr kanoniczny oraz $\xi(x)$.
- scałkować równanie Liego.

3. Rozpatrzmy 1-parametrową rodzinę przekształceń

$$x' = x - a\, t, \quad t' = t, \quad u' = u\, e^{a\, x/w - a^2\, t/4}.$$

- Wykazać że przekształcenia te tworzą grupę 1-parametrową oraz znaleźć funkcję $\varphi(a, b)$;
- Znaleźć parametr kanoniczny oraz $\xi(x)$.
- scałkować równanie Liego.

4. Całkując równanie Liego, znaleźć 1-parametrowe grupy przekształceń odpowiadające nast'epującym gemeratorom przekształceń infinitezymalnych: grup jednoparametrowych działjących w R^2:

- $\xi^1 = x, \quad \xi^2 = y;$
- $\xi^1 = x, \quad \xi^2 = -y;$
- $\xi^1 = x^2, \quad \xi^2 = y^2;$
- $\xi^1 = -y, \quad \xi^2 = x.$

1.3. Przekształcenie wykładnicze

Definicja 1.4. *Generatorem przekształceń infinitezymalnych (lub infinitezymalnym operatorem - bf IFO) nazywamy operator*

$$\hat{X} = \sum_{k=1}^{n} \xi^k(x) \frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{1.5}$$

Zgodnie z pierwszym twierdzeniem Liego, każdemu zbiorowi gładkich funkcji $\{\xi^k(x)\}_{k=1}^n$, zadanych na zbiorze otwartym $U \in R^n$ odpowiada lokalna 1-parametrowa ciągła grupa przekształceń. Rozwiązania układu równań (1.4) często kojarzą z odwzorowaniem

$$U \ni x \to \exp[a\,\hat{X}]\,x \in R^n.$$

Będziemy utożsamiać $\exp a\,\hat{X}\,[x]$ z wektor-funkcją $\mathbf{f}(x;\,a) = \{f^k(x;\,a)\}_{k=1}^n$. Zakładając że a jest parametrem kanonicznym, możemy sformułować kilka własności odwzorowania $\exp[a\,\hat{X}]$, które formalnie się pokrywają z odpowiednimi własnościami funkcji wykładniczej:

- $$\exp[a\,\hat{X}]\,\exp[b\,\hat{X}]\,x = \exp[(a+b)\,\hat{X}]]\,x = \exp[b\,\hat{X}]\,\exp[a\,\hat{X}]\,x; \tag{1.6}$$
- $$\exp[0\,\hat{X}]\,x = x; \tag{1.7}$$
- $$\frac{d}{d\,a}\Big(\exp[a\,\hat{X}]\,x\Big) = \hat{X}\left[\exp\left\{a\,\hat{X}\right\}\,x\right]. \tag{1.8}$$

Zachodzi

Twierdzenie 1.3. *Jednoparametrowa grupa przekształceń Liego z generatorem* $\hat{X}(x) = \sum_{k=1}^n \xi^k(x)\frac{\partial}{\partial x^k}$ *jest równoważna z odwzorowaniem*

$$\bar{x} = e^{a\,\hat{X}}x = x + a\,\hat{X}\,x + \frac{a^2}{2!}\,\hat{X}^2\,x + ... = \left[1 + a\,\hat{X} + \frac{a^2}{2!}\,\hat{X}^2 + ...\right]\,x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k!}\hat{X}^k\,x. \tag{1.9}$$

<u>Dowód.</u> Wprowadźmy oznaczenia:

$$\hat{X}(x) = \sum_{m=1}^{n} \xi^k(x) \frac{\partial}{\partial\,x^m}$$

i

$$\hat{X}[\bar{x}^k] = \sum_{m=1}^{n} \xi^m(\bar{x}) \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial\,\bar{x}^m},$$

gdzie $\bar{x}^k = \mathbf{f^k}(x,\, a)$. Rozkładając to wyrażenie w szereg Taylora względem a otrzymamy

$$\bar{x}^k = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{m!} \left(\frac{\partial^m \bar{x}^k}{\partial\, a^m} \right) |_{a=0}.$$

Dla dowolnej funkcji różniczkowalnej $F(\bar{x})$

$$\frac{\partial}{\partial\, a} F(\bar{x}) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial\, F(\bar{x})}{\partial\, \bar{x}^m} \frac{\partial\, \bar{x}^m}{\partial\, a} = \sum_{m=1}^{n} \xi^m(\bar{x}) \frac{\partial\, F(\bar{x})}{\partial \bar{x}^m} = \hat{X}[\bar{x}] F[\bar{x}].$$

Zatem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{x}}{\partial\, a} &= \hat{X}[\bar{x}]\, \bar{x}, \\
\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial\, a^2} = \frac{\partial}{\partial\, a} \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial\, a} \right) &= \hat{X}[\bar{x}] \hat{X}[\bar{x}]\, \bar{x}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{\partial^m \bar{x}}{\partial\, a^m} &= \hat{X}^m[\bar{x}]\, \bar{x}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Odpowiednio

$$\frac{\partial^m \bar{x}}{\partial\, a^m} |_{a=0} = \hat{X}^m[x]\, x, \qquad m = 1,\, 2,\, \ldots.$$

I stąd mamy tezę.

Przykłady.

- Niech $n = 1$, $\hat{X} = \frac{\partial}{\partial\, x}$. Zgodnie ze wzorem (1.9)

  $$e^{a\, \partial_x}\, x = x + a,$$

  gdzie $\partial_x = \frac{\partial}{\partial\, x}$.

- Rozpatrzmy operator

  $$\hat{X} = \left(\sum_{j=1}^{n} A_{i\, j}\, x^j \right) \frac{\partial}{\partial\, x^i},$$

  działający w przestrzeni R^n, gdzie $A = (A_{i,\, j})$ $-$ macierz o stałych współczynnikach. Wówczas

  $$\exp\left(a\, \hat{X} \right)\, x = e^{a\, A} x,$$

  gdzie

  $$e^{a\, A} = I + a\, A + \frac{a^2}{2!}\, A^2 + \ldots.$$

1.4. Przekształcenie IFO przy nieosobliwej zamianie zmiennych

Niech $\varphi : R^n \to R^n$ - dyfeomorfizm. Określa on nieosobliwą zamianę zmiennych $y^i = \varphi^i(x)$. Jeżeli na R^n działa grupa 1-parametrowa T_a:

$$\bar{x}^i = f^i(x,\, a),$$

wówczas φ indukuje grupę jednoparametrową działającą na zmiennych yi zgodnie ze wzorem

$$\bar{y}^i = \varphi^i\left(f(x,\, a)\right) \;\cong\; y^i + a\,\eta^i(y) + O(a^2).$$

Grupa ta jest, oczywiście, izomorficzną z T_a.

Lemat 1.1. *Zachodzi wzór*

$$\eta^i(y) = \hat{X}[\varphi^i][\varphi^{-1}(y)]. \tag{1.10}$$

Dowód.

$$\eta^i(y) = \frac{\partial\,\varphi^i\left(f(x,\, a)\right)}{\partial\, a}|_{a=0} = \frac{\partial\,\varphi^i\,(y)}{\partial\, y^j}|_{y=f(x,0)} \cdot \frac{\partial\, f^j}{\partial\, a}|_{a=0} = \sum_{j=1}^{n} \xi^j(x)\frac{\partial \varphi^i(x)}{\partial\, x^j} = \hat{X}[\varphi^i][\varphi^{-1}(y)].$$

zatem przy zamianie zmiennych **IFO** zmienia się w następujący sposób:

$$\hat{X} = \sum_{k=1}^{n} \eta^k[y]\frac{\partial}{\partial\, y^k}. \tag{1.11}$$

Przykład.

- Niech $\hat{X} = -y\frac{\partial}{\partial\, x} + x\,\frac{\partial}{\partial\, y}$; $\quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\quad \theta = \arctan\frac{y}{x}$. Wówczas

$$\hat{X} = \hat{X}[r]\frac{\partial}{\partial\, r} + \hat{X}[\theta]\frac{\partial}{\partial\, \theta} = \left\{-y\,\frac{x}{r} + x\,\frac{y}{r}\right\}\frac{\partial}{\partial\, r} + \left\{\frac{\frac{y^2+x^2}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}}\right\}\frac{\partial}{\partial\, \theta} = \frac{\partial}{\partial\, \theta}.$$

Definicja 1.5. *Będziemy mówić iż zmienne $y^i = \varphi^i(x)$ są zmiennymi kanonicznymi dla* **IFO** *$\hat{X}(x)$ jeżeli*

$$\hat{X}(y^j)\frac{\partial}{\partial\, y^j} = \frac{\partial}{\partial\, y^1}$$

(nie jest oczywiście istotne, którą ze współrzędnych oznaczymy jako y^1.)

A zatem, zmienne biegunowe są zmiennymi kanonicznymi dla generatora grupy obrotów.

W ogólnym przypadku zmienne kanoniczne są określone układem równań

$$\hat{X}(y_1) = 1, \qquad \hat{X}(y_2) = ... = \hat{X}(y_n) = 0.$$

Uwaga. Procedura przejścia do zmiennych kanonicznych często jest nazywana *prostowaniem* pola wektorowego $\vec{\xi}(x)$.

1.5. Niezmienniki grupy jednopametrowej

1.5.1. Niezmienniczość funkcji

Definicja 1.6.*Funkcja* $F : R^n \supset U \to R^1$ *nazywa się niezmiennikiem grupy* T_a *jeżeli* $\forall\, a \in \Delta\ \forall\, x \in U$

$$F\,[T_a\, x] = F[x]. \tag{1.12}$$

Działanie T_a na funkcję F oznaczamy jako

$$T_a F[x] := F\,[T_a\, x] = F[\bar{x}].$$

Twierdzenie 1.4.*Na to by* $T_a F = F$ *potrzeba i wystarcza by*

$$\hat{X} F[x] = 0, \tag{1.13}$$

gdie $\hat{X}$ - **IFO** *grupy* T_a.

<u>**Dowód.**</u> Konieczność wynika wprost z definicji **IFO**: skoro $T_a F = F$ więc $T_a F$ nie zalezy od parametru a, zatem

$$0 = \frac{\partial}{\partial a} T_a F|_{a=0} = \frac{\partial F}{\partial x^k}\, \xi^k(x) \equiv \hat{X}\,[F(x)]\,.$$

W drugą stronę: jeżeli $\hat{X}\,[F(x)] = 0$ to również

$$\hat{X}[\bar{x}]\,[F(\bar{x})] = 0 = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(\bar{x}) \frac{\partial}{\partial\,\bar{x}^i}\, F[\bar{x}] = 0.$$

Zauważmy że dla przekształceń skończonych mamy wzór

$$\frac{\partial}{\partial a} F[\bar{x}] = \frac{\partial F}{\partial\,\bar{x}^i} \frac{\partial\,\bar{x}^i}{\partial a} = \xi^i(\bar{x}) \frac{\partial}{\partial\,\bar{x}^i}\, F[\bar{x}] = \hat{X}[\bar{x}]\, F[\bar{x}].$$

Skoro $\hat{X}[\bar{x}]\,[F(\bar{x})] = 0$, więc z powyższego wzoru wynika iż $F(\bar{x})$ nie zależey od a, i $F[\bar{x}] = F[x]$.

Kryterium niezmienniczości funkcji określa równanie cząstkowe (1.13). Ciekawe jest również pytanie odwrotne: dla jakich funkcji będzie zachodzić równanie (1.13)? Odpowiedź na to pytanie daje teoria niemienników grup.

Definicja 1.7. *Niezmiennikiem grupy przekształceń T_a z generatorem $\hat{X}[x] = \sum_{k=1}^{n} \xi^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k}$ nazywa się każda relacja $I(x_1, ...x_n) = C$ dla której*

$$\hat{X}(x)\, I(x_1, ...x_n) = 0. \tag{1.14}$$

Z teorii równań kwaziliniowych wiadomo że równanie (1.14) ma dokładnie $n-1$ całek $\{I_k(x) = C_k\}_{k=1}^{n-1}$ takich że, po-pierwsze, każda funkcja I_k spełnia (1.14), a, po-drugie, $\exists\, \Omega \subset R^n$:

$$rank\, \frac{\partial\,(I_1, ...I_{n-1})}{\partial\,(x_1, ...x_n)}|_{x \in \Omega} = n-1.$$

Zachodzi

Twierdzenie 1.5.

Jeżeli $F(x)$ jest niezmiennicza względem T_a z generatorem $\hat{X}[x] = \sum_{k=1}^{n} \xi^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k}$, zaś $(I_1, ...I_{n-1})$ jest zbiorem nieazleżnych niezmienników, wówczas $\exists\ \Phi$:

$$F(x) = \Phi(I_1, ...I_{n-1})$$

.

Przykłady

1. $x' = x + a; \qquad y' = y + 2\,a.$

   Grupie jednoparemetrowej odpowiada **IFO**

   $$\hat{X} = \frac{\partial}{\partial\, x} + 2\frac{\partial}{\partial\, y}.$$

   Niezmiennik operatora $\hat{X}$ ma postać $2\,x - y = C$. Dlatego każda funkcja gładka postaci $F(2\,x - y)$ jest niezmiennicza względem tej grupy 1-parametrowej.

2. Rozpatrzmy grupę G_a^2

$$x' = e^a x; \qquad y' = e^{3a} y, \qquad z' = e^{-2\,a}\, z.$$

Grupie jednoparemetrowej odpowiada **IFO**

$$\hat{X} = x\frac{\partial}{\partial\, x} + 3\, y\frac{\partial}{\partial\, y} - 2\, z\frac{\partial}{\partial\, z}.$$

Rozwiązując równanie $\hat{X}\, J = 0$ przedstawione w postaci charakterystycznej

$$\frac{d\,x}{x} = \frac{d\,y}{3\,y} = -\frac{d\,z}{2\,z} = \frac{d\,J}{0},$$

otrzymujemy dwie cniezależne całki pierwsze:

$$\frac{y}{x^3} = C_1, \qquad x^2\, z = C_2.$$

Zatem każda gładka funkcja $j = \Phi(\frac{y}{x^3},\, x^2\, z)$ jest niezmiennicza względem grupy G_a^2.

1.6. Niezmienniczość rozmaitości algebraicznej

Definicja 1.8.*Mówimy że zbiór*

$$M = \{x \in\, R^n\, : \Psi^\nu(x) = 0, \nu = 1, 2, ...s < n\}$$

jest rozmaitością algebraiczną jeżeli

- $\Psi^\nu(x) \in\, C^k(R^n,\; R)$;
- $rank\frac{\partial\left(\Psi^1, \Psi^2, ...\Psi^s\right)}{\partial(x_1, x_2, ...x_n)}|_M = s = const.$

Zachodzi

Twierdzenie 1.6.*Istnieje zamiana zmiennych $y = \varphi(x)$ taka że w nowych zmiennych M zadane jest układem równań $y_1 = y_2 = ... = y_s = 0$.*

<u>**Dowód.**</u>

Dla każdego $x \in M$ można wskazać zbiór zmiennych $x_{j_1},\, x_{j_2}, ...x_{j_s}$ takich, że w pewmym otoczeniu otwartym $U \in\, R^n$ zawierającym x wektory

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\,\Psi_1}{\partial\, x_{j_1}} \\ \frac{\partial\,\Psi_2}{\partial\, x_{j_1}} \\ \cdots\cdots \\ \frac{\partial\,\Psi_s}{\partial\, x_{j_1}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial\,\Psi_1}{\partial\, x_{j_2}} \\ \frac{\partial\,\Psi_2}{\partial\, x_{j_2}} \\ \cdots\cdots \\ \frac{\partial\,\Psi_s}{\partial\, x_{j_2}} \end{pmatrix}, \cdots\cdots \begin{pmatrix} \frac{\partial\,\Psi_1}{\partial\, x_{j_s}} \\ \frac{\partial\,\Psi_2}{\partial\, x_{j_s}} \\ \cdots\cdots \\ \frac{\partial\,\Psi_s}{\partial\, x_{j_s}} \end{pmatrix}$$

są liniowo niezależne. Dokonajmy zamiany zmiennych

$$\bar{x}_1 = x_{j_1},\ \ \bar{x}_2 = x_{j_2}, ...\bar{x}_s = x_{j_s},\ \ \bar{x}_{s+1} = x_{k_1}, ...\bar{x}_n = x_{k_{n-s}},$$

gdzie $\left(x_{k_1}, ...x_{k_{n-s}}\right)$- dopełnienie zbioru współrzędnych $(x_{j_1}, ...x_{j_n})$.

Zdefiniujmy zmienne $y_1, ...y_n$ w następujący sposób:

$$y_k = \tilde{\Psi}_k\left(\bar{x}_1, ...\bar{x}_s,\ \bar{x}_{s+1},\ \bar{x}_n\right),\ \ 1 \le\ k\ \le\ s, \qquad y_{s+m} = \bar{x}_{s+m},\ \ 1 \le\ m, \le\ n-s,$$

gdzie $\tilde{\Psi}_k\left(\bar{x}_1, ...\bar{x}_s,\ \bar{x}_{s+1},\ \bar{x}_n\right) = \Psi_k\left(x_1, ...x_n\right)$. W nowych zmiennych

$$M = \left\{y \in\ R^n\ : y_1 = y_2 = ... = y_s = 0\right\}.$$

Łatwo widać że

$$\det\ \frac{\partial\left(y_1,\ y_2, ...y_n\right)}{\partial\left(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ ...\bar{x}_n\right)} = \det\ \frac{\partial\left(\tilde{\Psi}_1...., \tilde{\Psi}_s\right)}{\partial\left(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ ...\bar{x}_s\right)} \ne 0.$$

Zatem $\bar{x}\ \to\ y$ jest lokalnym dyfeomorfizmem.

Definicja 1.9. *Rozmaitość algebraiczna M nazywa się niezmienniczą względem działania jednoparametrowej lokalnej grupy Liego T_a, jeżeli $\forall\ x \in\ M$ oraz $\forall\ a \in\ \triangle\ T_a\, x\, in\, M$.*

Twierdzenie 1.7. *Na to by regularnie zadana rozmaitość algebraiczna M była niezmiennicza względem T_a z generatorem $\hat{X}$, potrzeba i wystarcza by*

$$\hat{X}\,\Psi^\nu(x)\Big|_M = 0. \tag{1.15}$$

<u>Dowód.</u>

Konieczność: Jeżeli $\forall\ a \in \Delta\ \Psi^\nu\left(T_a\, x\right)$, to

$$0 = \frac{\partial}{\partial\, a}\Psi^\nu[T_a\, x]\Big|_{a=0} = \frac{\partial\,\Psi^\nu}{\partial\, y_j}\Big|_{y_j=f_j(x,0)=x_j} \cdot\ \frac{\partial\, f_j(x,a)}{\partial\, a}\Big|_{a=0} = \xi_j(x)\frac{\partial\,\Psi^\nu}{\partial\, x_j}\Big|_{x\in\, M} = \hat{X}\,\Psi^\nu(x)\Big|_M.$$

Dostateczność. Bez utraty ogólności możemy założyć że rozmaitość M zadana jest (lokalnie) za pomocą układu równań

$$x^\nu = 0, \qquad \nu = 1, 2, ...s \tag{1.16}$$

(p. poprzednie twierdzenie). Jeżeli $\hat{X} = \xi(x)\frac{\partial}{\partial\, x^i}$ to równość $0 = \hat{X}\Psi^\nu\Big|_{x^\mu=0}$ przybiera postać

$$\xi^i(x)\frac{\partial\, x^\nu}{\partial\, x^i}\Big|_M = \xi^i\,\delta_{\nu\, i}\Big|_M = \xi^\nu\left(0, ...0,\ x^{s+1},\ ...x^n\right) = 0.$$

Rozpatrzmy układ równań Liego na rozmaitości M:

$$\begin{cases} \frac{\partial\,\bar{x}^{\nu}}{\partial\,a} = \xi^{\nu}(\bar{x}_1, ...\bar{x}_n), \quad \bar{x}^{\nu}(0) = 0, \quad \nu = 1, 2, ..., s, \\ \frac{\partial\,\bar{x}^{s+\mu}}{\partial\,a} = \xi^{s+\mu}(\bar{x}_1, ...\bar{x}_n), \quad \bar{x}^{s+\mu}(0) = x^{s+\mu}, \quad \mu = 1, 2, ..., n-s, \end{cases} \tag{1.17}$$

Pierwsze s równań spełniają zerowy warunek początkowy i, ponad to, przy $a = 0$

$$\xi^{\nu}|_{a=0} = \xi^{\nu}(0, ..., 0, \bar{x}^{s+1}, ...\bar{x}^{n}) = 0.$$

Dlatego rozwiązania pierwszych s równań będą zerowe:

$$\bar{x}^{\nu} = f^{\nu}(x,\,a) = 0, \quad \forall x \in\, M, \;\; \forall\, a \in \Delta,$$

a to oznacza że $\vec{\bar{x}} = (0, ..., 0, \bar{x}^{s+1}, ...\bar{x}^{n}) \,\in\, M$.

Dyskusja.

Spróbujmy odpowiedzieć na pytanie, czym się różni warunek niezmienniczości funkcji od warunku niezmienniczości rozmaitości algebraicznej, innymi słowy, czy warunek $|_{x\;M}$ jest istotny? Rozpatrzmy jednoparametrową rodzinę powierzchni

$$F(x) = C, \quad x \,\in R^n, \quad C \,\in R^1.$$

Zbiór

$$\Phi_C = \{x \,\in\, R^n : F(x) = C\}$$

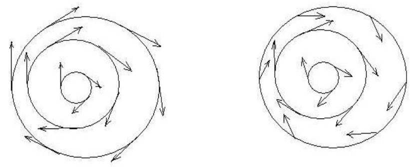
(zwany poziomicą funkcji F) składa się z punktów $x \,\in R$ na których funkcja F przybiera stałą wartość. Geometrycznie niezmienniczo"xć funkcji względem $\hat{X} = \sum_{k=1}^{n} \xi^k(x) \frac{\partial}{\partial\,x^k}$ oznacza że pole wektorowe $\xi^k(x)$ jest styczne do poziomicy w każdym punkcie i, co za tym idzie, krzywa sparametryzowana $\bar{x}^k(a)$, będąca rozwiązaniem układu równań Liego

$$\frac{d\,\bar{x}^k}{d\,a} = \xi^k(\bar{x}), \quad \bar{x}^k(0) = x^k, \quad k = 1, 2, ...n, \quad .$$

całkowicie leży w Φ_C wtedy i tylko wtedy gdy $\left\{x^k\right\}_{k=1}^{n} \,\in\, \Phi_C$ (rys. 1.1)

1.7. Algebra Liego generatorów infinitezymalnych

A więc, sens niezmienniczości rozmaitości algebraicznej wyraża się w tym że pole wektorowe skojarzone z generatorem grupy jednoparametrowje $\hat{X}$ jest polem stycznym do rozmaitości w każdym jej punkcie. W związku z taką interpretacją narzuca się następujące pytanie: jeżeli zadana rozmaitość dopuszcza więcej niż jedną grupę jednoparametrową, to czy są jakieś związki pomiędzy generatorami tych grup? Odpowiedz na to pytanie wymaga wprowadzenie pewnego ważnego pojęcia w zbiorze operatorów rzędu pierwszego.



Rys. 1.1: Funkcja $F(x)$ jest niezmiennicza względem działania grupy G_a gdy pole wektorowe $\hat{X}$ jest styczne do każdej poziomicy tej funkcji (lewy rysunek). Rozmaitość algebraiczna $F(x) = C$ jest niezmiennicza względem działania grupy G_a gdy pole wektorowe $\hat{X}$ jest styczne tylko do poziomicy określonej konkretną stałą C (prawy rysunek).

Definicja 1.10._Nawiasem Liego (komutatorem) operatorów_ $\hat{X} = \sum_{k=1}^{n} \xi^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k}$ _i_ $\hat{Y} = \sum_{k=1}^{n} \eta^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k}$ _nazywa się operator_

$$\hat{Z} = [\hat{X}, \hat{Y}] = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left\{ \xi^j(x) \frac{\partial \eta^k(x)}{\partial x^j} - \eta^j(x) \frac{\partial \xi^k(x)}{\partial x^j} \right\} \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{1.18}$$

Tak zdefiniowana operacją, domknięta w zbiorze gładkich pól wektorowych (generatorów grup jednoparametrowych), ma następunące własności, wynikające przeważnie wprost z definicji:

1. skośna symetria:

$$[\hat{X}, \hat{Y}] = -[\hat{Y}, \hat{X}]$$

2. Biliniowość:

$$[\alpha_1 \hat{X}_1 + \alpha_2 \hat{X}_2, \hat{Y}] = \alpha_1 [\hat{X}_1, \hat{Y}] + \alpha_2 [\hat{X}_2, \hat{Y}].$$

3. Tożsamość Jacobiego:

$$[\hat{Z}, [\hat{X}, \hat{Y}]] + [\hat{X}, [\hat{Y}, \hat{Z}]] + [\hat{Y}, [\hat{Z}, \hat{X}]] = 0.$$

Jeżeli zbiór generatorów $AG = \{\hat{X}_1, \hat{X}_2, ...\hat{X}_m, \}$ jest domknięty ze względu na dziełanie $[\cdot\,, \cdot]$ w tym sensie, że

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k \hat{X}_k,$$

wówczas zbiór AG nazywa się skończeniewymiarową algebrą Liego, natomiast stałe c_{ij}^k - stałymi strukturowymi.

Zachodzi

Twierdzenie 1.8. *Niech pola $\hat{X}$ i $\hat{Y}$ są generatorami jednoparametrowych grup niezmienniczości regularnie zadanej rozmaitości algebraicznej M. Wówczas $[\hat{X}, \hat{Y}]$ jest również generatorem grupy dopuszczanej przez tę rozmaitość.*

Dowód.

Okręślmy jednoparemetrową rodzinę przekształceń rozmaitości M w siebie za pomocą wzoru

$$\Psi(x;\, a) = e^{\sqrt{a}\,\hat{X}}\, e^{\sqrt{a}\,\hat{Y}}\, e^{-\sqrt{a}\,\hat{X}}\, e^{-\sqrt{a}\,\hat{Y}}[x] \tag{1.19}$$

Niżej pokażemy że dla małych a przekształcenie to może być przedstawione w postaci

$$\Psi(x;\, a) = x + a\,\eta(x) + O(|a|^{3/2})$$

przy czym pole $\eta(x)$ jest styczne do M. Z tego, na podstawie twierdzenia Liego, wynika istnienie lokalnej grupy 1-parametrowej goenerowanej przez pole $\eta(x)$.

Pole wektorowe $\sum_{k=1}^{n} \eta^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k}$ uzyskamy rozkładając operatory figurujące w prawej stronie (1.19) w szereg Taylora oraz grupując odpowiednie wyrazy:

$$\begin{aligned}
&\left(e^{\sqrt{a}\,\hat{X}}\, e^{\sqrt{a}\,\hat{Y}}\, e^{-\sqrt{a}\,\hat{X}}\, e^{-\sqrt{a}\,\hat{Y}}\right)[x] = \\
&= \left[\left(1 + \sqrt{a}\,\hat{X} + \frac{a}{2}\hat{X}^2\right)\left(1 + \sqrt{a}\,\hat{Y} + \frac{a}{2}\hat{Y}^2\right)\right] \cdot \left[\left(1 - \sqrt{a}\,\hat{X} + \frac{a}{2}\hat{X}^2\right)\left(1 - \sqrt{a}\,\hat{Y} + \frac{a}{2}\hat{Y}^2\right)\right][x] \\
&= \left(1 + \sqrt{a}\,\hat{X} + \frac{a}{2}\hat{X}^2 + \sqrt{a}\,\hat{Y} + a\,\hat{X}\,\hat{Y} + \frac{a}{2}\hat{Y}^2 + O(|a|^{3/2})\right) \cdot \\
&\left(1 - \sqrt{a}\,\hat{X} + \frac{a}{2}\hat{X}^2 - \sqrt{a}\,\hat{Y} + a\,\hat{X}\,\hat{Y} + \frac{a}{2}\hat{Y}^2 + O(|a|^{3/2})\right)[x] = \\
&\left[1 + \sqrt{a}\left(\hat{X} + \hat{Y}\right) + \frac{a}{2}\left(\hat{X}^2 + 2\,\hat{X}\,\hat{Y} + \hat{Y}^2\right)\right] \cdot \\
&\left[1 - \sqrt{a}\left(\hat{X} + \hat{Y}\right) + \frac{a}{2}\left(\hat{X}^2 + 2\,\hat{X}\,\hat{Y} + \hat{Y}^2\right)\right][x] + O\left(|a|^{3/2}\right) = \\
&\left[1 - a\left(\hat{X} + \hat{Y}\right)\left(\hat{X} + \hat{Y}\right) + a\left(\hat{X}^2 + 2\,\hat{X}\,\hat{Y} + \hat{Y}^2\right)\right][x] + O\left(|a|^{3/2}\right) = \\
&\left[1 - a\left(\hat{X}^2 + \hat{Y}^2 + \hat{X}\,\hat{Y} + \hat{Y}\,\hat{X}\right) + a\left(\hat{X}^2 + 2\,\hat{X}\,\hat{Y} + \hat{Y}^2\right)\right][x] + O\left(|a|^{3/2}\right) = \\
&\left\{1 + a\left(\hat{X}\,\hat{Y} - \hat{X}\,\hat{Y}\right)\right\}[x] + O\left(|a|^{3/2}\right) = x + a\,\eta(x) + O\left(|a|^{3/2}\right).
\end{aligned}$$

Styczność pola $\eta(x)$ wynika z tego że prawa strona wzoru (1.19)określa superpozycję działania 1-parametrowych grup niezmienniczości powierzchni M.

1.8. Grupy dopuszczalne przez równania różniczkowe

Zakładamy że grupa G_a działa na przestrzeni R^{n+m}, której elementami są zmienne niezależne x^1, $x^2, ...x^n$ oraz funkcje $u^1, ...u^m$ zmiennych x^k.Grupa G_a działa w tej przestrzeni następująco:

$$\bar{x}^k = f^k(x, u;\, a) = x^k + \, a\,\xi^k(x,\, u) + O(a^2), \;\; k = 1, ...n, \tag{1.20}$$

$$\bar{u}^\alpha = g^\alpha(x,\, u;\, a) = u^\alpha + a\,\eta^\alpha(x,\, u) + O(a^2), \;\; \alpha = 1, ...m, \tag{1.21}$$

gdie f^k, g^α są trzy razy różniczkowalne względem zmiennych x, u oraz analityczne względem a,

$$\xi^k(x,\, u) = \left(\partial f^k/\partial\, a\right)|_{a=0},$$

$$\eta^\alpha(x,\, u) = (\partial g^\alpha/\partial\, a)\,|_{a=0}.$$

Rozpatrzmy układ równań

$$f^\sigma(x,\, u,\, \partial\, u, ...\partial^r\, u) = 0, \qquad \sigma = 1, 2, ...s, \tag{1.22}$$

gdzie $\partial^k\, u$ oznacza zbiór wszystkich pochodnych cząstkowych funkcji u rzędu k.

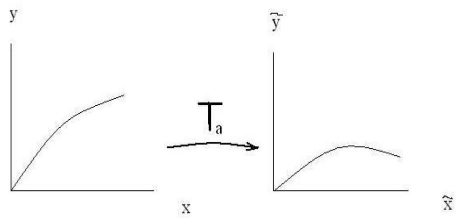
Definicja 1.11. *Mówimy że 1-parametrowa grupa przekształceń $\{G_a\}_{a\in\Delta}$ zadana na zbiorze zmiennych zależnych i niezależnych $(x,\, u) \in R^{n+m}$ za pomocą wzorów (1.20)–(1.21) jest grupą symetrii układu (1.22), jeżeli odwzorowuje ona każde rozwiązanie gładkie układu (1.22) w jakieś inne rozwiązanie tego układu.*

Usiłując zrozumieć, co taka definicja oznacza, możemy zacząć od utożsamiania odwzorowania $u = \varphi(x)$ z jego wykresem:

$$\Gamma_\varphi = \{(x,\, \varphi(x)), \quad x \in \Omega \in R^n\}\,,$$

gdzie $R^n \supset \Omega$ jest zbiorem zawartym w dziedzinie naturalnej odwzorowania φ. I teraz, w wyniku działania grupy zbiór ten przejdzie w następujący zbiór:

$$T_a \circ \Gamma_\varphi = \left\{(\bar{x},\, \bar{u}) = [f(x,\, u;\, a), g(x,\, u;\, a)]|_{(x,\, u=\varphi(x))\, \in \Gamma_\varphi}\right\}$$



Uwaga. Może się zdarzyć tak, że $T_a \circ \Gamma_\varphi$ nie będzie wykresem funkcji prawostronnie jednozmacznej dla dowolnej wartości $a \in \triangle$.. Ale, ponieważ G_a działa w sposób gładki i wartość $a = 0$ odpowiada odwzorowaniu tożsamościowemu, możemy stwierdzić, że istnieje $\tilde{\Delta} \subset \Delta$ takie że $\forall\ a \in \tilde{\Delta}$ zbiór $(\tilde{x},\ \tilde{u})$ wciąż będzie wykresem pewnej funkcji.

Przykład 1. $n = m = 1$,

$$(\bar{x},\ \bar{u}) = (x \cos\, a - u \sin\, a,\ x\, \sin\, a + u\, \cos\, a)\,.$$

d ziałanie sprowadza się tu do obrotu funkcji $u = \varphi(x)$ o kąt a dookoła początku współrzędnych. Jeśli więc a nie jest dużą liczbą, to krzywa uzyskana w wyniku działania grupy wciąż będzie wykresem pewnej funkcji.

Jeżeli zastosujemy, naprzykład grupę obrotów do funkcji liniowej $u = \varphi(x) = A\,x + B$, to wykres

$$\Gamma_\varphi = (x,\ A\,x + B)\,,$$

przekształci się w zbiór

$$(\bar{x},\ \bar{u}) = (x \cos\, a - (A\,x + B) \sin\, a,\ x\, \sin\, a + (A\,x + B)\, \cos\, a)$$

Z rowności $\bar{x} = x \cos\, a - (A\,x + B) \sin\, a$ wynika że

$$x = \frac{\bar{x} + B\, \sin\, a}{\cos\, a - A\, \sin\, a}.$$

Zatem

$$\bar{u} = \tilde{\varphi}(\bar{x}) = \frac{\bar{x} + B\, \sin\, a}{\cos\, a - A\, \sin\, a}\,(\sin\, a + A\, \cos\, a) + B\, \cos\, a,$$

czyli

$$\tilde{\varphi}(\bar{x}) = \bar{x}\,\frac{\sin\, a + A\, \cos\, a}{\cos\, a - A\, \sin\, a} + B\, \left(\sin\, a\, \frac{\sin\, a + A\, \cos\, a}{\cos\, a - A\, \sin\, a} + \cos\, a\right)$$

jest wciąż liniową funkcją. Jest ona dobrze określona dla tych wartości a dla których $\cos\, a - A\, \sin\, a \neq 0$.

Stwierdzenie. *Równanie $u_{xx} = 0$ jest niezmiennicze względem grupy obrotów.*

Dowód. . Ogólnym rozwiązaniem równania $u'' = 0$ jest funkcja $u = A\,x + B$. Obroty odwzorowują tę funkcję w funkcję

$$\tilde{u}(\tilde{x}) = \tilde{A}\,\tilde{x} + \tilde{B} = \tilde{x}\frac{\sin\, a + A\, \cos\, a}{\cos\, a - A\, \sin\, a} + \frac{B}{\cos\, a - A\, \sin\, a}.$$

Zauważmy że funkcja ta spełnia równanie

$$\tilde{u}_{\tilde{x}\,\tilde{x}} = 0,$$

czyli równanie wyjściowe zapisane w nowych zmiennych.

Przykład 2. Jeżel $\bar{x} = f(x,\,a)$ $(f_u = 0)$, wówczas procedura uzyskania $\tilde{u}(\tilde{x})$ jest prostsza. Rozpatrzmy przekształcenie

$$\bar{x} = x + 2\,a\,t, \quad \bar{t} = t, \quad \bar{u} = e^{-a\,x - a^2\,t} \tag{1.23}$$

Ćwiczenie. *Wykazać że jest to grupa jednoparametrowa.*

Nasze cele są następujące.

- Po-pierwsze, mając zadaną funkcję $u = f(t,\,x)$, chcemy określić funkcję $\bar{u} = \tilde{f}(\bar{t},\,\bar{x})$.
- Po-drugie, chcemy wykazać że jeśli $u = f(t,\,x)$ spełnia równanie transportu $u_t = f_{x\,x}$, to $\bar{u} = \tilde{f}(\bar{t},\,\bar{x})$ spełnia analogiczne równanie zapisane w nowych zmiennych.

Ad 1. Odwracając (1.23), mamy:

$$\bar{u} = e^{-a(\bar{x} - 2\,a\,\bar{t}) - a^2\,\bar{t}} f(\bar{t},\,\bar{x} - 2\,a\,\bar{t}) = \tilde{f}(\bar{t},\,\bar{x}).$$

Ad 2. Liczymy pochodne funkcji $\tilde{f}$ względem nowych zmiennych:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{t}} = e^{-a(\bar{x} - 2\,a\,\bar{t}) - a^2\,\bar{t}} \left[a^2 f + f_1 - 2\,a\,f_2\right],$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{x}} = e^{-a(\bar{x} - 2\,a\,\bar{t}) - a^2\,\bar{t}} \left[-a f + f_2\right],$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial\,\bar{x}^2} e^{-a(\bar{x} - 2\,a\,\bar{t}) - a^2\,\bar{t}} \left[a^2\,f - 2\,a\,f_2 + f_{2\,2}\right].$$

gdzie f_k- pochodne po odpowiednich zmiennych funkcji $f(z_1,\,z_2)$.

Zatem

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \bar{x}^2} = e^{-a(\bar{x} - 2\,a\,\bar{t}) - a^2\,\bar{t}} \left\{a^2 f + f_1 - 2\,a\,f_2 - \left[a^2\,f - 2\,a\,f_2 + f_{2\,2}\right]\right\} =$$

$$= e^{-a(\bar{x} - 2\,a\,\bar{t}) - a^2\,\bar{t}} \left[f_1 - f_{2\,2}\right]\Big|_{(z_1,\,z_2) = (t,\,x)} = 0.$$

1.9. Teoria przedłużeń

Najbardziej doniosłą ideą Sophusa Liego, która zawoocowala stworzeniem pięknej i algorytmicznej teorii, było potraktowanie układu równań różniczkowych jako rozmaitości algebraicznej w rozszerzonej przestrzeni, której elementami są zmienne niezależne, zmienne zależne (funkcje) oraz pochodne funkcji. Traktując układ równań jako objekt geometryczny, można do niego stosować te kryteria, które były opracowane w poprzednich rozdziałach. Punktem wyjścia w teorii lokalnych grup przekształceń jest jednoparametrowa grupa dizałająca na zbiorze zmiennych i niezależnych w następujący sposób:

$$\bar{x}^k = f^k(x,\, u,\, ; a) = x^k + a\,\xi^k(x,\, u) + O(a^2), \quad k = 1, 2, ...n, \tag{1.24}$$

$$u^\alpha = g^\alpha(x,\, u,\, ; a) = u^\alpha + a\,\eta^\alpha(x,\, u) + O(a^2), \quad \alpha = 1, 2, ... \tag{1.25}$$

Okazuje się że zadanie przekształcenia (1.24)–(1.25) indukują także przekształcenia pochodnych:

$$\frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial\, \bar{x}^k} = \theta^\alpha_k(x,\, u,\, \partial\, u\, ; a) = \frac{\partial u^\alpha}{\partial\, x^k} + a\,\zeta^\alpha_k(x,\, u,\, \partial\, u) + O(a^2), \tag{1.26}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}^\alpha}{\partial\, \bar{x}^k \partial\, \bar{x}^j} = \theta^\alpha_{k,j}(x,\, u,\, \partial\, u,\, \partial^2\, u; a) = \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial\, x^k\, \partial\, x^j} + a\,\zeta^\alpha_{k,j}(x,\, u,\, \partial\, u, \partial^2\, u) + O(a^2), \tag{1.27}$$

....

Definicja 1.12. *Operator*

$$\hat{X}_(r) = \sum_{k=1}^{n} \xi^k(x,\, u)\frac{\partial}{\partial\, x^k} + \sum_{\alpha=1}^{m} \eta^\alpha(x,\, u)\frac{\partial}{\partial\, u^\alpha} + \sum_{1\le\, |J|\le\, r}^{n} \zeta^\alpha_J(x,\, u, \partial\, u, ...\partial^{|J|}\, u)\frac{\partial}{\partial\, u^\alpha_J},$$

$J = (j_1,\, j_2,\, ...j_h),\ j_1 \le\ j_2 ... \le\ j_h,\ |J| = j_1 + ... + j_h$, *nazywa się r-tym przedłużeniem generatora* $\hat{X} = \sum_{k=1}^{n} \xi^k(x,\, u)\frac{\partial}{\partial\, x^k} + \sum_{\alpha=1}^{m} \eta^\alpha(x,\, u)\frac{\partial}{\partial\, u^\alpha}$.

Zastanówmy się nad tym, jak można znaleźć współrzędne $\zeta^\alpha_{i_1,\, i_2,\, ,,, i_k}$.

Twierdzenie 1.9. *Zachodzi wzór:*

$$\zeta^\alpha_{j,\, i_1,...i_r} = D_j\, \zeta^\alpha_{i_1,...i_r} - u^\alpha_{k,\, i_1,...i_r} D_j\, \xi^k, \tag{1.28}$$

gdzie

$$D_j = \frac{\partial}{\partial\, x^j} + u^\alpha_j \frac{\partial}{\partial\, u^\alpha} + u^\alpha_{j,i_1} \frac{\partial}{\partial\, u^\alpha_{i_1}} + ... + u^\alpha_{j,i_1,...i_k} \frac{\partial}{\partial\, u^\alpha_{i_1,\, i_2,...i_k}} + ...$$

Dowód.

Zacznijmy od ζ^α_k:

$$\frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial\, \bar{x}^k} = \frac{\partial}{\partial\, \bar{x}^k}\left[u^\alpha + a\,\eta^\alpha(x,\, u)\right] + O(a^2) = \frac{\partial}{\partial\, x^m}\left[u^\alpha + a\,\eta^\alpha(x,\, u)\right]\frac{\partial\, x^m}{\partial\, \bar{x}^k} + O(a^2).$$

Żeby obliczyć $\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^k}$, zauważmy iż zachodzą wzory:

$$\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s} = \delta^m_s,$$

$$\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s} = \frac{\partial}{\partial x^s}\left[x^r + a\,\xi^r(x,\,u)\right] + O(a^2) = \delta^r_s + a\,D_{x^s}\,\xi^r(x,\,u) + O(a^2).$$

Stąd już łatwo wywnioskować że

$$\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^r} = \delta^m_r - a\,D_{x^r}\,\xi^m(x,\,u) + O(a^2).$$

Zatem

$$\frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial}{\partial x^m}\left[u^\alpha + a\,\eta^\alpha(x,\,u)\right]\left[\delta^m_k - a\,D_{x^k}\,\xi^m(x,\,u)\right] + O(a^2) =$$
$$= \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^k} + a\left[D_k\,\eta^\alpha - u^\alpha_m D_k\,\xi^m\right] + O(a^2).$$

Stosujemy teraz metodę indukcji. Zakładamy że wzór (1.28) zachodzi dla wszystkich pochodnych cząstkowych rzędu n. Mamy więc następujący ciąg równości:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial^n \bar{u}^\alpha}{\partial \bar{x}_{i_1}\,\partial \bar{x}_{i_2}...\partial \bar{x}_{i_n}} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}\left[\frac{\partial^n u^\alpha}{\partial x_{i_1}\,\partial x_{i_2}...\partial x_{i_n}} + a\,\zeta^\alpha_{i_1,\,i_2,...i_n}\right] + O(a^2) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x^k}\left[\frac{\partial^n u^\alpha}{\partial x_{i_1}\,\partial x_{i_2}...\partial x_{i_n}} + a\,\zeta^\alpha_{i_1,\,i_2,...i_n}\right]\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} =$$
$$= \left[\frac{\partial^{n+1} u^\alpha}{\partial x_k,\,\partial x_{i_1},\,\partial x_{i_2}...\partial x_{i_n}} + a\,D_k\,\zeta^\alpha_{i_1,\,i_2,...i_n}\right]\left[\delta^k_j - a\,D_{x^j}\,\xi^k(x,\,u)\right] + O(a^2) =$$
$$= \frac{\partial^{n+1} u^\alpha}{\partial x_j,\,\partial x_{i_1}\,\partial x_{i_2}...\partial x_{i_n}} + a\left[D_j\,\zeta^\alpha_{i_1,\,i_2,...i_n} - u^\alpha_{k,\,i_1,\,...i_n}\,D_j\,\xi^k\right] + O(a^2) =$$
$$= \frac{\partial^{n+1} u^\alpha}{\partial x_j\,\partial x_{i_1}\,\partial x_{i_2}...\partial x_{i_n}} + a\zeta^\alpha_{j,\,i_1,\,i_2,...i_n} + O(a^2)$$

A więc zachodzi teza.

1.10. Kryterium niezmienniczości. Procedura rozszczepienia i równania określające

Przypuścmy rę mamy zadany układ równań

$$F^\sigma(x,\,u,\partial\,u,\,...\partial^r u) = 0, \qquad \sigma = 1,\,2,\,...s. \tag{1.29}$$

Zakładamy że

$$rank\frac{\partial\,(F^1,\,F^2,\,...F^s)}{\partial\,(x,\,u,\,\partial\,u,...\partial^{\,r}\,u)}\bigg|_{F^\sigma=0} = s = const,$$

zaś na zbiorze zmiennych zależnych i niezależnych działa lokalna 1-parametrowa grupa niezmienniczości

$$\bar{x}^k = f^k(x, u;\, a) = x^k + \, a\,\xi^k(x,\, u) + O(a^2),\;\; k = 1, ...n,$$
$$\bar{u}^\alpha = g^\alpha(x,\, u;\, a) = u^\alpha + a\,\eta^\alpha(x,\, u) + O(a^2),\;\; \alpha = 1, ...m,$$

z generatorem $\hat{X} = \xi^k(x,\, u)\frac{\partial}{\partial\, x^k} + \eta^\alpha(x,\, u)\frac{\partial}{\partial\, u^\alpha}$. Ponieważ układ równań (1.29) traktujemy jako rozmaitość algebraiczną zanurzoną w przestrzeni dżetów, zaś zadanie przekształceń $(x, u) \to (\bar{x},\, \bar{u})$ implikuje przekształcenia $\partial^k\, u \to \partial^k \bar{u}$, więc zachodzi

Twierdzenie 1.10. *Na to by n razy przedłużona grupa $T_a^{(n)}$ była grupą niemienniczości układu (1.29), potrzeba i wystarcza by zachodziła równość*

$$\hat{X}_{(n)} F^\sigma \Big|_{F^\sigma = 0} = 0, \qquad \sigma = 1, ...s, \tag{1.30}$$

gdzie $\hat{X}_{(n)}$- $n-$te przedłużenie generatora $\hat{X}$.

Przykład. Wykażemy że równanie

$$u_t + u\, u_x^3 = 0$$

dopuszcza grupę T_a z generatorem $\hat{X} = \frac{1}{\sqrt{u}}\frac{\partial}{\partial\, u}$. Pierwsze przedłużenie gewneratora $\hat{X}$ ma postać

$$\hat{X}_{(1)} = \hat{X} + \zeta_t\, \frac{\partial}{\partial\, u_t} + \zeta_x\, \frac{\partial}{\partial\, u_x},$$

gdzie

$$\zeta_t = D_t\, \eta = D_t\, u^{-1/2} = -\frac{1}{2}\frac{u_t}{u^{3/2}},$$
$$\zeta_x = D_x\, \eta = D_x\, u^{-1/2} = -\frac{1}{2}\frac{u_x}{u^{3/2}}.$$

Stosując kryterium niezmiennczości mamy:

$$\hat{X}_{(1)}\left\{u_t + u\, u_x^3\right\} = \zeta_t + \eta\, u_x^3 + 3\, u\, u_x^2 = -\frac{1}{2}\frac{u_t}{u^{3/2}} + u^{-1/2}\, u_x^3 - 3\, u\, \frac{1}{2}\frac{u_x}{u^{3/2}} =$$
$$= \frac{1}{2\, u^{3/2}}\left[-u_t + 2\, u\, u_x^3 - 3\, u\, u_x^3\right] = -\frac{1}{2\, u^{3/2}}\left[u_t + \, u\, u_x^3\right] = 0.$$

1.11. Przykłady poszukiwania symetrii

Rozpatzmy równanie transportu ciepła

$$u_t = u_{xx}.$$

Równanie to należey do klasy równań ewolcyjnych w których zwykłe wyodrębnia się parametr t, czyli czas. Przy poszukiwaniu symetrii wygodniej jest przejść do oznaczeń spotykanych poprzednio: $t \to x_1, \quad x \to x_2$, w których równanie to będzie wyglądać następująco:

$$u_1 - u_{22} = 0. \tag{1.31}$$

W powyższym równaniu i nieżej będziemy używać oznaczeń $u_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots.., u_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_2}$. Generator IFO poszukujemy w postaci

$$\hat{X} = \xi^1(x,u)\frac{\partial}{\partial x_1} + \xi^2(x,u)\frac{\partial}{\partial x_2} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Ponieważ badane równanie jest równaniem rzędu 2, musimy dwa razy przedłużyć operator $\hat{X}$ i działać na równanie operatorem

$$\hat{X}_{(2)} = \hat{X} + \sum_{k=1}^{2} \zeta_k \frac{\partial}{\partial u_k} + \sum_{1 \le i \le j \le 2} \zeta_{i\,j} \frac{\partial}{\partial u_{i\,j}},$$

gdzie ζ_k oraz $\zeta_{i\,j}$ otzymujemy za pomocą wzorów z poprzedniego rozdeziału. Stosując kryterium niezmienniczości do równania (1.31), otrzymamy:

$$\zeta_1 - \zeta_{2\,2}\big|_{u_1 = u_{2\,2}} = 0.$$

Do policzenia więc są współrzędne ζ_1 , ζ_2 oraz $\zeta_{2\,2}$:

$$\zeta_1 = D_1\,\eta - u_1\,D_1\,\xi^1 - u_2\,D_1\,\xi^2 = \eta_1 + u_1\,\eta_u - u_1\left(\xi^1_1 + u_1\,\xi^1_u\right) - u_2\left(\xi^2_1 + u_1\,\xi^2_u\right),$$
$$\zeta_2 = D_2\,\eta - u_1\,D_2\xi^1 - u_2\,D_2\,\xi^2 = \eta_2 + u_2\,\eta_u - u_1\left(\xi^1_2 + u_2\,\xi^1_u\right) - u_2\left(\xi^2_2 + u_2\,\xi^2_u\right),$$
$$\zeta_{2\,2} = D_2\,\zeta_2 - u_{2\,1}\,D_2\,\xi^1 - u_{2\,2}\,D_2\,\xi^2,$$

gdzie D_i - operatory pochodnej zupełnej względnej zmiennej x_i,

$$\begin{aligned} D_2\,\zeta_2 = \eta_{2\,2} + u_2\,\eta_{2\,u} + u_{2\,2}\,\eta_u + u_2\left(\eta_{u\,2} + u_2\,\eta_{u\,u}\right) - u_{1\,2}\left(\xi^1_2 + u_2\,\xi^1_u\right) - \\ -u_1\left[\xi^1_{2\,2} + u_2\,\xi^1_{2\,u} + u_{2\,2}\,\xi^1_u + u_2\left(\xi^1_{u\,2} + u_2\,\xi^1_{u\,u}\right)\right] - u_{2\,2}\left(\xi^2_2 + u_2\,\xi^2_u\right) - \\ -u_2\left[\xi^2_{2\,2} + u_2\,\xi^2_{2\,u} + u_{2\,2}\,\xi^2_u + u_2\left(\xi^2_{u\,2} + u_2\,\xi^2_{u\,u}\right)\right]. \end{aligned}$$

Przejście na rozmaitość $u_1 - u_{2\,2} = 0$ dokonujemy zamieniając w powyższych wzorach u_1 na $u_{2\,2}$. W wynku otrzymamy równanie

$$\begin{aligned} \eta_{2\,2} + \eta_{2\,u}u_2 + u_{2\,2}\eta_u + u_2\left(\eta_{u\,2} + u_2\,\eta_{u\,u}\right) - u_{1\,2}\left(\xi^1_2 + u_2\,\xi^1_u\right) - \\ -u_{2\,2}\left[\xi^1_{2\,2} + u_2\,\xi^1_{2\,u} + u_{2\,2}\,\xi^1_u + u_2\left(\xi^1_{u\,2} + u_2\,\xi^1_{u\,u}\right)\right] - \\ -u_{2\,2}\left(\xi^2_2 + u_2\,\xi^2_u\right) - u_2\left[\xi^2_{2\,2} + u_2\,\xi^2_{2\,u} + u_{2\,2}\,\xi^2_u + u_2\left(\xi^2_{u\,2} + u_2\,\xi^2_{u\,u}\right)\right] - \\ -\left[\eta_1 + u_{2\,2}\,\eta_u - u_{2\,2}\left(\xi^1_1 + u_{2\,2}\,\xi^1_u\right) - u_2\left(\xi^2_1 + u_{2\,2}\,\xi^2_u\right)\right] = 0. \end{aligned}$$

W tym miejscu przechodzimy do omówienia bardzo ważnej procedury technicznej, zwanej "rozszczepieniem" równania określającego. Zauważmy, że współrzędne ξ^k, η operatora $\hat{X}$ zależą od zmiennych x_1, x_2, u, natomiast w powyższym równaniu figurują pochodne u_2, $u_{1\,2}$ oraz $u_{2\,2}$, które, po zrzutowaniu się na rozmaitość (czyli wykorzystaniu warunku $u_1 = u_{2\,2}$) traktujemy jako zmienne niezależne. Równanie określające, wobec tego, możemy potraktować jako równanie wielomianowe względem tych zmiennych. W wyniku, przyrównując do zera współćzynniki przy odpowiednich potęgach $u_2^\alpha\, u_{1\,2}^\beta\, u_{2\,2}^\gamma$ (dana procedura nosi nazwę procedury rozszczepienia), otrzymujemy (na ogół mocno nadokreślony) układ liniowych równań cząstkowych. Przyrównując do zera współczynniki przy odpowiednich potęgach $u_2^\alpha\, u_{1\,2}^\beta\, u_{2\,2}^\gamma$, w naszym równaniu, otrzymamy:

$$u_2\, u_{1\,2}: \qquad -\xi^1_u - \xi^1_u = 0, \tag{1.32}$$

$$u_{1\,2}: \qquad -\xi^1_2 - \xi^1_2 = 0 \tag{1.33}$$

$$u_2\, u_{2\,2}: \qquad -2\,\xi^2_u = 0. \tag{1.34}$$

Zatem

$$\xi^1 = \xi^1(x_1), \qquad \xi^2 = \xi^2(x_1,\, x_2).$$

Pozostałe współczynniki, po uwzględnieniu powyższych wzorów, przybierają następującą postać:

$$u_2^2: \qquad \eta_{u\,u} = 0, \tag{1.35}$$

$$u_{2\,2}: \qquad 2\,\xi^2_2 = \xi^1_1, \tag{1.36}$$

$$u_2: \qquad 2\,\eta_{2\,u} - \xi^2_{2\,2} + \xi^2_1 = 0, \tag{1.37}$$

$$1: \qquad \eta_{2\,2} - \eta_1 = 0. \tag{1.38}$$

Skupmy się na rozwiązaniu układu równań (1.35)–(1.38). Ponieważ prawa strona równania (1.36) nie zależy od zmiennej x_2, powinna zachodzić równość

$$2\,\xi^2_2 = \sigma(x_1) = \xi^1_1$$

dla pewnej funkcji $\sigma(x_1)$. Całkując pierwszą równość, otrzymamy:

$$\xi^2 = \frac{1}{2}\,\sigma(x_1)\,x_2 + \mu(x_1). \tag{1.39}$$

Równanie (1.35) będzie spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\eta = A(x_1,\, x_2) + u\,B(x_1,\, x_2). \tag{1.40}$$

Podstawiając (1.39) oraz (1.40) do (1.37), otrzymamy:

$$2B_2(x_1,\, x_2) = -\left(\frac{1}{2}x_2\,\sigma'(x_1) + \mu'(x_1)\right).$$

Całkując to równanie po zmiennej x_2, otrzymamy:

$$B = -\frac{1}{2}\left\{\frac{x_2^2}{4}\sigma'(x_1) + x_2\,\mu'(x_1)\right\} + \rho(x_1). \tag{1.41}$$

Podstawiając powyższe wzory do równania (1.38), możemy wnioskować, że funkcja $A(x_1,\, x_2)$, jako współczynnik przy u^0, spełnia równanie wyjściowe:

$$A_1 - A_{2\,2} = 0.$$

Pozostałe funkcje spełniają układ równań

$$\begin{aligned} \sigma''(x_1) &= 0, \\ \mu''(x_1) &= 0, \\ \rho'(x) &= -\frac{1}{4}\,\sigma'(x_1). \end{aligned}$$

Ogólne rozwiązanie tego układu jest następujące:

$$\sigma = P + x_1\,Q, \tag{1.42}$$

$$\mu = L + R\,x_1, \tag{1.43}$$

$$\rho = S - \frac{1}{4}\,Q\,x_1, \tag{1.44}$$

gdzie P, Q, L, R oraz S - dowolne stałe. Ostatecznie, więc, mamy:

$$\xi_1 = C_1 + P\,x_1 + \frac{Q}{2}\,x_1^2, \tag{1.45}$$

$$\xi_2 = \frac{x_2}{2}\,(P + x_1\,Q) + L + R\,x_1, \tag{1.46}$$

$$\eta = A(x_1,\, x_2) + u\left\{S - \frac{Q}{4}\,x_1 - \frac{1}{2}\left[\frac{x_2^2}{4}\,Q + x_2\,R\right]\right\}. \tag{1.47}$$

W rozwiązaniach (1.45)–(1.47) figuruje dowolna funkcja $A(x_1,\, x_2)$ oraz sześć dowolnych stałych. Faktycznie znaleźliśmy nie jeden, lecz siedem niezależnych generatorów jednoparametrowych grup. Najprościej można wyekstragować te generatory kładąc jeden wybrany parametr równym określonej stałej (na przyklad, jedynce), oraz zastępując pozostałe stałe zerami. W ten sposób można uzyskać następujący zbiór generatorów grup jednoparametrowych:

$$\hat{X}_1 = \frac{\partial}{\partial\,x_1}, \tag{1.48}$$

$$\hat{X}_2 = \frac{\partial}{\partial\,x_2}, \tag{1.49}$$

$$\hat{X}_3 = u\frac{\partial}{\partial\,u}, \tag{1.50}$$

$$\hat{X}_4 = 2\,x_1\frac{\partial}{\partial\,x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial\,x_2}, \tag{1.51}$$

$$\hat{X}_5 = 2\,x_1 \frac{\partial}{\partial\,x_2} - u\,x_2 \frac{\partial}{\partial\,u}, \tag{1.52}$$

$$\hat{X}_6 = 4\,x_1^2 \frac{\partial}{\partial\,x_1} + 4\,x_1\,x_2 \frac{\partial}{\partial\,x_2} - u\,\left(x_2^2 + 2\,x_1\right) \frac{\partial}{\partial\,u}, \tag{1.53}$$

$$\hat{X}_A = A(x_1,\,x_2) \frac{\partial}{\partial\,u}. \tag{1.54}$$

Uwaga 1. Zauważmy że w generatorze $\hat{X}_7$ figuruje dowolan funkcja będąca rozwiązaniem równania wyjściowego. Symetria taka zawsze ma miejsce w tych przypadkach gdy badane równanie jest liniowe i jednorodne. Odzwiercziedla ona zasadę superpozycji: kombinacja algebraiczna rozwiązań jest również rozwiązaniem.

Komutatory operatorów $\hat{X}_1 - \hat{X}_6$ oraz X_A podane są w tabeli 1.11..Tabelę tę należey odczytywać w następujący sposób: gdy $i \leq j$, wówczas na przecięciu i-tego wiersza oraz j-tej odczytujemy $\left[\hat{X}_i,\,\hat{X}_j\right]$. Miejsca przecięcia się j-tego wiersza oraz $i-$tej kolumny $(j \geq i)$ pozostają puste, gdyż odpowiednie komutatory uzyskuje się wykorzystując własność $\left[\hat{X}_i,\,\hat{X}_j\right] = -\left[\hat{X}_j,\,\hat{X}_i\right]$.

Tabela 1.1: Relacje komutacyjne generatorów jednoparametrowych grup symetrii równania transportu ciepła

	$\hat{X}_1$	$\hat{X}_2$	$\hat{X}_3$	$\hat{X}_4$	$\hat{X}_5$	$\hat{X}_6$	$\hat{X}_A$
$\hat{X}_1$	0	0	0	$\hat{X}_1$	$-\hat{X}_3$	$2\,\hat{X}_5$	$\hat{X}_{A_2}$
$\hat{X}_2$		0	0	$2\hat{X}_2$	$2\,\hat{X}_1$	$4\,\hat{X}_4 - 2\hat{X}_3$	$\hat{X}_{A_1}$
$\hat{X}_3$			0	0	0	0	$-\hat{X}_A$
$\hat{X}_4$				0	$\hat{X}_5$	$2\hat{X}_6$	$\hat{X}_{A'}$
$\hat{X}_5$					0	0	$\hat{X}_{A''}$
$\hat{X}_6$						0	$\hat{X}_{A'''}$
$\hat{X}_A$							0

gdzie

$$A^{'} = x_2\,A_2 + 2\,x_1\,A_1, \qquad A^{''} = 2\,x_1\,A_2 + 2\,x_2\,A,$$
$$A^{'''} = 4\,x_1\,x_2\,A_2 + 4\,x_1^2\,A_1 + (x_2^2 + 2\,x_1)\,A, \qquad A_j = \frac{\partial\,A}{\partial\,x_j},\ \ j = 1,\,2.$$

1.12. Symetrie potencjalnego równania Burgersa. Izomorfizm algebr Liego i przykład linearyzacji

Klasyczne równanie Burgersa ma następującą postać:

$$v_t = 2\, v\, v_x + v_{x\,x}. \tag{1.55}$$

Równanie to jest ściśle związane z równaniem transportu ciepła. Z punktu widzenia badań symetrii, wygodniej jest posługiwać się *postacią potencjalną* tego równania. Po dokonaniu zamiany zmiennej zależnej $v(t,x) = u_x(t,x)$ równanie wyjściowe można zapisać w następującej postaci:

$$u_{t\,x} = \left(u_x^2\right)_x + u_{3\,x}.$$

Całkując lewą i prawą strony po zmiennej x, otrzymamy potencjalne równanie Burgersa

$$u_t = u_x^2 + u_{x\,x}. \tag{1.56}$$

Przepiszmy to równanie w standardowych oznaczeniach, wprowadzając zmienne $x_1 = t$, $x_2 = x$;

$$u_1 = u_2^2 + u_{2\,2}. \tag{1.57}$$

Generator IFO poszukujemy w postaci

$$\hat{X} = \xi^1(x,u)\frac{\partial}{\partial\, x_1} + \xi^2(x,u)\frac{\partial}{\partial\, x_2} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial\, u}.$$

Drugie przedłużenie tego generatora zostało przedstawione w poprzednim podpunkcie, i my wykorzystujemy tu gotowe wzory. Stosując do równania (1.57) kryterium niezmienniczości, otrzymamy układ równań

$$\zeta_1 = \zeta_{2\,2} + 2\, u_x\, \zeta_1, \qquad u_1 = u_{2\,2} + u_1^2.$$

Przepiwując współrzędne $\zeta_1,\ \zeta_2,\ \zeta_{2\,2}$ w rozwiniętej postaci oraz zastępując u_1 poprzez $u_2^2 + u_{2\,2}$, otrzymamy:

$$\begin{aligned}
\eta_{2\,2} + \eta_{2\,u} u_2 + u_{2\,2}\eta_u + u_2\left(\eta_{u\,2} + u_2\, \eta_{u\,u}\right) - 2\, u_{1\,2}\left(\xi^1_2 + u_2\, \xi^1_u\right) - 2\, u_{2\,2}\left(\xi^2_2 + \xi^2_{2\,u}\, u_2\right) - \\
- u_{2\,2}\left[\xi^1_{2\,2} + u_2\, \xi^1_{2\,u} + u_{2\,2}\, \xi^1_u + u_2\left(\xi^1_{u\,2} + u_2\, \xi^1_{u\,u}\right)\right] - \\
- u_2^2\left[\xi^1_{2\,2} + u_2\, \xi^1_{2\,u} + u_{2\,2}\, \xi^1_u + u_2\left(\xi^1_{u\,2} + u_2\, \xi^1_{u\,u}\right)\right] - \\
- u_2\left[\xi^2_{2\,2} + u_2\, \xi^2_{2\,u} + u_{2\,2}\, \xi^2_u + u_2\left(\xi^2_{u\,2} + u_2\, \xi^2_{u\,u}\right)\right] + \\
+ 2\, u_2\left[\eta_2 + \eta_u\, u_2 - u_{2\,2}\left(\xi^1_2 + \xi^1_u\, u_2\right) - u_2^2\left(\xi^1_2 + \xi^1_u\, u_2\right) - u_2\ \left(\xi^2_2 + \xi^2_u\, u_2\right)\right] = \\
= \eta_1 + \left(u_{2\,2} + u_2^2\,\right)\eta_u - u_{2\,2}\left[\xi^1_1 + \left(u_{2\,2} + u_2^2\right)\xi^1_u\right] - \\
- u_2^2\left[\xi^1_1 + \left(u_{2\,2} + u_2^2\right)\xi^1_u\right] - u_2\left[\xi^2_1 + \left(u_{2\,2} + u_2^2\right)\ \xi^2_u\right].
\end{aligned}$$

Jak i poprzednio, stosujemy tu procedurę rozszczepienia, przyrównując do zera współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennyc u_2, $u_{2\,2}$ oraz $u_{1\,2}$. Przyrównując do zara współczynniki przy $u_2\,u_{12}$ oraz $u_{1\,2}$, otrzymujemy $\xi^1_u = \xi^1_2 = 0$. Stąd

$$\xi^1 = \xi^1(x_1).$$

Przyrównując do zera spółczynnik przy $u_2\,u_{2\,2}$ otrzymujemy że

$$\xi^2 = \xi(x_1,\,x_2).$$

Przyrównując do zera spółczynnik przy $u_{2\,2}$ otrzymamy

$$2\,\xi^2_2 - \dot{\xi}(x_1) = 0.$$

Stąd

$$\xi^2 = \sigma(x_1) + \frac{x_2}{2}\,\dot{\xi}^1(x_1). \tag{1.58}$$

Dalej, przyrównując do zera współczynniki przy u_2^2 otrzymamy równania

$$\eta_{u\,u} + \eta_u = 2\,\xi^2_2 - \dot{\xi}^1(x_1) \equiv 0. \tag{1.59}$$

Całkując równanie (1.59) po zmiennej u otrzymamy liniowe niejednorodne równanie

$$\eta_u + \eta = \beta(x_1,\,x_2),$$

gdzie $\beta(x_1,\,x_2)$ jest dowolną funkcją. Całkując to równanie metodą uzmienniania stałej, otrzymujemy

$$\eta = \alpha(x_1,\,x_2)\,e^{-u} + \beta(x_1,\,x_2),$$

gdzie $\alpha(x_1,\,x_2)$ - dowolna funkcja.

Przyrównując do zera współczynnik przy u_2 otrzymujemy równanie

$$2\,\eta_{2\,u} + 2\,\eta_2 = \xi^2_{2\,2} - \xi^2_1 = -\frac{x_2}{2}\,\ddot{\xi}^1(x_1) - \dot{\sigma}(x_1)$$

To równanie można jeszcze przedstawić w postaci

$$2\,\beta_2(x_1,\,x_2) = -\left[\frac{x_2}{2}\,\ddot{\xi}^1(x_1) + \dot{\sigma}(x_1)\right].$$

Całkując otrzymujemy wzór

$$\beta = -\frac{x_2^2}{8}\ddot{\xi}(x_1) - \frac{x_2}{2}\dot{\sigma}(x_1) + \rho(x_1),$$

gdzie $\rho(x_1)$- dowolna funkcja.

Na końcu przyrównujemy do zera współczynnik przy 1. To daje nam równanie

$$\eta_1 = \eta_{22},$$

lub,

$$e^{-u}\alpha_1 + \beta_1 = e^{-u}\alpha_{22} + \beta_{22}.$$

Wynika stąd natychmiast że $\alpha(x_1,\, x_2)$ jest dowolnym rozwiązaniem równania transportu ciepła $\alpha_1 = \alpha_{22}$. Pozostała część równości można zapisać w postaci

$$\frac{1}{4}\ddot{\xi}^2(x_1) = \frac{x_2^2}{8}\frac{d^3\,\xi^1(x_1)}{d\,x_1^3} + \frac{1}{2}\,x_2\,\ddot{\sigma}(x_1) + \dot{\rho}(x_1).$$

Stąd przyrównując do zera współczynniki przy odpowiednich potęgach x_2^k, $k = 0,\, 1,\, 2$, otrzymujemy trzy proste równania, których rozwiązania można przedstawić w następującej postaci:

$$\begin{aligned}\xi^1 = C_2 + 2\,C_4\,x_1 + 4\,C_6\,x_1^2,\\ \sigma = A + B\,x_1,\\ \rho = C_7 - 2\,C_6\,x_1.\end{aligned}$$

Dla funkcji β otrzymujemy wzór

$$\beta = -x_2^2 C_6 - \frac{x_2}{2}B + C_7 - 2\,C_6\,x_1.$$

A więc, wyrażenia dla współczynników generatora IFO można przedstawićx w następującej postaci:

$$\xi^1 = C_2 + 2\,C_4\,x_1 + 4\,C_6\,x_1^2, \tag{1.60}$$

$$\xi^2 = \frac{x_2}{2}\,[2\,C_4 + 8\,C_6\,x_1] + A + B\,x_1, \tag{1.61}$$

$$\eta = \alpha(x_1,\, x_2)\,e^{-u} + C_7 - 2\,C_6\,x_1 - C_6\,x_2^2 - \frac{B}{2}\,x_2. \tag{1.62}$$

Zatem, zachodi

Twierdzenie 1.11 *Potencjalne równanie Burgersa (1.56) dopuszcza nieskończeniewymiarową algebrę Liego, której bazę tworzą następujące generatory przekształceń infinitezymalnych:*

$$\hat{X}_1 = \frac{\partial}{\partial\,x_1}, \tag{1.63}$$

$$\hat{X}_2 = \frac{\partial}{\partial\,x_2}, \tag{1.64}$$

$$\hat{X}_3 = \frac{\partial}{\partial\,u}, \tag{1.65}$$

$$\hat{X}_4 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + 2\,x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \tag{1.66}$$

$$\hat{X}_5 = 2\,x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial u}, \tag{1.67}$$

$$\hat{X}_6 = 4\,x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} + 4\,x_1\,x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - \left(2\,x_1 + x_2^2\right) \frac{\partial}{\partial u}, \tag{1.68}$$

$$\hat{X}_\alpha = \exp[-u]\,\alpha(x_1,\,x_2) \frac{\partial}{\partial u} \tag{1.69}$$

gdzie funkcja $\alpha = \alpha(x_1,\,x_2)$ *jest deowolnym rozwiązaniem równania* $\alpha_1 = \alpha_{2\,2} = 0$.

Komutatory operatorów $\hat{X}_1 - \hat{X}_6$ podane są w tabeli 1.12. (nie podajemy relacji komutacyjnych w których figuruje operator X_A).

Tabela 1.2: Relacje komutacyjne generatorów jednoparametrowych grup symetrii równania transportu ciepła

	$\hat{X}_1$	$\hat{X}_2$	$\hat{X}_3$	$\hat{X}_4$	$\hat{X}_5$	$\hat{X}_6$
$\hat{X}_1$	0	0	0	$\hat{X}_1$	$-\hat{X}_3$	$2\,\hat{X}_5$
$\hat{X}_2$		0	0	$2\hat{X}_2$	$2\,\hat{X}_1$	$4\,\hat{X}_4 - 2\hat{X}_3$
$\hat{X}_3$			0	0	0	0
$\hat{X}_4$				0	$\hat{X}_5$	$2\hat{X}_6$
$\hat{X}_5$					0	0
$\hat{X}_6$						0

Porówniując tebelę 1.12. z tabelą 1.11. widzimy że operatory $\hat{X}_1 - \hat{X}_6$ spełniają identyczne rlacje komutacyjne. Identyczność ta nie jest przypadkowa. Wskazuje ona na to iż równanie transportu ciepła a równanie Burgersa w jakiś sposób są związane ze sobą. Łatwo można zauważyć że różnią się pomiedzy sobą jedynie te współrędne generatorów grup jednoparemetrowych które stoją przy $\frac{\partial}{\partial u}$. Spróbujmy więc dokonać takiej zamiany zmiennych $u \to W$ przy której operator $e^{-u}\,\frac{\partial}{\partial u}$ przejdzie w operator $\frac{\partial}{\partial W}$. Zamiana ta dana jest rozwiązaniem równania

$$\frac{d\,u}{e^{-u}} = \frac{d\,W}{1}$$

Jego najprostsze rozwiązanie ma postać

$$W = e^u.$$

Po takiej zamianie zmiennych (która "nie rusza" zmiennych niezależnych!!!) generatory dopuszczalne przez potencjalne równanie Burgersa stają się identyczne (z dokładnością do zamiany $u \to W$) z generatorami które dopuszcza równanie transprtu ciepła.

Podstawiając ansatz $u = \log W$ do równania (1.56), otrzymany rówanie

$$\frac{W\,W_t}{W^2} = \frac{W\,W_{x\,x}}{W^2},$$

które jest równoważne równaniu transportu ciepła.

Jeżeli, z kolei, powrócić do równania (1.55), dokonując w nim zamiany zmiennej

$$v = (\log W)_x\,, \tag{1.70}$$

wówczas uzyskamy równanie

$$\left(W^2 - W\,W_x\right)\,(W_t - W_{x\,x}) = 0,$$

które również jest równoważne z równaniem transportu ciepła. Wprowadzając zamianę zmiennych (1.70) podyktowaną względami symetrii (bardziej dokładnije - izomorfizmem algebr Liego), uzyskaliśmy słynne przekształcenie Cole'a-Hopfa, linearyzujące równanie Burgersa [1].

[1]Dzięki istnieniu takiego związku równanie Burgersa powszechnie jest uznawane za zupełnie całkowalne. W książce Daniela Dubina **"Numerical and Analytical Methods for Sciences and Engineers Using *Mathematica*", Wiley & Sons, New Jersey, 2003** podaje się przepis na to, jak można za pomocą przkształcenie Cole'a-Hopfa rozwiązać dowolne zagadnienie Cauchego dla równania Burgersa.

Rozdział 2

Zastosowania

2.1. Rozwiązania niezmiennicze. Redukcja.

Załóżmy że mamy skalarne równanie

$$F\left(x_1,\, x_2,\, ...x_n\,;u,\, \partial\, u, ...\partial^k\, u\right) = 0 \tag{2.1}$$

które dopuszcza grupę jednoparametrową G_a z generatorem

$$\hat{X} = \xi^i \frac{\partial}{\partial\, x^i} + \eta\, \frac{\partial}{\partial\, u}.$$

Definicja 2.1.*Funkcja*

$$u = \theta(x) \tag{2.2}$$

nazywa się rozwiązaniem niezmienniczym równania (2.1), związaną z generatorem symetrii $\hat{X}$, jeżeli:

- *funkcja (2.2) jest powierzchnią niezmienniczą operatora $\hat{X}$, co oznacza że*

$$\hat{X}\,[u - \theta(x)] = 0; \tag{2.3}$$

- *funkcja (2.2) spełnia równanie (2.1).*

Warunek (2.3) na rozwiązaniach równania (2.1) jest, oczywiście, równoważny warunkowi

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i\,[x,\, \theta(x)]\, \frac{\partial\, \theta}{\partial\, x_i} = \eta\,[x,\, \theta(x)]\,. \tag{2.4}$$

Uwaga. Równanie (2.4) nazywają często równaniem powierzchni niezmienniczej.

Jak można znaleźć postać funkcji $\theta(x)$ i jakie z tego płyną korzyści? Opiszemy najpierw procedurę odnajdywania funkcji θ.

Korzystamy z tego, że równanie (2.4) jest równoważne układowi charakterystycznemu

$$\frac{d\,x_1}{\xi_1} = \frac{d\,x_2}{\xi_2} = ... = \frac{d\,x_n}{\xi_n} = \frac{d\,u}{\eta}. \tag{2.5}$$

Jeżeli funkcje $\tilde{X}_1(x,\,u)$, $\tilde{X}_2(x,\,u), ...,\tilde{X}_{n-1}(x,\,u)$, $v(x,\,u)$ są niezależnymi całkami pierwszymi układu charakterystycznego i, ponad to, $\partial\,v/\partial\,u \neq 0$, wówczas rozwiązanie niezmiennicze (2.2) można przedstawić tylko za pomocą funkcji niezmienniczych w postaci [1]

$$v(x,\,u) = \Phi\left(\tilde{X}_1,\,\tilde{X}_1, ..., \tilde{X}_{n-1}\right), \tag{2.6}$$

gdzie Φ - pewna gładka funkcja. Zauważmy, że funkcje $\tilde{X}_1(x,\,u)$, $\tilde{X}_2(x,\,u), ...,\tilde{X}_{n-1}(x,\,u)$ można potraktować jako nowe zmienne kanoniczne prostujące pole $\hat{X}$, jeżeli dodać do tego zbióru funkcję $\tilde{X}_n(x,\,u)$, spełniającą równanie

$$\hat{X}\left[\tilde{X}_n\right] = 1.$$

Rzeczywiście, zbiór funkcji $\tilde{X}_1(x,\,u)$, $\tilde{X}_2(x,\,u), ...,\tilde{X}_{n-1}(x,\,u)$, $\tilde{X}_n(x,\,u)$, $v(x,\,u)$ tworzy izomorfizm przestrzeni R^{n+1}. W zmiennych tych generator będzie miał postać

$$\hat{X} = \sum_{k=1}^{n} \hat{X}\left[\tilde{X}_k\right]\frac{\partial}{\partial\,\tilde{X}_k} + \hat{X}\left[v\right]\frac{\partial}{\partial\,v} = 1\cdot\frac{\partial}{\partial\,\tilde{X}_n}.$$

Ponieważ pole wektorowe $\frac{\partial}{\partial\,\tilde{X}_n}$ jest "nieprzedłużalne", więc równanie (2.1) przepisane w nowych zmiennych będzie miało postać

$$\tilde{F}\left(\tilde{X}_1,\,\tilde{X}_2,\,...\tilde{X}_{n-1}\,;v,\,\partial\,v, ...\partial^k\,v\right) = 0, \tag{2.7}$$

gdzie symbol $\partial^j\,v$ oznacza zbiór wszystkich j-ch pochodnych cząstkowych funkcji v po zmiennych $\tilde{X}_r$.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

1. Zmienne $\tilde{X}_1(x,\,u)$, $\tilde{X}_2(x,\,u), ...,\tilde{X}_{n-1}(x,\,u)$ nazywamy zmiennymi niezmienniczymi.

2. Równanie (2.7) które mieści o jedną zmienną niezależną mniej niż (2.1), będziemy nazywać równaniem zredukowanym.

3. Procedurę przejścia do postaci (2.7) będziemy nazywali redukcją równania (2.1) względem grupy 1-parametrowej generowanej przez operator $\hat{X}$.

[1]Stwierdzenie to ma charakter uniwersalny, p., na przykład Ovsyannikov L.V., *Group Analysis of Differential equations*, Academic Press, NY, 1982, rozdział 4, p. 18.

2.2. Przykład 1. Rozwiązania typu fali biegnącej równania Kortevega-de Vriesa

Lemat 2.1.

Równanie

$$F[x_1, ...x_{i-1},\, x_{i+1}, ...x_n\;\; u(x)] = 0$$

dopuszcza generator $\hat{X} = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

<u>Dowód</u> wynika bezpośrednio z tego, że operator $\hat{X} = \frac{\partial}{\partial x_i}$ jest operatorem nieprzedłużalnym.

Wniosek 2.1.*Równanie Kortevega-de Vriesa (KdV)*

$$u_t + u\, u_x + u_{x\,x\,x} = 0 \tag{2.8}$$

dopuszcza generator

$$\hat{X} = \frac{\partial}{\partial t} + s\,\frac{\partial}{\partial x}, \tag{2.9}$$

gdzie s jest stałą nieujemną.

Żeby zrealizować redukcję grupową r-nia KdV, należy rozwiązać układ

$$\frac{d\,t}{1} = \frac{d\,x}{s} = \frac{d\,u}{0}$$

Ponieważ niezmienniki operatora (2.9) wyrażają się wzorem

$$\xi = \omega_1 = x - s\,t, \qquad u = \omega_2,$$

więc rózwiązanie niezmiennicze można przedstawić w następującej postaci:

$$u = U(\xi)\;\equiv\; U(x - s\,t).$$

Po podstawieniu tego ansatzu do równania KdV, otrzymamy równanie zwyczajne

$$-s\,U' + U\,U' + U''' = \frac{d}{d\,\xi}\left[U'' + \frac{U^2}{2} - s\,U\right] = 0.$$

całkując go otrzymamy

$$U'' + \frac{U^2}{2} - s\,U = C.$$

Bez utraty ogólności możemy uważać że $C = 0$. Jeżeli tak nie jest, wówczas osągniemy żądaną postać "kanoniczną"

$$U'' + \frac{U^2}{2} - s\,U = 0 \tag{2.10}$$

dokonując przekształcenia $U \to \tilde{U} + R$, $R^2 - s\,R = C$ oraz zmiany prędkości fali biegnącej $s \to s - R$.

Równanie (2.10) możemy również przedstawić w postaci układu dynamicznego

$$\begin{aligned} U' &= -W \equiv F, \\ W' &= \tfrac{1}{2}\,U\,(U - 2\,s) \equiv G. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Zachodzą następujące stwierdzenia.

Lemat 2.2. *Układu (2.11) ma dwa punkty stacjonarne o współrzędnych* $(0, 0)$ *oraz* $(2\,s, 0)$. *Pierwszy punkt jest siodłem, drugi punkt jest środkiem.*

Dowód. Wynika z analizy wartiści własnych macierzy Jacobiego

$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial\,(U, W)} = \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ U - s, & 0 \end{pmatrix}$$

w odpowiednich punktach.

Lemat 2.3. *Funkcja*

$$H(U, W) = \frac{W^2}{2} + \frac{U^3}{6} - \frac{s}{2}\,U^2$$

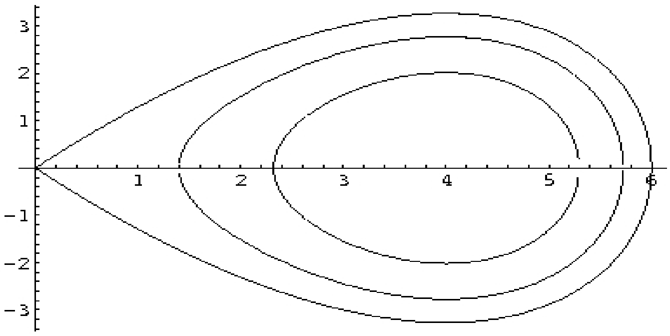
zachowuje stałą wartość na rozwiązaniach układu dynamicznego (2.11).

Dowód jest elementarny.

Lemat 2.4. *Separatryse siodła* $(0, 0)$ *położone w prawej półpłaszczyźnie tworzą gładką krzywą zamkniętą (zwaną pętlą homokliniczną).*

Dowód. Każda krzywa całkowa układu (2.11) przechodząca przez początek układu współrzędnych cechuje się zerową wartością funkcji $H(U, W)$. Stąd krzywa taka może być przedstawiona w poswtaci

$$W = \frac{d\,U}{d\,\xi} = \pm\sqrt{U^2\,(s - U/3)}. \tag{2.12}$$



Rys. 2.1: Portret fazowy układu (2.11)

Ze wzoru (2.12) wynika, że separatryse siodła są symetryczne względem osi pionowej. Rozpatrzmy górną separatrysę:

$$W = \sqrt{U^2\,(s - U/3)}.$$

Wyrażenie pod pierwiastkiem kwadratowym, które jest dodatnie przy małych wartościach funkcji U (zkładamy że $s > 0$) rośnie do pewnej wartości $0 < U_{cr_1}$, a następnie maleje. Łatwo widać, także, że górna separatrysa siodła przecina oś poziomą w punkcie $U_{cr_2} = 3\,s > U_{cr_1}$. Żeby uzmysłowić że górna i dolna separatryse tworzą gładką krzywą zamkniętą zauważmy że

$$\lim_{U \to 3s-0} \frac{dW}{dU} = -\infty,$$

zatem górna i dolna separatryse siodła przecinają się w punkcie $(3\,s,\,0)$ pod kątem prostym, tworąc gładką krzywą zamkniętą.

Portret fazowy układu (2.11) jest więc taki jak to jest pokazane na rys 2.1. Obszar wypełniony orbitam okresowymi jest oddzielony od pozostałych punktów płaszczyzny fazowej $(U,\,W)$ pętlą separatrysy. Pętli tej odpowiada *rozwiązanie solitonowe*, opisujące izolowaną falę wykładniczo zmierzającą do zera gdy $\xi \to \pm\infty$.

Rozwiązanie solitonowe można uzyskać całkując bezpośrednio równanie (2.10). Nasze postępowanie będzie jednak inne. Wiemy że rózwiązanie wyraża się w postaci [2]

$$U = \frac{A}{\cosh^2 B\,\xi}.$$

Podstawiając to do równania (2.10), otrzymamy : $A = 3s, \quad B = \sqrt{s}/2$. Ostatecznie więc

$$U(\xi) = 3\,s\cosh^{-2}\left[\frac{\sqrt{s}}{2}\,\xi\right].$$

[2]jawna postać rozwiązania podana jest, na przykład, w książce R.K. Dodd et al, *Solitons and Nonlinear Wave Equations*, Academic Press, NY, 1982, Ch.I, p. 4.

2.3. Przykład 2. Samopodobne rozwiązanie równania transportu ciepła

Rozpatrzmy równanie

$$u_t - u_{x\,x} = 0. \tag{2.13}$$

Chcemy bezpośrednio znaleźć operatory grupy skalowania, które dopuszcza (2.13). Przekształcenia skończone, jak wiadomo, możemy zadać w postaci

$$\bar{t} = e^{\alpha\, a} t, \quad \bar{x} = e^{\beta\, a} x, \quad \bar{u} = e^{\gamma\, a} u,$$

gdzie $\alpha,\ \beta,\ \gamma$- stałe, a jest (kanonicznym) parametrem grupowym Związek pomiędzy równaniami zapisanymi w starych i nowych zmiennych jest następujący:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} = e^{a(\gamma-\alpha)}\,\frac{\partial\, u}{\partial\, t} - e^{a(\gamma-2\,\beta)}\,\frac{\partial^2\, u}{\partial\, x^2}.$$

Zatem równanie będzie niezmiennicze względem grupy scalingowej w.t.w. gdy

$$\gamma - \alpha = \gamma - 2\,\beta.$$

Oznacza to że stała γ jest dowolna, zaś pomędzy pozostałymi stałymi zachodzi związak $\alpha = 2\,\beta$. Dlatego możemy twierdzić że równanie (2.13) dopuszcza dwie grupy skalowania o generatorach

$$\hat{X}_1 = u\,\frac{\partial}{\partial\, u} \qquad \hat{X}_2 = 2\,t\,\frac{\partial}{\partial\, t} + x\,\frac{\partial}{\partial\, x}.$$

Procedura redukcji grupowej będzie oparta na operatorze

$$\hat{X} = \hat{X}_2 + 2\,c\hat{X}_1,$$

który, oczywiście, też jest generatorem symetrii. Funkcje niezmiennicze, spełniające układ równań zwyczajnych

$$\frac{d\,x}{x} = \frac{d\,t}{2\,t} = \frac{d\,u}{2\,c\,u}$$

mają następującą postać:

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}, \qquad \Omega = \frac{u}{t^c}.$$

Niezmienniki te generują ansatz

$$u = t^c\, W(\xi). \tag{2.14}$$

Po podstawieniu atsatzu (2.14) do równania (2.13), otrzymamy równanie zwyczajne określające funkcję $W(\xi)$:

$$2\,W'' + \xi\,W' - 2\,c\,W = 0. \tag{2.15}$$

Zauważmy teraz, że w przypadku gdy $c = -1/2$, równanie (2.15)można przedstawić w postaci

$$\frac{d}{d\,\xi}\,[2\,W' + \xi\,W] = 0.$$

Całkując to równanie i kładąc stałą całkowania równą zeru, otrzymamy równanie

$$\frac{d\,W}{W} = -\frac{\xi}{2}\,d\,\xi.$$

Całkując po raz drugi otrzymamy wzór

$$W = A\,e^{-\frac{x^2}{4\,t}},$$

z którego wynika że rozwiąnie niezmiennicze ma postać

$$u(t,\,x) = \frac{A}{\sqrt{t}}\,e^{-\frac{x^2}{4\,t}}. \tag{2.16}$$

Uwaga 2.1. *Unormowane do jedynki rozwiązanie niemiennicze*

$$E(t,\,x) = \frac{1}{\sqrt{4\,\pi\,t}}\,e^{-\frac{x^2}{4\,t}}$$

jest rozwiązaniem fundamentalnym operatora $L = \partial_t - \partial_{x\,x}$*. Oznacza to że jedyne rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego*

$$u_t - u_{x\,x} = 0, \qquad u(0,\,x) = \varphi(x) \tag{2.17}$$

możma przedstawić w postaci splotu [3]

$$u(t,\,x) = E * \varphi(t,\,x) \;\equiv\; \frac{1}{\sqrt{4\,\pi\,t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\,t}}\,\varphi(y)\,d\,y,$$

o ile funkcja φ *jest taka że całka w prawej stronie jest dobrze określona.*

Uwaga 2.2. *Funkcja (2.16) z* $A = \frac{Q}{\sqrt{4\,\pi}}$ *jest jedynym rozwiązaniem zagadnienia o wybuchu cieplnym*

$$u_t = u_{x\,x}, \tag{2.18}$$

$$u(0,\,x) = 0, \qquad x \neq 0, \tag{2.19}$$

$$\int_{\infty}^{+\infty} u(t,\,x) = Q. \tag{2.20}$$

Rozwiązanie to zostało wyprowadzone po raz pierwszy na podstawie teoorii wymiarów i podobieństwa [4].

[3] Definicja oraz własności splotu są przedstawione, na przykład, w pozycji Vsevolod Vladimirov, *"Wstęp do teorii dystrybucji"*, AGH, Kraków, 2007

[4] Barenblatt G.I., *Similarity, selfsimilarity and intermediate asymptotics*, Constantin Bureau, New York, 1994.

2.4. Rozmnażanie rozwiązań za pomocą symetrii

Załóżmy że układ RRCz

$$F^{\nu}(x, u, \partial u, ...\partial^k u) = 0, \quad x \in R^n, \quad u \in R^m, \quad \nu = 1, ..., s \tag{2.21}$$

dopuszcza grupę jednoparametrową

$$\begin{aligned} \bar{x}^i &= f^i(x, u; a), \quad i = 1, ...n, \\ \bar{u}^{\alpha} &= g^{\alpha}(x, u; a), \quad \alpha = 1, ...m, \end{aligned} \tag{2.22}$$

oraz że znane jest jakieś rozwiązanie szczególne $u = \theta(x)$ tego układu. Jak wiadomo, symetrie odwzorowują zbiór rozwiązań danego równania w siebie. Dlatego zbiór

$$\begin{aligned} \bar{x}^i &= f^i(x, \theta(x); a), \quad i = 1, ...n, \\ \bar{u}^{\alpha} &= g^{\alpha}(x, \theta(x); a), \quad \alpha = 1, ...m, \end{aligned}$$

zadaje pewne nowe rozwiązanie układu (2.21). Jeżeli w tym układzie przedstawić x jako funkcję nowych zmiennych

$$x = f(\bar{x}, \bar{u}; -a),$$

wówczas wzór

$$\bar{u} = g\left[f(\bar{x}, \bar{u}; -a), \theta\left(f(\bar{x}, \bar{u}; -a)\right); \; a\right] \tag{2.23}$$

określa postać niejawną poszukiwanego rozwiązania zapisaną w nowych zmiennych.

Rozpatrzmy równanie KdV

$$u_t + 6\, u\, u_x + u_{xxx} = 0. \tag{2.24}$$

Zachodzi

Lemat 2.5. *Funkcja*

$$u = -\frac{2}{x^2} \tag{2.25}$$

spełnia równanie (2.24).

Do "rozmnażania " rozwiązania (2.25) wykorzystamy generator

$$\hat{X} = (a_1 + 6\, t)\frac{\partial}{\partial x} + a_4 \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial u}.$$

należący do algebry symetrii równania (2.24). Użycie metody "rozmanażania" wymaga scałkowania równań Liego

$$\frac{d\bar{x}}{d\varepsilon} = (a_1 + 6\,\bar{t}), \qquad \bar{x}(0) = x,$$
$$\frac{d\bar{t}}{d\varepsilon} = a_4, \qquad \bar{t}(0) = t,$$
$$\frac{d\bar{u}}{d\varepsilon} = 1, \qquad \bar{u}(0) = u.$$

Rozwiązując najpierw drugie równanie, a potem pierwsze i trzecie, otrzymamy następujące przekształcenia skończone:

$$\bar{x} = x + a_1\,\varepsilon + 6\,t\,\varepsilon + 3\,a_4\,\varepsilon^2,$$
$$\bar{t} = t + a_4\,\varepsilon,$$
$$\bar{u} = \varepsilon + u.$$

Wykkorzystując przekształcenia skończone, przedstawiamy rozwiązanie w postaci (2.23):

$$\bar{u} = u + \varepsilon = \varepsilon + \theta\,(f(\bar{x},\,\bar{u};-a)) = \varepsilon - \frac{2}{[\bar{x} - (a_1\, + 6\,\bar{t}\,)\varepsilon + 3\,a_4\,\varepsilon^2]^2}.$$

Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że uzyskana funkcja $\bar{u}\,(\bar{t},\,\bar{x})$ spełnia równanie

$$\bar{u}_{\bar{t}} + 6\,\bar{u}\,\bar{u}_{\bar{x}} + \bar{u}_{\bar{x}\,\bar{x}\,\bar{x}} = 0.$$

2.5. Problem klasyfikacji grupowej

W ogromnej ilości przypadków równania modelujące procesy rzeczywiste mieszczą nieznane funkcje których konkretyzacja jest bardzo trudna, lub wręcz niemożliwa. W takich sytuacjach metody symetrii są bardzo pomocnym narzędziem, pozwalającym wyszczególnić pewne klasy modeli posiadające bardziej szeroką symetrię. Na elementy nieznane narzucane są w taki sposób pewne ograniczenia. Wyszczególnienie takich modeli nazywa się problemem klasyfikacji grupowej. Rozwiązanie problemu klasyfikacji grupowej będzie przedstawione na przykładzie nieliniowego równania transportu

$$u_1 = [K(u)\,u_2]_2 \equiv K'(u)\,u_2^2 + K(u)\,u_{2\,2}. \tag{2.26}$$

Zakładamy że $K(u)$ jest gładką funkcją odmienną od stałej. Jak zwykle, generator grupy niezmienniczości przedstawiamy w postaci

$$\hat{X} = \xi^1(x_1,\,x_2,\,u)\,\frac{\partial}{\partial\,x_1} + \xi^2(x_1,\,x_2,\,u)\,\frac{\partial}{\partial\,x_2} + \eta(x_1,\,x_2,\,u)\,\frac{\partial}{\partial\,u}.$$

Działając dwa razy przedłużonym operatorem

$$\hat{X}_{(2)} = \hat{X} + \zeta^1 \frac{\partial}{\partial u_1} + ... + \zeta^{22} \frac{\partial}{\partial u_{22}}$$

na równanie (2.26), otrzymamy równanie określające

$$\zeta^1 = K''\eta\, u_2^2 + 2\, u_2\, K'\, \zeta^2 + K'\, \eta\, u_{2\,2} + K\, \zeta^{2\,2},$$

które ma być spełnione pod warunkiem, że $u_1 = K'(u)\, u_2^2 + K(u)\, u_{2\,2}$.

Specyfiką układu równań określających które uzuskuje się w tym przypadku po zastosowaniu procedury rozszczepienia jest to że równania te mieszczą jako "dowolny element" funkcję $K(u)$ oraz jej pochodne. Będziemy więc, po-pierwsze, usiłowali znaleźć maksymalną algebrę niezmienniczości, którą dopuszcza równanie (2.26) przy dowolnej funkcji $K(u)$. Po odpowiedzi na to pytanie, zabierzemy się do wyszczególniania wszyelkich możliwych postaci funkcji $K(u)$ prowadzących do rozszerzenia symetrii.

Przystępując do procedury rozszczepienia, zauważamy że funkcja $\zeta^{2\,2}$ po "zrzutowaniu" na rozmaitość (2.26) pozostaje pod wieloma wględami podobną do analogicznej funkcji spotkanej w poprzednich obrachunkach. W szczególności, tylko ta jedna współrzędna generatora $\hat{X}_{(2)}$ zawiera wyrażenie $u_{1\,2}\, (\xi^1_2 - u_2\, \xi^1_u)$, które musi być przyrównane do zera. Stąd natychmiast wynika, że

$$\xi^1 = \xi^1(x_1). \tag{2.27}$$

Dalej, współczynnik przy $u_2\, u_{2\,2}$ jest proporcjinalny do ξ^2_u, z czego wynika że

$$\xi^2 = \xi^2(x_1,\, x_2). \tag{2.28}$$

Po uwzględnieniu tego, równanie określające można przedstawić w następującej postaci:

$$\begin{aligned} K(u) \left\{ \eta_{22} + 2\, u_2\, \eta_{2u} + u_{22}\, \eta_u + u_2^2\, \eta_{uu} - 2\, u_{22}\xi^2_2 - u_2\xi^2_{22} \right\} + \\ + K'' u_2^2\, \eta + K' \left[2\, u_2 \left(\eta_2 + \eta_u\, u_2 - u_2\, \xi^2_2 \right) + \eta\, u_{22} \right] = \\ = \eta_1 - u_2\, \xi^2_1 + \left(\eta_u - \xi^1_1 \right) K'\, u_2^2 + \left(\eta_u - \xi^1_1 \right) K\, u_{22}. \end{aligned}$$

Przyrównując do zera współczynniki przy poszczególnych pochodnyc funkcji u, otrzymamy:

$$u_{22}: \quad K \left(\xi^1_1 - 2\, \xi^2_2 \right) + K'\, \eta = 0, \tag{2.29}$$

$$u_2^2: \quad K\, \eta_{uu} + K' \left(\xi^1_1 - 2\, \xi^2_2 + \eta_u \right) + K''\, \eta = 0, \tag{2.30}$$

$$u_2: \quad \xi^2_1 + 2\, K'\, \eta_2 + K \left(2\, \eta_{2u} - \xi^2_{22} \right) = 0, \tag{2.31}$$

$$1: \quad K\, \eta_{22} - \eta_1 = 0. \tag{2.32}$$

Z równania (2.29) otrzymuuemy:

$$\eta = \Psi\, f(x_1,\, x_2) = \Psi\, \left(2\,\xi^2_2 - \dot{\xi}^1\right), \qquad \Psi = \frac{K}{K'}. \tag{2.33}$$

Podstawiając (2.33) do (2.32), otrzymujemy równanie

$$K(u)\,\xi^2_{222} = 2\,\xi^2_{12} - \ddot{\xi}^1.$$

Stąd

$$\xi^2 = C(x_1) + B(x_1)\,x_2 + A\,x_2^2, \tag{2.34}$$

$$B = \frac{1}{2}\,\dot{\xi}^1 + \gamma, \tag{2.35}$$

$$\eta = \Psi\,\left(4\,A\,x_2 + 2\,\gamma\right). \tag{2.36}$$

Podstawiając (2.34)-(2.36) do (2.31) otrzymamy:

$$\begin{aligned} & f\,\{K\Psi'' - K' + K'\Psi' + K''\,\Psi\} = \\ & = f\,K'\left\{\frac{K}{K'}\,\Psi' + \Psi' - 1 + \frac{K''}{K'}\right\}. \end{aligned}$$

Zauważmy że

$$\Psi' = \left(\frac{K}{K'}\right)' = \frac{K'K' - K\,K''}{(K')^2} = 1 - \Psi\,\frac{K''}{K'}.$$

Stąd otrzymujemy wzór

$$f(x_1,\, x_2)\,K'\,\Psi'' = 0. \tag{2.37}$$

Wzór (2.37) jest podstawą klasyfikacji możliwych przypadków rozszerzenia symetrii.

Zanim jednak przjdziemy do klasyfikacji, zauważmy że w przypadku dowolnej funkcji $K(u)$ wzór (2.37) będzie tożsamościowo równy zeru jeżeli

$$f = 4\,Ax_2 + \gamma = 0,$$

czyli gdy $A = \gamma = 0$. Przy takich wartościach parametrów, podstawienie (2.34)-(2.36) do wzoru (2.29) otrzymujemy:

$$C = const, \qquad \xi^1 = M + N\,x_1.$$

Zachodzi więc

Twierdzenie 2.1. *W przypadku dowolnej funkcji $K(u)$, równanie (2.26) dopuszcza operatory*

$$\hat{X}_1 = \frac{\partial}{\partial\,x_1}, \quad \hat{X}_2 = \frac{\partial}{\partial\,x_2}, \tag{2.38}$$

$$\hat{X}_3 = 2\,x_1\,\frac{\partial}{\partial\,x_1} + \,x_2\,\frac{\partial}{\partial\,x_2}. \tag{2.39}$$

Jeżeli $f(x_1, x_2) \neq 0$, wówczas

$$\Psi'' \equiv \left(\frac{K}{K'}\right)'' = 0.$$

stąd

$$\Psi' = \left(\frac{K}{K'}\right)' = C_1 = const,$$

i

$$K(u) = \lambda\,(u+\kappa)^{\nu}\,, \tag{2.40}$$

gdzie $\nu = C_1^{-1}$.

Podstawiając (2.40) do (2.29), otrzymamy

$$\frac{1}{2}\,\ddot{\xi}^1(x_1)\,x_2 + \dot{C}(x_1) + K\,A\,\left(6 - 8/\nu\right) = 0.$$

Stąd natychmiast wynika że

$$\xi^1 = M + N\,x_1, \qquad C = const,$$

oraz $A = 0$ jeżeli $6 - 8/\nu \neq 0$.

Zachodzi więc

Twierdzenie 2.2. *W przypadku gdy $K(u) = \lambda\,(u+\kappa)^{\nu}$ i $\nu \neq -4/3$ równanie (2.26) dopuszcza operatory*

$$\begin{aligned} \hat{X}_1 &= \frac{\partial}{\partial\,x_1}, \quad \hat{X}_2 = \frac{\partial}{\partial\,x_2}, \\ \hat{X}_3 &= 2\,x_1\,\frac{\partial}{\partial\,x_1} + \,x_2\,\frac{\partial}{\partial\,x_2}, \\ \hat{X}_4 &= \frac{2}{\nu}\,(u+\kappa)\frac{\partial}{\partial\,u} + \,x_2\,\frac{\partial}{\partial\,x_2}. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Dla szczególnego przypadku zachodzi

Twierdzenie 2.3. *W przypadku gdy $K = \lambda\,(u+\kappa)^{-4/3}$, równanie (2.26), pomino (2.41), dopuszcza operator*

$$\hat{X}_5 = x_2^2\frac{\partial}{\partial\,x_2} + \frac{4}{\nu}\,x_2\,(u+\kappa)\frac{\partial}{\partial\,u}. \tag{2.42}$$

Ostatni przypadek powstaje gdy $C_1 = \nu^{-1} = 0$. Wówczas $K/K' = \mu$ i

$$K(u) = C_2 \exp[\sigma u], \tag{2.43}$$

gdzie $\sigma = 1/\mu$. Przy takiej funkcji $K(u)$ rownanie (2.31) przybiera postać

$$\frac{x_2}{2}\ddot{\xi}^1(x_1) + \dot{C}(x_1) + 4AK(u) = 0.$$

Stąd

$$\xi^1 = M + x_1 N, \qquad \xi^2 = \left(\frac{1}{2} N + \gamma\right) x_2 + C, \qquad \eta = 2\gamma \mu,$$

a więc zachodzi

Twierdzenie 2.4.

Przy $K = C_2 \exp[\sigma u]$ *równanie (2.26) dopuszcza algebrę*

$$\begin{aligned} \hat{X}_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \hat{X}_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ \hat{X}_3 &= 2 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ \hat{X}_4 &= 2 \mu \frac{\partial}{\partial u} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}. \end{aligned} \tag{2.44}$$

2.6. Symetrie i całkowanie równań różniczkowych zwyczajnych

Równania różniczkowe zwyczajne posłużyły głównym źródłem inspiracji dla twórcy teorii grup ciągłych. Dla równań zwyczajnych istnienie symetrii implikuje możliwość obniżenia rzędu. Jeżeli skalarne RRZ rzędu n posiada $n-$paremetrową grupę symetrii, wówczas przy pewnych dodatkowych założeniach natury algebraicznej jest ono zupełnie całkowalne.

2.6.1. Równanie skalarne rzędu 1.

Algorytm poszukiwania grupy którą dopuszcza RRZ nie różni się od odpowiedniego algorytmu dla RRCz. Mimo to, skalarne równania zwyczajne rzędu pierwszego stanowią pewien wyjątek gdyż standardowy algorytm poszukiwania symetrii w tym przypadku nie jest efektywny.

Rozpatrzmy RRZ

$$\frac{du}{dx} = F(x, u). \tag{2.45}$$

Generator grupy 1-parametrowej poszukujemy w postaci

$$\hat{X} = \xi(x, u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, u)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Działając pierwszym przedłużeniem tego operatora

$$\hat{X}_{(1)} = \hat{X} + \zeta^1 \frac{\partial}{\partial u'} \qquad \zeta^1 = \eta_x + u' (\eta_u - \xi_x) - (u')^2 \, \xi_u$$

na równanie, otrzymamy:

$$\eta_x + F(x,\, u) \, [\eta_u - \xi_x - \xi_u \, F] - \xi \, F_x - \eta \, F_u = 0. \tag{2.46}$$

Widać że równanie to nie rozszczepia się. Dlatego w przypadku ogólnym rozwiązać go nie jest łatwiej niż scałkować równanie wyjściowe.

W przypadku RRZ rzędu 1 teoria symetrii wykorzystuje się niejako w odrotnej kolejności, mianowicie, znając symetrię można ją bardzo efektywnie wykorzystać. Jest na to kilka sposobów.

Sposób I. Metoda prostowania pola wektorowego. Jeżeli odwzorowanie $(x, u) \to (t, s)$ jest dyfeomorfizmem, to operator $\hat{X} = \xi(x,\, u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,\, u)\frac{\partial}{\partial u}$ w nowych zmiennych będzie miał postać

$$\hat{X}|_{(t,s)} = \hat{X}[t]\frac{\partial}{\partial t} + \hat{X}[s]\frac{\partial}{\partial s}.$$

Prostowanie pola polega na narzuceniu warunków

$$X[t] = 0, \qquad X[s] = 1. \tag{2.47}$$

Jeżeli warunki te są spełnione, to $\hat{X}|_{(t,s)} = \frac{\partial}{\partial s}$. Ponieważ operator translacji jest nieprzedłużalny, oznacza to że przejście do nowych zmiennych prowadzi do równania

$$\frac{d\,s}{d\,t} = \tilde{F}(t),$$

którego rozwiązanie wyraża się kwadraturą

$$s = \int \tilde{F}(t) \, d\,t + C.$$

Przykład. Równanie

$$\frac{d\,u}{d\,x} = F\left(\frac{u}{x}\right)$$

dopuszcza grupę scalingową $\bar{x} = e^a \, x, \quad \bar{u} = e^a \, u$ z generatorem

$$\hat{X} = x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}.$$

Rozwiązując równania (2.47) otrzymamy

$$t = \frac{u}{x}, \qquad s = \log x.$$

Pry takiej zamianie równanie wyjściowe przechodzi w

$$\frac{d\,s}{d\,t} = \frac{1}{F(t) - t}.$$

Całkując go otrymamy kwadruaturę

$$s = C + \int \frac{d\,t}{F(t) - t}. \tag{2.48}$$

Metoda czynnika całkującego. Równanie (2.45) można przedstawić (na ogół na wiele sposobów) w postaci Pfaffa

$$P(x,\,u)\,d\,x + Q(x,\,u)\,d\,u = 0. \tag{2.49}$$

Zachodzi

Twierdzenie 2.5.*Niech (2.45) (a zatem i (2.49)) dopuszcza operator*

$$\hat{X} = \xi(x,u)\frac{\partial}{\partial\,x} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial\,u}.$$

Wtedy

$$\mu = \frac{1}{\xi\,P + \eta\,Q} \tag{2.50}$$

jest czynnikiem całkującym

Dowód. Jeżeli μ jest czynnikiem całkującym, to istnieje gładka funkcja $\Phi(x,\,u)$ taka że

$$\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,x} = \frac{P}{\xi\,P + \eta\,Q}, \quad \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,u} = \frac{Q}{\xi\,P + \eta\,Q}.$$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to byfunkcja μ była czynnikiem całkującym jest równość pochodnych mieszanych

$$\frac{\partial}{\partial\,u}\left(\frac{P}{\xi\,P + \eta\,Q}\right) = \frac{\partial}{\partial\,x}\left(\frac{Q}{\xi\,P + \eta\,Q}\right).$$

Rozpisując tę równość otrzymujemy, po uwzględnieniu tego że $F = -P/Q$, równość (2.46).

Przykład. Rozpatrzmy znów równanie

$$\frac{d\,u}{d\,x} = F\left(\frac{u}{x}\right),$$

dopuszczające operator

$$\hat{X} = x\frac{\partial}{\partial\,x} + u\frac{\partial}{\partial\,u}.$$

Zapiszmy go w postaci

$$F(u/x)dx - d\,u = 0.$$

z której wynika że $P = F(u/x),\ \ Q = -1$. Z powyższego wynika że czynnik całkujący ma postać

$$\mu = \frac{1}{x\,F(u/x) - u}.$$

Zatem mamy:

$$\frac{F}{xF(u/x) - u}\,dx - \frac{1}{xF(u/x) - u}\,d\,u = d\,\Phi = 0$$

Korzystamy z tego że dałka z żóżniczki zupełnej nie zależy od drogi całkowania. Całkujemy po drodze ABC gdzie AB - odcinek prostej łączący punkt $(x_0,\,u_0)$ z $(x_0,\,u)$, BC - odcinek łączący $(x_0,\,u)$ z $(x,\,u)$. Drogę całkowania wybiramyu w tai sposób by nie zawierała ona osobliwości funkcji F. W wyniku otrzymamy kwadraturę

$$-\int_{u_0}^{u} \frac{1}{xF(u/x_0) - u}\,d\,u + \int_{x_0}^{x} \frac{F(u/x)}{xF(u/x) - u}\,dx = C.$$

Załóżmy dla konkretności że $F(z) = z^2 + z$. Wtedy, kładąc całkując równanie Pfaffa otrymamy rozsiązanie w postaci

$$u = \frac{x}{C = \log x}.$$

Pokrywa się ono z wynikiem, który otrzymuje się przy podstawieniu odpowiedniej funkcji do wzoru (2.48).

2.6.2. O maksymalnej grupie symetrii RRZ rzędu 2.

Twierdzenie 2.6.*Równanie*

$$u''(x) = 0 \tag{2.51}$$

dopuszcza ośmiowymiarową algebrę Liego.

Dowód. Stosując kryterium niezmienniczości, otrzymujemy następujące równanie:

$$\eta_{xx} + \eta_{xu}\,u_x + u_x\,(\eta_{ux} + \eta_{uu}\,u_x) - u_x\,[\xi_{xx} + \xi_{xu}\,u_x + u_x\,(\xi_{xu} + \xi_{uu}\,u_x)] = 0.$$

Przyrównując do zera współczynnik przy u_x^3, otrzymujemy $\xi_{uu} = 0$. Stąd

$$\xi = \alpha(x) + \beta(x)\,u. \tag{2.52}$$

Przyrównując do zera współczynnik przy u_x^2, otrzymamy $\eta_{uu} = 2\,\xi_{u\,x}$. Całkując dwa razy po zmiennej u, uzyskamy wzór

$$\eta = u^2\,\beta_x + u\,\gamma(x) + \delta(x). \tag{2.53}$$

Przyrównując do zera współczynnik przy u_x, z uwzględnieniem (2.52) oraz (2.53), otrzymamy

$$2\,(2\,\beta_{xx}\,u + \gamma_x = \alpha_{xx} + u\,\beta_{xx})\,.$$

Stąd

$$\beta = M + N\,x, \qquad \gamma = const. \tag{2.54}$$

Przyrównując do zera pozostałe wyrażenie, z uwzględnieniem (2.52)-(2.54), otrzymamy:

$$\eta_{xx} = \frac{1}{2}\alpha_{xxx}\,u + \delta_{xx} = 0.$$

Rozwiązyjąc to równanie otrzymujemy ostatecznie wzór

$$\xi = L + p\,x + q\,x^2 + (M + N\,x)\;u, \tag{2.55}$$

$$\eta = M\,u^2 + \left[\frac{1}{2}\,(2\,q\,x + p) + R\right]\;u + s + k\,x. \tag{2.56}$$

Wszystkie parametry występujące w powyższych wzorach są dowolnymi stałymi. Wydhodząc z tego, wyszczególniamy następujące niezeleżne generatory grup jednoparametrowych:

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{\partial}{\partial\,x},\\
X_2 &= \frac{\partial}{\partial\,u},\\
X_3 = 2\,x\,\frac{\partial}{\partial\,x} &+ u\,\frac{\partial}{\partial\,u},\\
X_4 &= x\,\frac{\partial}{\partial\,u},\\
X_5 &= u\,\frac{\partial}{\partial\,x},\\
X_6 &= u\,\frac{\partial}{\partial\,u},\\
X_7 = u\,x\,\frac{\partial}{\partial\,x} &+ u^2\,\frac{\partial}{\partial\,u},\\
X_8 = u\,x^2\,\frac{\partial}{\partial\,x} &+ u\,x\,\frac{\partial}{\partial\,u}.
\end{aligned}$$

Stąd mamy tezę.

Twierdzenie 2.7. *Wymiar maksymalnej algebry dopuszczanej przez RRZ*

$$y'' = \omega(x,\, y,\, y') \tag{2.57}$$

przy dowolnej gładkiej funkcji $\omega(\cdot, \cdot, \cdot)$ *wynosi 8.*

Dowód. (ad abs) Niech (2.57) dopuszcza 9 niezależnyc generatorów $X_1,\, ..., X_9$. Kombinacja liniowa tych generatorów, którą oznczamy jako

$$\hat{X} = \sum_{k=1}^{9} a_k\, X_k,$$

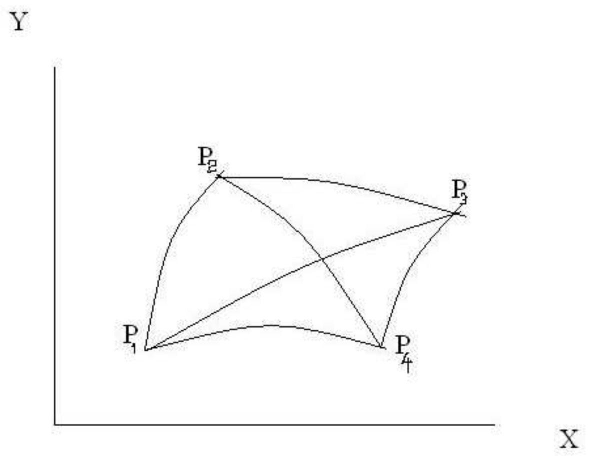
gdzie a_k-dowolne stałe, jest, oczywiście, generatorem symetrii. Ze standardowego kursu wiadomo, że zarówno zagadnienie początkowe

$$y'' = \omega(x,\, y,\, y'), \qquad y(x_0) = y_0,\;\; y'(x_0) = y_1 \tag{2.58}$$

jak i zagadnienie

$$y'' = \omega(x,\, y,\, y'), \qquad y(x_0) = y_0,\;\; y(x_1) = y_1, \qquad x_0 \neq x_1,\;\; y_0 \neq y_1 \tag{2.59}$$

posiada jedyne lokalne rozwiązanie. Rozpatrzymy cztery dowolne punkty $P_1, ...P_4 \in R^2$ nie leżące na jednej prostej. Określają one (na mocy (2.59)) w sposób jednoznaczny sześć rozwiązań pokazanych na rys. 2.2.



Rys. 2.2:

Parametr"y $\{a_k\}_{k=1}^9$, można dobrać w taki sposób żeby punkty $P_1, ...P_4$ były punktami stałymi grupy jednoparametrowej G_a generowanej przez $\hat{X}$. Warunek ten będzie spełniony, jeżeli zachodzą równoći

$$\xi(P_i) = \sum_{k=1}^{9} a_k\, \xi_k(P_i) = 0, \qquad i = 1, ...4,$$
$$\eta(P_i) = \sum_{k=1}^{9} a_k\, \eta_k(P_i) = 0, \qquad i = 1, ...4.$$

Spełnienie tych równości przy odpowiedznim doborze stałych a_k, jest oczywiście możliwe ze względu na założenie o niezależnośći generatorów X_k.

Jak wiadomo, grupa G_a odwzorowuje rozwiązania w rozwiązania. Ponieważ P_k pozostają w miejscu, więc szcześć rozwiązań łaczących te punkty przechodzą w siebie. Na podstawie (2.58) stwierdzamy również że w każdym punkcie P_k bez zmian pozostają trzy pochodne które są styczne do trzech rozwiązań łączących P_k z trzema pozostałymi punktami:

$$\bar{y}_i' = y_i' + \zeta^1(P_k) + O(a^2) = y_i' + O(a^2), \quad i = 1, 2, 3.$$

Innymi słowy równanie

$$\zeta^1(P_k) = \eta_x + y'\,(\eta_y - \xi_x - \xi_y\, y')\,|_{P_k} = c_k + d_k\, y' + e_k\, y'' = 0,$$

powinno mieć trzy różne rozwiązania. Jest to możliwe jedynie gdy $c_k = d_k = e_k = 0$. Stąd wynika że $\zeta^1(P_k) \equiv 0$ i wszystkie pochodne pozostają niezmienne. To, z kolei, oznacza, że wszystkie krzywe całkowe równania (2.57) przechodzące przez P_k są odwzorowywame w siebie.

Dalej, dowolny punkt P i P_k można połączyć rozwiązaniem (o ile te dwa punkty są bliske). Skoro rozwiązania pod wpływem G_a przechodzą w rozwiązania, więc P pod wpływem pola $\hat{X}$ może jedynie "ślizgać" się wzdłuż rozwiązania. Ale taki "poślizg" nie jest możliwy, ponieważ P łączy się krzywymi całkowymi z pozostałymi trzema punktami do których można zastosować powyższe rozumowanie.

Zatem $\hat{X}$ jest polem zerowym, a więc zbiór wektorów $\{X_k\}_{k=1}^9$ jest liniowo zależny.

2.6.3. RRZ rzędu 2: zastosowanie symetrii do obniżenia rzędu. *Perwszy sposób* wykorzystania symetrii związany jest z ideą prostowania pola wektorowego. Jeżeli RRZ

$$u'' = \omega(x,\, u,\, u')$$

dopuszcza operator

$$X = \xi(x,\, u)\frac{\partial}{\partial\, x} + \eta(x,\, u)\frac{\partial}{\partial\, u}$$

wówczas możemy dokonać zamiany zmiennej $(x,\, u) \to (t,\, W)$ żądajac by

$$X|_{t,W} = 1\,\frac{\partial}{\partial W}.$$

W nowych zmiennych równanie przybiera postać

$$W'' = \Omega(t,\, W').$$

Dokonując zamiany zmiennej $Z = W'$, otrzymamy RRZ rzędu pierwszego:

$$Z' = \Omega(t,\, Z).$$

Przykład. Rozpatrzmy równanie

$$u_{xx} + p(x)\, u_x + q(x)\, u = 0.$$

Jak każde liniowe jednorodne równanie różniczkowe, dopuszcza ono operator $\hat{X} = u\,\partial/\partial\, u$. Całkując równania

$$X[t] = 0, \qquad X[W] = 1,$$

otrzymamy zmiennie prostujące pole wektorowe:

$$t = x, \qquad W = \log u.$$

W nowych zmiennych równanie wyjściowe przyubiera postać

$$e^W \left\{ W_{tt} + W_t^2 + p(t)\, W_t + q(t) \right\} = 0.$$

Dzieląc przez e^W oraz wprowadzając zmienną $Z = W_t$, otrzymujemy równanie Riccatiego

$$Z_t + Z^2 + p(t)\, Z + q(t) = 0.$$

Drugi sposób polega na przejściu do współrzędnych niezmienniczych.

Definicja 2.2. *Niezmiennikiem rzędu n operatora $X = \xi(x,\, u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,\, u)\frac{\partial}{\partial u}$ nazywa się dowolna funkcja $\Phi(x,\, u,\, \partial\, u, \ldots .\partial^n\, u)$ taka że*

$$X_{(n)}\Phi = 0.$$

Zachodzi

Twierdzenie 2.8. *Jeżeli $y = f(x,\, u^{(n)})$, $w = g(x,\, u^{(n)})$ są niezmiennikami rzędu n, to*

$$\frac{d\,w}{d\,y} = \frac{D_x\, w}{D_x\, y} \tag{2.60}$$

jest niezmiennikiem rzędu $n+1$.

Wniosek 2.2. *Jeżeli $y = f(x, u)$, $w = g(x, u, u')$ są niezmiennikami rzędu 0 i 1, odpowiednio, to*

$$\frac{d\,w}{d\,y} = \frac{D_x\,w}{D_x\,y} \qquad \textit{jest niezmiennikiem. rz. } 2; \tag{2.61}$$

$$\frac{d^2\,w}{d\,y^2} = \frac{D_x\,\frac{d\,w}{d\,x}}{D_x\,y} \qquad \textit{jest niezmiennikiem. rz. } 3; \tag{2.62}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{2.63}$$

Odwzorowanie

$$x,\, u,\, u',\, \ldots.u^{(n)} \;\to\; y,\, w,\, \frac{d\,w}{d\,y},\, \ldots.\frac{d^{n-1}w}{d\,y^{n-1}}$$

jest dyfeomorfizmem obinżającym rząd RRZ.

Przykład. Rozpatrzmy równanie

$$u'' + u' - \frac{u}{x} = 0.$$

Równanie to dopuszcza operator $X = x\frac{\partial}{\partial\,u}$ (dlaczego?)

Rozwiązując równanie

$$X_{(1)}\omega \;\equiv\; x\,\frac{\partial\,\omega}{\partial\,u} + \frac{\partial\,\omega}{\partial\,u'} = 0,$$

znajdziemymy niezmienniki rzędu 0 i 1:

$$y = x, \qquad u' - \frac{u}{x} = w.$$

Niezmiennik rzędu 2 znajdujemy wykorzystując powyższy wniosek. Ma on postać

$$\frac{d\,w}{d\,y} = u'' - \frac{w}{y}.$$

W nowych zmiennych równanie przybiera postać całkowalnego RRZ rzędu 1:

$$\frac{d\,w}{d\,y} + \left(\frac{1}{y} + 1\right) w = 0.$$

Po scałkowaniu otrzymujemy:

$$w = \frac{C}{x}\,e^{-x}.$$

Przechodząc do starych zmiennych otrzymujemy RRZ rzędu 1:

$$u' - \frac{1}{x}\,u = \frac{C}{x}\,e^{-x}.$$

Równanie to całkuje się metodą uzmienniania stałej.

2.6.4. Klasyfikacji RRZ rzędu 2 dopuszczających algebrę dwuwymiarową. okazuje się, że RRZ rzędu 2 dopuszczająca parę liniowo niezależnych generatorów $X_1,\ X_2$ jest całkowalne. Na początku sformułujemy następujące stwierdzenie.

Lemat 2.6.*Za pomocą liniowej zamiany zmiennych*

$$\tilde{X}_1 = \alpha_{11}\, X_1 + \alpha_{12}\, X_2,$$
$$\tilde{X}_2 = \alpha_{21}\, X_1 + \alpha_{22}\, X_2,$$

można zawsze uzyskać jedną z następujących relacji komutacyjnych:

$$[\tilde{X}_1, \tilde{X}_2] = 0 \ \ lub \ \ [\tilde{X}_1, \tilde{X}_2] = \tilde{X}_1.$$

Powyższe stwierdzenie stanowi podstawę klasyfikacji grupowej RRZ rzędu 2 dopuszczających dwa operatory symetrii.

Zaczniemy od przypadku komutujących operatorów. Dokonując zamiany zmiennych $(x, u) \to (t, s)$ można zawsze uzyskać reprezentację w której

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial\, s}, \qquad X_2 = a(t,s)\frac{\partial}{\partial\, s} + b(t,s)\frac{\partial}{\partial\, t}.$$

Z tego że operatory komutują wynika że $a_s = b_s = 0$, czyli że

$$X_2 = a(t)\frac{\partial}{\partial\, s} + b(t)\frac{\partial}{\partial\, t}.$$

Dalej, wykorzystując zamianę zmiennych $y = s + h(t), \quad v = v(t)$ otrzymamy:

$$X_2 = a(t)\frac{\partial}{\partial\, y} + b(t)\left[h'(t)\frac{\partial}{\partial\, y} + v'(t)\frac{\partial}{\partial\, v}\right] = [a(t) + b(t)\, h'(t)]\,\frac{\partial}{\partial\, y} + b(t)\, v'(t)\,\frac{\partial}{\partial\, v}.$$

Jeżeli $b(t) = 0$, to wybieramy $a = v$, i to daje reprezentację

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial\, y}, \qquad X_2 = v\,\frac{\partial}{\partial\, y}. \tag{2.64}$$

Jeżeli $b \neq 0$, wówczas kładziemy $v' = 1/b$, $h' = -a/b$ i to daje reprezentację

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial\, y}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial\, v}. \tag{2.65}$$

Z powyższej konstrukcji wynika, że oprócz relacji komtacyjnych ważną charakterystyką jest wielkość

$$\delta = X_1\, \vee\, X_2 = \det\begin{pmatrix} \xi_1, & \eta_1 \\ \xi_2, & \eta_2 \end{pmatrix}.$$

Można wykazać że poprawne jest następujące stwierdzenie.

Twierdzenie 2.9.

1. *Jeżeli* $[X_1,\, X_2] = 0$ *i* $\delta \neq 0$ *wówczas istnieje zamiana zmiennych* $(x,\, u) \to (t, s)$ *taka że*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial\, s}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial\, t}, \quad i \quad s'' = F(s'). \tag{2.66}$$

2. *Jeżeli* $[X_1,\, X_2] = 0$ *i* $\delta = 0$ *wówczas istnieje zamiana zmiennych* $(x,\, u) \to (t, s)$ *taka że*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial\, s}, \quad X_2 = t\,\frac{\partial}{\partial\, s}, \quad i \quad s'' = G(t). \tag{2.67}$$

3. *Jeżeli* $[X_1,\, X_2] = X_1$ *i* $\delta \neq 0$ *wówczas istnieje zamiana zmiennych* $(x,\, u) \to (t, s)$ *taka że*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial\, s}, \quad X_2 = t\,\frac{\partial}{\partial\, t} + s\,\frac{\partial}{\partial\, s}, \quad i \quad s'' = \frac{H(s')}{t}. \tag{2.68}$$

4. *Jeżeli* $[X_1,\, X_2] = X_1$ *i* $\delta = 0$ *wówczas istnieje zamiana zmiennych* $(x,\, u) \to (t, s)$ *taka że*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial\, s}, \quad X_2 = s\,\frac{\partial}{\partial\, s}, \quad i \quad s'' = s'\,L(t). \tag{2.69}$$

We wszystkich czterech przypadkach istnieją strategie pozwalające przedstawić rozwiąznia RRZ w postaci kwadratury.

2.7. Zakończenie

Oddając Czytelnikowi to "dzieło ", świadom jestem jego niedoskonałości. Zebrałem w tym skrypcie materiał, który spisywałem na bieżąco w semestrze letnim r.ak. 2011-2012 w którym, już po raz drugi, prowadziłem 30-godzinny wykład monograficzny dla studentów studiów magisterskich WMS. Kursu temu towarzyszyły również ćwiczenia, które stanowią jego nieodzowną część. Niestety, zabrakło mi czasu na spisanie zadań i odpowiedzi. Będę się starał uzupełnić tę lukę pod czas kolejnej edycji skryptu.

Na końcu chciałem uczulić potencjalnego Czytelnika na to, że, mimo że kurs został sporządzony głównie w oparciu o źródła przedstawione w spisie literatury, nie trzymałem się ściśle ani treści ani oznaczeń żadnej z wymienionych pozycji.

Dla tych którzy chcieliby pogłębić swą wiedzę w zakresie analizy grupewej RR, wyróżnić chciałbym książkę Petera Olvera, łączącą zalety podręcznika i bardzo nowoczesnej monografii.

LITERATURA

[1] Bluman G., Kumei S., *Symmetries and differential eqations*, Springer, NY 1989.

[2] Olver P., *Application of Lie groups to differential equations*, Springer, NY, 1994.

[3] Ibragimov N., *Selected works, Vol.1, Paper 21, Ch. 1,2.*

[4] Stephani H., *Differential equations: their solutions using symmetryies*, Cambridge Univ. Press, NY, 1989.

[5] Barenblatt G., *Similarity, Self-Similarity and Intermediate Asymptotics*, Academic Press, NY, 1996.