

Akademia Górniczo-Hutnicza imienia S. Staszica
Wydział Matematyki Stosowanej

Vsevolod Vladimirov

WSTĘP DO TEORII DYSTRYBUCJI

Kraków–2006

SPIS TREŚCI

Rozdział 1

Wstęp	4
1.1. Konieczność uogólnienia pojęcia funkcji	4

Rozdział 2

Funkcje próbne i dystrybucje	11
2.1. Pojęcie δ -funkcji	11
2.1.1. Przestrzeń funkcji próbnych	12
2.1.2. Przykłady funkcji próbnych.	13
2.2. Przestrzeń dystrybucji \mathcal{D}'	14
2.2.1. Dalsze przykłady dystrybucji.	16
2.2.2. Związek pomiędzy $\delta(x)$ a \mathcal{P}_x^1	16
2.2.3. Nośnik dystrybucji	17
2.3. Działania na dystrybucjach	20
2.3.1. Zamiana zmiennych	20
2.3.2. Przykłady pochodnych	24
2.3.3. δ -podobne ciągi	24
2.4. Równania w \mathcal{D}'	27
2.4.1.	27
2.4.2.	28
2.4.3.	29
2.4.4. Funkcja pierwotna.	29
2.4.5. Pewne równanie algebraiczne w $\mathcal{D}'(R)$	31
2.4.6. Zastosowanie twierdzenia 2.4..2 do rozwiązywania równań różniczkowych w \mathcal{D}'	33
2.4.7. Rozwiązanie podstawowe operatorów różniczkowych	34

Rozdział 3

Iloczyn prosty (tensorowy) i splot dystrybucji.	36
3.1.	36
3.1.1. Definicja.	36

3.1.2.	Przemienność iloczynu tensorowego.	37
3.1.3.	Dalsze własności iloczynu tensorowego.	38
3.1.4.	Splot dystrybucji.	39
3.1.5.	Różniczkowanie splotu.	42
3.2.	Zastosowania splotu.	43
3.2.1.	Rozwiązywanie równań niejednorodnych	43
3.2.2.	Zagadnienia początkowe.	44
3.2.3.	Uogólnione zagadnienia Cauchy dla równania falowego oraz równania transportu	45

Rozdział 4

	Metoda transformacji Fouriera	47
4.1.	Przestrzeń dystrybucji temperowanych	47
4.1.1.	Przestrzeń Schwarz'a	47
4.1.2.	Przestrzeń dystrybucji temperowanych	48
4.2.	Przekształcenia Fouriera	49
4.2.1.	Transformacja Fouriera funkcji z przestrzeni \mathcal{S}	49
4.2.2.	Odwrotna transformacja Fouriera.	50
4.2.3.	Przekształcenie Fouriera dystrybucji temperowanych	52
4.2.4.	Przykłady	55
4.3.	Zastosowanie transformacji Fouriera	56
4.3.1.	Rozwiązywania uogólnione równań liniowych cząstkowych	56
4.3.2.	Rozwiązania podstawowe dla operatora falowego oraz operatora transportu.	57

Rozdział 1

Wstęp

1.1. Konieczność uogólnienia pojęcia funkcji

Druga nazwa dystrybucji to funkcje uogólnione. Jest ona może nawet bardziej trafna, gdyż dystrybucje rzeczywiście powstają jako pewne uogólnienie pojęcia funkcji. Co więc spowodowało powstanie funkcji uogólnionych? W fizyce matematycznej od czasu do czasu powstają takie obiekty, które nie mają odpowiedników w klasycznej teorii równań różniczkowych. Na przykład, w klasycznym sformułowaniu zagadnienia początkowego

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^i(t, x)}{\partial t} &= F^i [t, x_i, u^j, \partial u^j / \partial x_k] = 0, \quad i \in 1, \dots, n \\ u^k(t_0, x) &= u_0^k(x), \quad k \in 1, \dots, n \end{aligned}$$

zakłada się że $u^i(t, x)$ oraz $u_0^k(x)$ są dostatecznie gładkimi funkcjami swoich argumentów. Fizycy, zaś, chcą wiedzieć, jak będzie, na przykład, ewoluje zaburzenie początkowe, które ma kształt stopnia (któremu odpowiada funkcja $u_0^k(x) = A \cdot [\theta(x + a) - \theta(x - b)]$). Wykorzystują oni takie pojęcia jak masa czy ładunek punktowy, co powoduje pojawienia się w równaniach singularności, o których mowa będzie niżej.

Rozpatrzmy równanie

$$\rho_t + a\rho_x = 0, \tag{1.1}$$

opisujące falę poruszającą się w prawo z prędkością a (dolne indeksy tutaj i niżej oznaczają różniczkowanie po odpowiedniej zmiennej). Zachodzi

Twierdzenie 1.1.1. *Ogólne rozwiązanie równania (1.1) ma postać*

$$\rho(t, x) = F(x - at),$$

gdzie $F(\cdot)$ – dowolna funkcja.

Wniosek 1.1..1. *Rozwiązanie zagadnienia początkowego*

$$\rho_t + a\rho_x = 0 \quad (1.2)$$

$$\rho(0, x) = \rho_0(x) \quad (1.3)$$

dane jest wzorem

$$\rho(t, x) = \rho_0(x - at).$$

Zaburzenie początkowe porusza się z prędkością a bez zmiany kształtu, jeżeli więc weźmiemy jako warunek początkowy funkcję schodkową

$$\rho_0(x) = \theta(x + 1) - \theta(x - 1) \quad (1.4)$$

to otrzymamy następujące rozwiązanie:

$$\rho(t, x) = \rho_0(x) = \theta(x - at + 1) - \theta(x - at - 1)$$

Opisuje ono funkcję schodkową, która porusza się w prawo z prędkością a nie zmieniając swojego kształtu. Ale w jaki sposób mamy traktować rozwiązanie równania różniczkowego, które nie jest funkcją różniczkowalną? Żeby móc go w poprawny sposób interpretować, wprowadzamy tak zwane rozwiązanie słabe.

Definicja 1.1..1 *Funkcja ograniczona (lecz niekoniecznie gładka) $\rho(t, x)$ nazywa się słabym rozwiązaniem równania (1.1), jeżeli $\forall \varphi \in C_0^\infty$ zachodzi równość:*

$$I = \int_{\mathbb{R}^2} \rho(t, x) \hat{L}^* [\varphi] dxdt = - \int_{\mathbb{R}^2} (\varphi_t + a\varphi_x) \rho(t, x) dxdt = 0,$$

gdzie $L^* = -\left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – operator, formalnie sprzężony do $L = \left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}\right)$ względem iloczynu skalarnego w L_2 . Jeżeli w dodatku funkcja ta spełnia warunek początkowy (1.3), wówczas nazywa się ona rozwiązaniem słabym zagadnienia Cauchy'ego (1.2)–(1.3).

Zachodzi

Lemat 1.1..1 *Każde rozwiązanie klasyczne równania (1.1) jest rozwiązaniem słabym tego równania.*

Dowód. Niech $\text{supp } \varphi \subset [-A, A] \times [-B, B] := \Omega$ (p. rys. 1.1). Wówczas prawdziwe są następujące równości:

Rys. 1.1:

$$I = - \int_{R^2} (\varphi_t + a\varphi_x)\rho(t, x) dx dt = - \int_{\Omega} (\varphi_t + a\varphi_x)\rho(t, x) dx dt = \quad (1.5)$$

$$\int_{-A}^A dx \int_{-B}^B \rho_t \varphi dt + \int_{-B}^B dt \int_{-A}^A \varphi a \rho_x dx = \int_{\Omega} \varphi (\rho_t + a\rho_x) \equiv 0. \quad (1.6)$$

Udowodnijmy następujące

Stwierdzenie 1.1..1. *Funkcja schodkowa*

$$\rho(t, x) = \theta(x - at + 1) - \theta(x - at - 1) \quad (1.7)$$

jest rozwiązaniem słabym zagadnienia początkowego (1.2), (1.4)

Dowód. Oczywiście jest, iż (1.7) przy $t = 0$ pokrywa się z warunkiem początkowym (1.4).

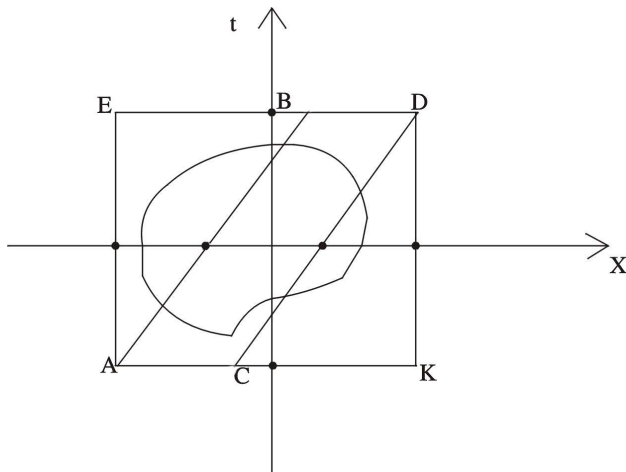
Dalej: nośnik funkcji (1.7) jest ograniczony prostymi $x - at + 1 = 0 = x - at - 1$ Weźmy

$\varphi \in C_0^\infty$ i prostokąt $\Omega = ACKDBE$ tak by zawierał on $\text{supp } \varphi$ rys. 1.2. Wówczas

$$\begin{aligned} I &= \int_{R^2} (\varphi_t + a\varphi_x)\rho dx dt = \int_{\Omega} (\varphi_t + a\varphi_x)\rho dx dt = \\ &= 2 \int_{ACDB} (\varphi_t + a\varphi_x) dx dt. \end{aligned}$$

Ostatnia równość zachodzi, gdyż $\text{supp } \varphi \cap \text{supp } \rho(t, x) \subset ACDB$. Potraktujmy wyraz podcałkowy jako formę różniczkową $(\varphi_t + a\varphi_x)dx \wedge dt = \omega_2$, którą możemy, z kolei, przedstawić jako różniczkę jedno-formy: $\omega_1 = a\varphi dt - \varphi dx$. Korzystając z twierdzenia Gaussa–Ostrogradzkiego, otrzymamy:

$$\frac{I}{2} = \oint_{\partial\Omega} \omega_1 = \int_{CD} a\varphi dt - \varphi dx - \int_{AB} (a\varphi dt - \varphi dx)$$



Rys. 1.2:

Na CD : $x = 1 + at$, więc $dx = adt$; na AB mamy, odpowiednio, $x = at - 1$ oraz $dx = adt$. Traktując t jako zmienną parametryzującą odcinki AB i CD , otrzymamy:

$$\begin{aligned} \frac{I}{2} &= \int_{RP} a\varphi(t, 1 + at)dt - \varphi(t, 1 + at)adt - \\ &\quad - \int_{RP} \varphi(t, at - 1)(adt - adt) = 0. \end{aligned}$$

□

Przykład ten korzystny jest przynajmniej z tego względu, że z jego pomocą zapoznaliśmy się z pojęciem rozwiązania słabego. Sam problem nie wygląda, być może zbyt przekonująco, gdyż warunek początkowy *a priori* wybraliśmy jako funkcję nieróżniczkowalną. Otóż w problemach nieliniowych bywa bardzo często tak, że rozwiązanie staje się osobliwym nie wskutek wyboru tych czy innych warunków początkowych, lecz wskutek samej natury nieliniowości.

Rozpatrzmy uogólnienie nieliniowe równania (1.1)

$$\rho_t + \rho\rho_x = 0. \quad (1.8)$$

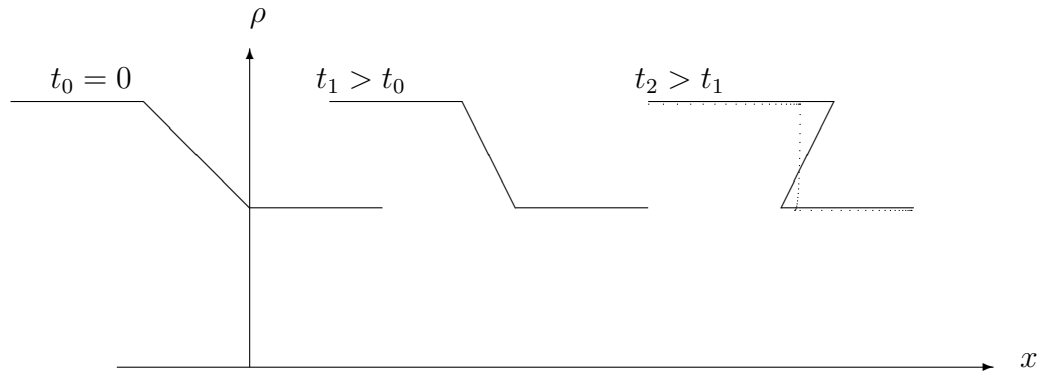
Szukamy rozwiązanie spełniające warunek początkowy

$$\rho(0, x) = \rho_0(x) \quad (1.9)$$

Zachodzą następujące stwierdzenia:

Stwierdzenie 1.1..2. *Ogólne rozwiązanie równania (1.8) dane jest wzorem*

$$\rho(t, x) = F(x - \rho t) \quad (1.10)$$



Rys. 1.3:

Stwierdzenie 1.1..3. Rozwiązanie zagadnienia początkowego (1.8), (1.9) dane jest wzorem

$$\rho(t, x) = \rho_0(x - \rho t) \quad (1.11)$$

Ponieważ ze stwierdzenia 1.1..2 łatwo wynika stwierdzenie 1.1..3, udowodnimy tylko to pierwsze.

Otóż jeżeli ma miejsce (1.10) to, traktując $F(x - t\rho(t, x))$ jako funkcję złożoną mamy:

$$\rho_t = \dot{F}(z)[- \rho - t\rho_t], \quad (1.12)$$

$$\rho_x = \dot{F}(z)[1 - t\rho_x] \quad (1.13)$$

gdzie $z = x - t\rho$. Stąd

$$\rho_t = \frac{-\rho \dot{F}(z)}{1 + t\dot{F}(z)} \quad \rho_x = \frac{\dot{F}(z)}{1 + t\dot{F}(z)}$$

Po podstawieniu do (1.8) otrzymamy tożsamość.

□

Weźmy warunek początkowy

$$\rho_0(x) = \begin{cases} 2 & x \leq -1 \\ 1 - x & -1 < x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

Z stwierdzeń 1.1..2, 1.1..3 wynika, że rozwiązanie, spełniające warunek początkowy (1.14) można przedstawić w postaci następującej funkcji uwikłanej:

$$\rho(z) = 2, \quad \text{gdy} \quad z = x - \rho t \leq -1, \quad (1.15)$$

$$\rho(z) = 1 - z, \quad \text{gdy} \quad -1 < z = x - \rho t \leq 0, \quad (1.16)$$

$$\rho(z) = 2 \quad \text{gdy} \quad z = x - \rho t > 0. \quad (1.17)$$

Rozwiązując relację (1.15), otrzymamy :

$$\rho = 2 \quad \text{gdy} \quad z = x - 2 \cdot t < -1,$$

czyli $\rho = 2$ gdy $x < 2t - 1$. W przypadku relacji (1.17) mamy:

$$\rho = 1 \quad \text{gdy} \quad z = x - 1 \cdot t > 0,$$

czyli $\rho = 1$ gdy $x > t$. W przypadku środkowej relacji (1.16) mamy:

$$\rho(z) \big|_{z=x-\rho t} = 1 - z = 1 - x + \rho t$$

lub $\rho = 1 - x + \rho t$. Stąd

$$\rho = \frac{1 - x}{1 - t}. \quad (1.18)$$

Obszar, w którym rozwiązanie to obowiązuje, znajdziemy, rozwiązując nierówności, $-1 < z \leq 0$, które, z uwzględnieniem (1.18), przybierają postać

$$-1 < x - \frac{x - t}{1 - t} t \leq 0.$$

Dla $t < 1$ otrzymamy stąd nierówności:

$$x > 2t - 1 \quad \text{oraz} \quad x \leq t.$$

Jednak dla $t > 1$ rozwiązanie staje się niejednoznaczne (p. rys. 1.3). Takie rozwiązanie jest niestabilne, natomiast rozwiązanie

$$\rho = \begin{cases} \rho_2 = 2 & x \leq C + Dt, \\ \rho_1 = 1 & x > C + Dt, \end{cases}$$

gdzie

$$D = (\rho_2 + \rho_1) / 2 \equiv 3/2, \quad (1.19)$$

związane z nim poprzez prawo zachowania [5], jest stabilne. Jest to rozwiązanie typu **fali uderzeniowej**, i jest ono opisywane funkcją, mającą punkt nieciągłości pierwszego rodzaju (linia przerywana na rys. 1.3).

Wzór na prędkość fali uderzeniowej można stosunkowo łatwo otrzymać, zapisując równanie (1.8) w postaci prawa zachowania

$$\rho_t + \rho \rho_x \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\rho^2}{2} = 0.$$

Rozpatrując nieskończenie cienki obszar Ω wyciągnięty wzdłuż "linii światowej" fali uderzeniowej (p. rys. xxx), całkując po tym obszarze formę różniczkową $\omega_2 = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\rho^2}{2} \right) dt \wedge dx$, a następnie przechodząc do całkowania po brzegu obszaru $\partial\Omega$ otrzymamy w granicy wzór (1.19).

Uwaga. Wynik pozostanie bez zmian jeżeli zamiast (1.14) weźmiemy funkcję gładką o podobnym przebiegu zmienności, na przykład $\rho_0(x) = -\arctg(x)$.

Wniosek 1.1..2 *Początkowo gładkie (ciągłe) rozwiązania nieliniowych równań ewolucyjnych stają się niegładkie (nieciągłe), a nawet niejednoznaczne na skutek nieliniowości.*

Rozdział 2

Funkcje próbne i dystrybucje

2.1. Pojęcie δ -funkcji

Jedynym z motywów wprowadzenia funkcji uogólnionych była konieczność uwzględnienia w równaniach fizyki matematycznej ładunków i mas punktowych. Na przykład, ładunek elektryczny punktowy pojawia się przy opisie pola elektrostatycznego ładunku, którego potencjał $\varphi(x)$ spenia równanie Poissona

$$\Delta \varphi(x) = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi(x) = k \cdot q \cdot \delta(x) \quad (2.1)$$

gdzie $\delta(x)$ jest to δ -Diraca, która definiuje się w sposób następujący: bierzemy ładunek elektryczny q i rozmazujemy go równomiernie po kuli $K(0, \varepsilon)$, wprowadzając funkcję gęstości ładunku:

$$\rho^\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{3q}{4\pi\varepsilon^3} & \text{gdyn } |x| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{gdyn } |x| > \varepsilon \end{cases}$$

Łatwo zauważyć, że przy tak zadanej gęstości ładunek całkowity jest stały:

$$\int_{R^3} \rho^\varepsilon(x) dx = \frac{3q}{4\pi\varepsilon^3} \int_{K(0,\varepsilon)} dx = q.$$

W granicy, gdy $\varepsilon \rightarrow 0^+$ dostajemy δ -Dirac'a, która nie jest funkcją, gdyż formalnie jest zdefiniowana w taki sposób:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & |x| \neq 0 \\ +\infty & |x| = 0 \end{cases}$$

Można jej jednak nadać jej sens, traktując ρ^ε jako funkcjonal działający u zbiorze wszystkich funkcji ciągłych:

$$C^0(R^3) \ni \varphi \quad \rho^\varepsilon[\varphi] = \int_{K(0,\varepsilon)} \rho^\varepsilon(x)\varphi(x) dx = (\rho^\varepsilon; \varphi)$$

Jest to dobrze zdefiniowany operator liniowy. Zadajemy przy jego pomocy $\delta(x)$ u sposób następujący

Definicja 2.1..1 Dla $\varphi \in C^0(R)$ określamy $\delta[\varphi]$ jako $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\rho^\varepsilon, \varphi) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{K(0,\varepsilon)} \rho^\varepsilon(x) \varphi(x) dx$

Zachodzi

Lemat 2.1..1 (a) $\delta[\cdot]$ jest funkcjonalem liniowym;

(b) $\delta[\varphi] = \varphi(0)$.

Dowód Ad (b):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |(\rho^\varepsilon, \varphi(x) - \varphi(0))| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{K(0,\varepsilon)} \rho^\varepsilon(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) \int_{K(0,\varepsilon)} \rho^\varepsilon(x) dx \right| \equiv \quad (2.2)$$

$$\equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{K(0,\varepsilon)} \rho^\varepsilon(x) (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \right| \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{x \in K(0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \varphi(0)| = 0. \quad (2.3)$$

□

W podobny sposób definiujemy każdą funkcję uogólnioną, jednak przestrzeń $C^0(R^n)$ jako dziedziną funkcji uogólnionych jest za szeroka ¹

2.1.1. Przestrzeń funkcji próbnych Jako przestrzeń bazową wybieramy zbiór $C_0^\infty(R^n)$ czyli zbiór funkcji z C^∞ o zwartym nośniku.

Topologia

Definicja 2.1..2 Mówimy, że $C_0^\infty \ni \varphi_k \rightarrow \varphi \in C_0^\infty$ jeżeli

• (a) istnieje taka kula otwarta $K(0, R)$ że dla dowolnego n $\text{supp } \varphi_n \subset K(0, R)$

• (b) dla dowolnego multiindeksu $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, n$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in K(0,R)} |D^\alpha \varphi_k(x) - D^\alpha \varphi(x)| = 0, \text{ gdzie } D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Przestrzeń C_0^∞ z tak zdefiniowaną topologią nazywamy przestrzenią funkcji próbnych i oznaczamy symbolem \mathcal{D} . Jest ona, oczywiście, przestrzenią liniową. Prócz tego, są w niej dobrze określone działania, o których mowa w następującym lemacie:

Lemat 2.1..2 (a) Różniczkowanie jest operacją ciągłą w \mathcal{D} ;

(b) Zamiana zmiennych $\varphi(x) \rightarrow \tilde{\varphi}(x) = \varphi(\hat{A}x + b)$ gdzie \hat{A} – niesingularna macierz kwadratowa, jest operacją ciągłą w \mathcal{D} ;

(c) mnożenie przez $a(x) \in C^\infty(R^n)$ jest operacją ciągłą w \mathcal{D} .

¹zachodzi relacja - im szersza jest przestrzeń Ω , tym mniej funkcjonałów nad nią (o dobrych własnościach) możemy zdefiniować

Ad (a): Dla $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ mamy wykazać, iż $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ implikuje $\partial_j \varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \partial_j \varphi$. Zauważmy, że $\varphi \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \partial_j \varphi \in \mathcal{D}$. Dalej, $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ oznacza że dla wszystkich $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ $D^\alpha \varphi_k \rightarrow D^\alpha \varphi$ w metryce *sup*. Z dowolności $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ wynika, zwłaszcza, że $D^{\bar{\alpha}} \varphi_k \rightarrow D^{\bar{\alpha}} \varphi$ dla $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_j + 1, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n)$, a przecież $|D^{\bar{\alpha}} \varphi_k - D^{\bar{\alpha}} \varphi| \equiv |D^\alpha \partial_j \varphi_k - D^\alpha \partial_j \varphi|$, skąd wynika zbieżność.

Ad (b): wynika z reguły różniczkowania funkcji złożonej.

Ad (c) $|\partial_j a \varphi_k - \partial_j a \varphi| \leq |\partial_j a| |\varphi_k - \varphi| + |a| |\partial_j \varphi_k - \partial_j \varphi|$ i t.d...

□

2.1.2. Przykłady funkcji próbnych. Funkcja ε -czapa definiuje się w sposób następujący:

$$\omega_\varepsilon = \begin{cases} C_\varepsilon \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}\right) & |x| < \varepsilon \\ 0 & |x| \geq \varepsilon \end{cases}$$

Stałą C_ε wybieramy w taki sposób, by była spełniona równość

$$\int \omega_\varepsilon = C_\varepsilon \int_{K(0, \varepsilon)} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}} dx \equiv \varepsilon^n C_\varepsilon \int_{K(0, 1)} e^{-\frac{1}{1 - |\tau|^2}} d\tau = 1.$$

Ćwiczenie 1. Udowodnić że $\omega \in C_0^\infty$, wykazując, że $\forall \alpha \ D^\alpha \omega_\varepsilon \rightarrow 0$ gdy $|x| \rightarrow \varepsilon^-$

Mając ε -czapę możemy wygenerować mnóstwo innych funkcji próbnych za pomocą konstrukcji, którą opisujemy niżej. Wprowadźmy najpierw pewne oznaczenia. Niech G będzie zbiorem otwartym i spójnym. Wykorzystując ω_ε możemy skonstruować funkcję $\eta_\varepsilon \in C^\infty$, która "prawie" się pokrywa z funkcją charakterystyczną $\chi_G(x)$:

$$\chi_G(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \in G \\ 0 & \text{gdy } x \notin G \end{cases}$$

Wprowadzamy teraz zbiór $G_\varepsilon = \cup_{x \in G} K(x, \varepsilon)$

Lemat 2.1.3 *Dla dowolnego zbioru G , który jest otwarty i spójny oraz dla wszystkich $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja $\eta^\varepsilon \in C^\infty$ taka, że*

1. $0 \leq \eta^\varepsilon(x) \leq 1$

2. $\eta(x) = 1$ *gdy* $x \in G_\varepsilon$

3. $\eta(x) = 0$ *gdy* $x \notin G_{3\varepsilon}$

Dowód. Definiujemy funkcję

$$\eta^\varepsilon(x) = \int_{R^n} \chi_{G_{2\varepsilon}}(y) \omega_\varepsilon(x-y) dy = \int_{G_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(x-y) dy.$$

Jak widać z rys. ?? nośnik funkcji podcałkowej całkowicie leży w zbiorze $G_{2\varepsilon}$ gdy $x \in G_\varepsilon$, natomiast nie ma z tym zbiorem punktów przecięcia, gdy $x \in R \setminus G_{3\varepsilon}$.

Wniosek 2.1..1 Funkcja $\eta^\varepsilon(x) \in C_0^\infty$ jeżeli G jest obszarem ograniczonym.

2.2. Przestrzeń dystrybucji \mathcal{D}'

Definicja 2.2..1 Dystrybucją f nazywamy funkcjonal liniowy nad przestrzenią $\mathcal{D}(R^n)$, ciągły w metryce słabej.

Oznaczamy ten zbiór symbolem $\mathcal{D}'(R^n)$. Liniowość rozumiemy tak, że dla dowolnej pary $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(R^n)$, oraz liczb $a, b \in C$

$$f[a\varphi + b\psi] = af[\varphi] + bf[\psi]$$

Inny spsób zapisu przypomina iloczyn skalarny: po lewej stronie $f \in \mathcal{D}'(R^n)$ po prawej $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$:

$$f[\varphi] \equiv (f, \varphi)$$

$$f[a\varphi + b\psi] \equiv (f, a\varphi + b\psi)$$

Ciągłość w metryce słabej oznacza: z tego, że $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ wynika iż $(f, \varphi_k) \rightarrow (f, \varphi)$ jako ciąg liczbowy.

Zbiór $\mathcal{D}'(R^n)$ w sposób naturalny staje się przestrzenią wektorową nad R (lub C), jeżeli zdefiniować kombinację liniową $\alpha f + \beta g$ ($\alpha, \beta \in R$ lub $C, f, g \in \mathcal{D}'(R^n)$) jako:

$$(\alpha f + \beta g, \varphi) := \alpha(f, \varphi) + \beta(g, \varphi)$$

Ćwiczenie 2. Udowodnić, że tak zdefiniowany funkcjonal jest funkcjonałem liniowym i ciągłym, czyli należy do $\mathcal{D}'(R^n)$

Przykłady

1. Każda funkcja $f \in \mathcal{L}_{loc}(R^n)$ określa dystrybucję wzorem:

$$(f, \varphi) := \int_{R^n} f(x)\varphi(x)dx \equiv \int_{supp\varphi} f(x)\varphi(x)dx$$

Liniowość względem φ jest oczywista.

Ciągłość: Jeżeli $\varphi_k \rightarrow \varphi$ w \mathcal{D} , to znajdzie się kula otwarta $K(0, R)$ taka, że $supp\varphi \in K(0, R)$. Możemy więc podać oszacowania:

$$\begin{aligned} |(f, \varphi_k) - (f, \varphi)| &= \left| \int_{K(0,R)} f(x)(\varphi_k(x) - \varphi(x))dx \right| \leq \\ &\leq \sup_{y \in K(0,R)} |\varphi_k(y) - \varphi(y)| \int_{K(0,R)} |f(x)|dx \rightarrow 0, \text{ gdy } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

2. $(\delta, \varphi) := \varphi(0)$ jest dobrze określoną dystrybucją. Liniowość jest oczywista. Ciągłość też prawie oczywista:

$$|(\delta, \varphi_k) - (\delta, \varphi)| = |\varphi_k(0) - \varphi(0)| \rightarrow 0 \text{ gdy } k \rightarrow \infty$$

Oznaczenie. Dystrybucje określone poprzez lokalnie całkwalne funkcje nazywamy **dystrybucjami regularnymi**. Pozostałe dystrybucje nazywamy **syngularnymi**.

2.2.1. Dalsze przykłady dystrybucji. Rozpatrzmy funkcjonal

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi\right) := Vp \int \frac{\varphi(x)}{x} dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad (2.1)$$

gdzie $\text{supp } \varphi \subset (-R, R)$.

Dystrybucję $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ można określić również w sposób „regularny”. Żeby to zrobić, trzeba skorzystać z tw. Lagrange’a, które nam mówi że dla każdej funkcji φ , różniczkowalnej na $[x_0, x]$ istnieje liczba $0 < \theta < 1$ taka, że zachodzi wzór

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \varphi'[\theta \cdot (x - x_0)]$$

Kładąc $x_0 = 0$ mamy:

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi\right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0) + \varphi(0)}{x} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^{-\varepsilon} \varphi'[\theta \cdot x] dx + \varphi(0) Vp \int_{K(0,R)} \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

Ostatnia całka znika, ponieważ wyrażenie podcałkowe jest funkcją nieparzystą.

Udowodniliśmy, że zachodzi wzór

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi\right) = \int \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx. \quad (2.2)$$

2.2.2. Związek pomiędzy $\delta(x)$ a $\mathcal{P}\frac{1}{x}$.

Lemat 2.2..1 *Zachodzi wzór:*

$$\frac{1}{x - i0} := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{x - i\varepsilon} = i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

Dowód.

Dopóki ε jest niezerowe $\frac{1}{x - i\varepsilon} \in \mathcal{L}_{loc}$. Dlatego dla dowolnej $\varphi \in \mathcal{D}$ takiej, że $\text{supp } \varphi \in K(0, R)$, mamy:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x - i\varepsilon}, \varphi\right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^R \frac{x + i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \varphi(x) dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \int_{-R}^R \frac{x\varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx + i\varepsilon \int_{-R}^R \frac{\varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \int_{-R}^R \frac{x[\varphi(x) - \varphi(0)]}{x^2 + \varepsilon^2} dx + \frac{\varphi(0)}{2} \int_{-R}^R \frac{d(x^2 + \varepsilon^2)}{x^2 + \varepsilon^2} dx + \right. \\
&\quad \left. + i\varepsilon \int_{-R}^R \frac{\varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx \right\} = \int_{-R}^R \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \\
&\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\varphi(0)}{2} \ln(x^2 + \varepsilon^2) \Big|_{-R}^R + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\frac{R}{\varepsilon}}^{\frac{R}{\varepsilon}} i \frac{\varphi(\tau \cdot \varepsilon)}{1 + \tau^2} d\tau = \\
&= \left(\mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi \right) + i\varphi(0)\pi = \left(\mathcal{P} \frac{1}{x} + i\pi\delta(x), \varphi \right).
\end{aligned}$$

□

2.2.3. Nośnik dystrybucji Dystrybucja nie jest funkcją, lecz jest funkcjonałem, czyli jej argumentami są funkcje próbne. Dlatego pojęcie nośnika w zwykłym rozumieniu tego słowa wydaje się być niewłaściwym. A jednak możemy wprowadzić to ważne pojęcie. Zanim jednak to zrobimy, musimy wprowadzić kilka definicji.

Definicja 2.2..2 Rodzina zbiorów otwartych $\mathcal{P} = \{V_i\}_{i \in I}$ nazywa się *pokryciem zbioru G* , jeżeli dla każdego $x \in G$ znajdzie się $V_i \in \mathcal{P}$ taki, że $x \in V_i$.

Definicja 2.2..3 Rodzina zbiorów $\mathcal{P} = \{\tilde{V}_j\}_{j \in J}$ nazywa się *podpokryciem G* , jeżeli

- (a) jest ona pokryciem G
- (b) dla każdego $j \in J$ znajdzie się $i = i(j) \in I$ takie, że

$$\mathcal{Z} \ni \tilde{V}_j \subset V_{i(j)} \in \mathcal{P}.$$

Zachodzi b. ważny

Lemat 2.2..2 (Heinego - Borela). Z każdego pokrycia $\mathcal{P} = \{U_i\}_{i \in I}$ zbioru zwartego K można wybrać podpokrycie skończone $\{\tilde{U}_j\}_{j=1}^n$.

Lemat ten podaje się bez dowodu tak samo, jak następnny lemat pomocniczy

Lemat 2.2..3 Jeżeli zbiór kul otwartych $\mathcal{P} = \{\mathcal{U}(x_k, r_k)\}_{k=1}^N$ stanowi pokrycie zbioru zwartego K , wówczas dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ zbiór

$$\mathcal{P}^\varepsilon = \{\mathcal{U}(x_k, r_k - \varepsilon)\} \equiv \{\mathcal{U}(x_k, r'_k)\}$$

też jest pokryciem K .

Uwaga. Dowód przeprowadza się *ad abs.* i nie jest on trudny.

I wreszcie podstawowy lemat, wprowadzający tak zwany ROZKŁAD JEDNOŚCI.

Lemat 2.2.4 Niech dana jest funkcja $\varphi \in \mathcal{D}$ oraz zbiór skończony kul otwartych

$$\mathcal{P} = \left\{ \mathcal{U}(x_k, r_k) \right\}_{k=1}^N$$

stanowiący pokrycie $\text{supp } \varphi$.

Teza Istnieją funkcje $h_k \in \mathcal{D}$ takie, że

$$(a) \text{supp } h_k \subset \mathcal{U}(x_k, r_k)$$

$$(b) \varphi(x) = \sum_{k=1}^N h_k(x)\varphi(x).$$

Dowód.

Bierzemy pokrycie

$$\mathcal{P}^\varepsilon = \left\{ \mathcal{U}(x_k, r'_k) \right\} \equiv \left\{ \mathcal{U}(x_k, r_k - \varepsilon) \right\}$$

(na mocy poprzedniego lematu takie ε zawsze istnieje) i konstruujemy funkcję

$$\mathcal{D} \ni e_k = \begin{cases} 1 & x \in \mathcal{U}(x_k, r'_k) \\ 0 & x \in R \setminus \mathcal{U}(x_k, r_k) \end{cases}$$

Następnie definiujemy

$$h(x) = \sum_{j=1}^N e_j(x)$$

oraz funkcję

$$h_k(x) = \begin{cases} \frac{e_k(x)}{h(x)} & \text{gdy } x \in \bigcup_{k=1}^N \mathcal{U}(x_k, r_k) \\ 0 & \text{gdy } x \in R \setminus \mathcal{P} \end{cases}$$

Tak skonstruowana funkcja jest dobrze określona w otoczeniu $\text{supp } \varphi$ i równa się jedności na $\text{supp } \varphi$:

$$\sum_{k=1}^N h_k \Big|_{\text{supp } \varphi} = 1$$

□

Teraz jesteśmy gotowi do wprowadzenia pojęcia nośnika dystrybucji.

Definicja 2.2..4 Mówimy, że

$$\mathcal{D}' \ni f \Big|_{G \subset \mathbb{R}^n} = 0,$$

jeżeli dla każdej funkcji próbnej φ takiej, że $\text{supp } \varphi \in G$,

$$(f, \varphi) = 0.$$

(piszemy więc, choć nie jest to *senso stricto* poprawne, że $f(x) = 0$ dla $x \in G$).

Definicja 2.2..5 Mówimy, że $f, g \in \mathcal{D}'$ są równe na G , jeżeli dla dowolnej $\varphi \in \mathcal{D}$ takiej, że $\text{supp } \varphi \in G$ zachodzi równość

$$(f, \varphi) = (g, \varphi).$$

Zachodzi bardzo ważny

Lemat 2.2..5. Na to by $f \in \mathcal{L}_{LOC}(\mathbb{R}^n)$ była różna od zera na zbiorze G w sensie dystrybucji potrzeba i wystarcza by:

$$f(x) \Big|_G = 0$$

μ - prawie wszędzie.

Wniosek 2.2..1 $\delta(x)$ nie jest dystrybucją regularną.

Dowód. O δ funkcji wiemy, że

$$(a) \text{ sup } \delta(x) = \{0\};$$

$$(b) \delta \text{ nie jest zerem.}$$

Przypuśćmy, że istnieje $f \in \mathcal{L}_{loc}$ taka, że $\forall \varphi \in \mathcal{D}$

$$\int f(x) \varphi(x) dx = \varphi(0).$$

Ponieważ funkcja $|x|^2 \varphi(x) \in \mathcal{D}$, więc

$$\int f(x) |x|^2 \varphi(x) dx = |x|^2 \varphi(x) \Big|_{x=0} = 0 = (f(x) |x|^2, \varphi(x)).$$

Z dowolności funkcji φ wynika, że $\mathcal{L}_{loc} \ni f$ jest równa zeru μ -p.w., a zatem dostaliśmy sprzeczność z p. (b).

2.3. Działania na dystrybucjach

2.3.1. Zamiana zmiennych Operując pojęciem nośnika nadaliśmy poprzednio sens symbolowi $f(x)$, $f \in \mathcal{D}'$. Za chwilę wprowadzimy pojęcie zamiany zmiennych. Pamiętać przy tym należy o tym, że f nie jest funkcją tylko funkcjonałem.

W przypadku dystrybucji postępujemy b. często w sposób następujący: patrzymy, jak wygląda ta czy inna degfinicja dla dystrybucji regularnych, a następnie przenosimy ją na przypadek ogólny.

Niech więc $f(\cdot) \in \mathcal{L}_{LOC}(R^n)$ i niech $A \in M_{n \times n}$: $\det A \neq 0$. Wówczas

$$(f(Ax + b), \varphi(x)) = \int f(Ax + b)\varphi(x)dx = \frac{1}{|\det A|} \int f(y)\varphi[A^{-1}(y - b)]dy.$$

Definicja 2.3..1 Niech $f \in \mathcal{D}'$.

Definiujemy $f(Ax + b)$ wzorem

$$(f(Ax + b), \varphi) := \frac{(f(z), \varphi[A^{-1}(z - b)])}{|\det A|} \quad (2.3)$$

Przykłady:

$$1. \quad A_j^i = c \delta_{ij}, \quad b = 0$$

$$(f(cx), \varphi) = \frac{1}{|c^n|} \left(f(z), \varphi \left(\frac{z}{c} \right) \right)$$

$$2. \quad (\delta(x - x_0), \varphi(x)) = (\delta(z), \varphi(z + x_0)) = \varphi(z + x_0)|_{z=0} = \varphi(x_0)$$

2.3.1.1. Mnożenie dystrybucji przez funkcję z $C^\infty(R^n)$ Dla funkcji $f \in \mathcal{L}_{LOC}(R^n)$ oraz $a \in C^\infty(R^n)$ $a(x) \cdot f(x) \in \mathcal{L}_{LOC}$, czyli jest to dystrybucja regularna, określona wzorem:

$$(a \cdot f, \varphi) = \int a(x)f(x)\varphi(x)dx = \int f(x)[a(x) \cdot \varphi(x)]dx = (f, a \cdot \varphi)$$

W ogólnym przypadku wprowadzamy następującą definicję:

Definicja 2.3..2 Niech $a \in C^\infty$, $f \in \mathcal{D}'$

Dystrybucję $a \cdot f$ określamy wzorem

$$(a \cdot f, \varphi) = (f, a \cdot \varphi) \quad (2.4)$$

Pytanie: czy definicja ta jest poprawna - innymi słowy czy $a \cdot f$ określa funkcjonal liniowy ciągły ?

Liniowość jest oczywista:

$$(f, a(\varphi_1 + \varphi_2)) = (af, \varphi_1) + (af, \varphi_2)$$

Ciągłość: jeżeli $\varphi_k \rightarrow \varphi$ to $a\varphi_k \rightarrow a\varphi$ (wykazaliśmy to w p. 2.1.1). Stąd wynika, że $(f, a\varphi_k) \rightarrow (f, a\varphi)$ gdy $k \rightarrow \infty$, czyli $a \cdot f$ jest funkcjonalem. ciągłym w metryce stałej.

Przykłady

$$1. \quad a(x)\delta(x) = a(0) \cdot \delta(x)$$

$$2. \quad x \mathcal{P} \frac{1}{x} = 1$$

Ćwiczenie. Udowodnić, że

$$1. \quad x^m \mathcal{P} \frac{1}{x} = x^{m-1} \quad m \geq 1$$

$$2. \quad [a \cdot \delta](x - x_0) = a(0)\delta(x - x_0)$$

$$3. \quad (a \cdot f)(x - x_0) = a(x - x_0) \cdot f(x - x_0) \quad f \in \mathcal{L}_{LOC}$$

Czy mnożenie dystrybucji jest dobrze określone ? Już w przypadku dystrybucji regularnych są z tym kłopoty:

Kontrprzykład. $f = \frac{1}{\sqrt{|x|}} \in \mathcal{L}_{LOC}$, lecz $f \cdot f = \frac{1}{|x|} \notin \mathcal{L}_{LOC}$ więc funkcja ta nie jest dystrybucją regularną !

Ogólnie: nie można określić operacji mnożenia w \mathcal{D}' tak by była ona przemniemna i łączna:

Kontrprzykład

$$\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) \cdot \delta(x) = (1) \cdot \delta(x) = \delta(x)$$

z innej strony:

$$x \cdot \frac{1}{x} \cdot \delta(x) = \frac{1}{x} \cdot (x \cdot \delta(x)) = \frac{1}{x} \cdot 0 = 0$$

2.3.1.2. Różniczkowanie dystrybucji Niech $f \in C^p(\mathbb{R}^n)$ wtedy $\forall \alpha : |\alpha| \leq p \quad D^\alpha f \in \mathcal{L}_{LOC}$ i $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ zachodzi wzór:

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi) \tag{2.5}$$

Ogólnie przyjmuje się definicję:

Definicja 2.3..3 Niech $f \in \mathcal{D}'$ wówczas wartość funkcjonala $D^\alpha f$ na $\varphi \in \mathcal{D}$ określa się wzorem (2.5).

Czy jest to definicja poprawna? Należy wykazać, że (a) $D^\alpha f$ jest funkcjonałem dobrze określonym na \mathcal{D} oraz (b) że działa on w sposób liniowy i ciągły.

Ad (a) : ponieważ $(\mathcal{D} \ni \varphi) \implies (D^\alpha \varphi \in \mathcal{D})$, więc wzór $(f, D^\alpha \varphi)$ jest dobrze określony.

Ad (b) : liniowość wynika z liniowości różniczkowania; dla wykazania ciągłości należy skorzystać z relacji

$$(\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi) \implies (D^\alpha \varphi_k \rightarrow D^\alpha \varphi),$$

na mocy której $(f, D^\alpha \varphi_k) \rightarrow (f, D^\alpha \varphi)$ gdy $k \rightarrow \infty$.

Jasne jest zatem, w jakim celu wprowadza się tak mocną metrykę w zbiorze \mathcal{D} . Dzięki niej każdy element przestrzeni \mathcal{D}' staje się nieskończenie wiele razy różniczkowalny w sensie uogólnionym.

Definicja pochodnej poprzez iloraz różnicowy. Wiemy już, co to jest $f(x + \Delta x)$.

Określamy iloraz różnicowy

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \varphi \right) &= \frac{1}{\Delta x} \left\{ (f(z), \varphi(z - \Delta x)) - (f(z), \varphi(z)) \right\} = \\ &= - \left(f(z), \frac{\varphi(z) - \varphi(z - \Delta x)}{\Delta x} \right) \rightarrow -(f(z), \varphi'(z)) \text{ gdy } \Delta x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Własności różniczkowania.

$$(a) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Dowód.

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \varphi \right) = \left(f, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \left(f, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} \right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \varphi \right).$$

(b) **Wzór Leibniza:**

$$\forall a \in C^\infty, f \in \mathcal{D}'$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(af) = a \frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial a}{\partial x_j} f.$$

Dowód.

$$\begin{aligned} (\partial_j(a \cdot f), \varphi) &= -(a \cdot f, \partial_j \varphi) = -(f, a \partial_j \varphi) = -(f, \partial_j(a \varphi)) + (f, (\partial_j a) \varphi) = \\ &= (a \partial_j f + f \partial_j a, \varphi). \end{aligned}$$

(c) Niech $f \in C^1[R/\{x_0\}]$, ponadto istnieją i są skończone

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f(x_0 \pm \varepsilon) \quad \text{oraz} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f'(x_0 \pm \varepsilon).$$

Wówczas zachodzi

Lemat 2.3..1. f' w sensie \mathcal{D}' równa się $\{f'\} + [f]_{x_0} \delta(x - x_0)$, gdzie: $\{f'\}$ pochodna klasyczna określona na $R^1 \setminus \{x_0\}$,

$$[f]_{x_0} = \lim_{\varepsilon, \delta \rightarrow +0} \{f'(x_0 + \varepsilon) - f'(x_0 - \delta)\}.$$

Dowód.

$$\begin{aligned} (f', \varphi) &= -(f, \varphi') = - \lim_{\varepsilon, \delta \rightarrow +0} \left\{ \int_{-R}^{x_0 - \varepsilon} + \int_{x_0 + \delta}^R (f \varphi') dx \right\} = \\ &= - \lim_{\varepsilon, \delta \rightarrow +0} \left\{ f \varphi \Big|_{-R}^{x_0 - \varepsilon} + f \varphi \Big|_{x_0 + \delta}^R - \int_{-R}^{x_0 - \varepsilon} + \int_{x_0 + \delta}^R f' \varphi dx \right\} = \\ &= \varphi(x_0) [f]_{x_0} + \int_{-R}^R f'(x) \varphi dx. \end{aligned}$$

□

Wniosek 2.3..1 Niech

1. $f \in C^1[R/\{x_1, x_2, \dots\}]$;
2. dla $i = 1, 2, \dots$ istnieją i są skończone następujące granice:

$$[f]_{x_i} = \lim_{\varepsilon, \delta \rightarrow +0} (f[x_i + \varepsilon] - f[x_i - \delta]), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f'[x_i \pm \varepsilon].$$

Wówczas $f' = \{f'\} + \sum_{i=1}^{\infty} [f]_{x_i} \delta(x - x_i)$.

Przykład. Pochodna uogólniona funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi} & \text{gdy } x \in [0, 2\pi], \\ f(y), & y = x|_{\text{mod } \pm 2\pi n}, \quad \text{gdy } |x| > 2\pi \end{cases}$$

dana jest wzorem

$$f' = -\frac{1}{2\pi} \Big|_{x \neq \pm 2n\pi} + 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - 2n\pi).$$

Ćwiczenie. Rozkładając funkcję okresową $f(x)$ z poprzedniego przykładu w szereg Fouriera, a następnie różniczkując prawe i lewe części, wykazać poprawność wzoru

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikx} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - 2k\pi).$$

2.3.2. Przykłady pochodnych

$$(a) \quad (\delta'(x), \varphi) = -(\delta(x), \varphi'(x)) = -\varphi'(0)$$

$$(b) \quad (\delta^{(m)}(x), \varphi) = (-1)^m \varphi^{(m)}(0)$$

$$(c) \quad (\theta'(x), \varphi) = -(\theta(x), \varphi'(x)) =$$

$$-\int_0^R \varphi'(x) dx = -\varphi(x) \Big|_0^R = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi).$$

$$(d)$$

$$\begin{aligned} (x\delta'(x), \varphi) &= (\delta'(x), x\varphi) = \\ &= -[x\varphi(x)]' \Big|_{x=0} = -(\delta(x), \varphi). \end{aligned}$$

Ćwiczenia. Udowodnić wzory:

$$(a) \quad x^m \delta^{(m)}(x) = (-1)^m m! \delta(x), \quad m = 1, 2, \dots$$

$$(b) \quad x^k \delta^{(m)}(x) = 0, \quad k > m$$

$$(c) \quad [\theta(x) \cdot a(x)]' = a(0)\delta(x) + \theta(x)a'(x) \quad a \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$$(d) \quad \text{Wykazać, że: } \frac{d}{dx} \ln|x| = \mathcal{T} \frac{1}{x}$$

Uwaga. $\{\ln|x|\}'$ nie jest funkcją lokalnie całkowalną.

2.3.3. δ -podobne ciągi Dystrybucje b. często zdefiniowane są jako przejścia graniczne. Procedura ta oparta jest o lemat, który podajemy bez dowodu.

Lemat 2.3..2 *Przestrzeń \mathcal{D}' jest przestrzenią zupełną w metryce słabej.*

Ważną rodzinę takich ciągów stanowią funkcje klasyczne, zbieżne do δ -funkcji. Są to jednoparametryczne rodziny funkcji nieograniczenie rosnące w zerze, gdy parametr osiąga pewną krytyczną wartość. Niżej dokładnie określa się rodzinę funkcji, zbieżną do $\delta(x)$.

Założmy, że rodzina funkcji $f_\nu(x)$ spełnia następujące warunki:

$$(a) \quad \forall M > 0 \quad \text{oraz } a, b : |a| < M, \quad |b| < M \exists C(M) > 0 :$$

$$\left| \int_a^b f_\nu(x) dx \right| < C(M);$$

(b) $\forall a, b \neq 0$

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \int_a^b f_\nu(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{gdy } a < b < 0 \text{ lub } 0 < a < b, \\ 1 & \text{gdy } a < 0 < b \end{cases}$$

Rozpatrzmy ciąg funkcji pierwotnych

$$F_\nu(x) = \int_{-1}^x f_\nu(\xi) d\xi.$$

Przy takich założeniach $F_\nu(x) \rightarrow 0$ gdy $x < 0$ oraz $F_\nu(x) \rightarrow 1$ gdy $x > 0$, i przy tym jest jednostajnie ograniczona względem ν . Dlatego $F_\nu(x)$ dąży do $\theta(x)$ w sensie \mathcal{D}' . A skoro tak, to $F'_\nu(x) = f_\nu(x) \rightarrow \delta(x)$ gdy $\nu \rightarrow +\infty$.

Przykład. Rozpatrzmy funkcję

$$f_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \nu x}{x}.$$

Wiadomo, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\nu(\xi) d\xi = 1.$$

Dla dowolnej pary liczb $a, b : 0 < a < b$ (względnie $a < b < 0$)

$$\int_a^b f_\nu(\xi) d\xi = \int_{\nu a}^{\nu b} \frac{\sin z}{z} dz \rightarrow 0 \quad \text{gdy } \nu \rightarrow 0.$$

Dalej, całka

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\sin \nu x}{x} dx \right| = \left| \frac{1}{\pi} \int_{\nu a}^{\nu b} \frac{\sin z}{z} dz \right|$$

jest jednostajnie ograniczona względem a, b dla wszystkich ν , więc $\left\{ \frac{1}{\pi} \frac{\sin \nu x}{x} \right\}$ jest ciągiem δ -podobnym.

Uwaga. Pojęcie δ -podobnego ciągu w sposób naturalny przenosi się na funkcje $f_\varepsilon(x)$ zachowujące się w podobny sposób przy $\varepsilon \rightarrow +0$. Jako przykład służyć tu może rodzina funkcji

$$\frac{1}{\pi x} \sin \frac{x}{\varepsilon}.$$

Ćwiczenie

Znaleźć granicę w \mathcal{D}' następujących funkcji lokalnie całkowalnych:

$$(a) f^\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & |x| < \varepsilon \\ 0 & |x| > \varepsilon \end{cases}$$

$$(b) f^\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}$$

$$(c) f^\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{\pi x^2} \sin^2 \frac{x}{\varepsilon}$$

$$(d) f^\varepsilon(x) = \frac{1}{x + i\varepsilon}$$

$$(d) \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}$$

2.4. Równania w D'

2.4.1. Rozpatrzmy równanie

$$f'(x) = f \in D'(R). \quad (2.6)$$

Zachodzi następujące

Twierdzenie 2.4..1. *Jedynym rozwiązaniem równania (2.6) jest funkcja $f = c = const$.*

Dowód. Równanie (2.6) jest równoważne równaniu

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi'). \quad \forall \varphi \in D(R). \quad (2.7)$$

Wzór (2.7) zadaje działanie f na podzbiorze

$$\Phi_0 = \{\varphi_0 \in D(R) : \text{istnieje } \psi \in D(R) : \varphi_0 = \psi'\}.$$

Działanie jego można rozszerzyć na pozostałe funkcje próbne, wykorzystując następujący

Lemat 2.4..1. *Funkcja $\varphi_0 \in D(R)$ należy do zbioru Φ_0 wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x) dx = 0. \quad (2.8)$$

\Rightarrow

Jeżeli $\varphi_0(x) = \psi'(x) \in D$, to

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x) dx = \lim_{A, B \rightarrow +\infty} [\psi(B) - \psi(-A)] = 0.$$

\Leftarrow

Określmy $\psi(x)$ wzorem

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_0(\xi) d\xi.$$

Oczywistym jest że $\psi'(x_0) = \varphi_0(x)$ Okazuje się że $\psi \in D$. Łatwo widać, iż $\psi \in C^\infty$, jako całka nioznaczona z funkcji regularnej. Dalej, niech $supp \varphi_0 \in K(0, R)$. Wtedy $\varphi_0(x) = 0$ gdy $x < -R$ i $\varphi_0(x) = c = const$ gdy $x > R$. Ale z (2.8) wynika, że $c = 0$, więc $\psi(x)$ należy do $D(R)$.

□

Niech $\varphi_1 \in D$ ma własność

$$\int_R \varphi_1(x) dx = 0.$$

Każdą funkcję $\varphi \in D$ da się przedstawić w postaci

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) \int_R \varphi(x) dx + \varphi_0(x),$$

przy czym widać że $\int_R \varphi_0(x) dx = 0$.

Zadając działanie f na φ_0 jako pewną (dowolną z racji dowolności φ_1) stałą

$$(f, \varphi) = C_1,$$

zadajemy go i dla φ , gdyż

$$(f, \varphi) = C_1 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi.$$

■

2.4.2. Niech dany jest układ równań różniczkowych

$$\begin{aligned} \frac{d f_1}{d x} &= a_{11} f_1 + \dots a_{1n} f_n, \\ \frac{d f_2}{d x} &= a_{21} f_1 + \dots a_{2n} f_n, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d f_n}{d x} &= a_{n1} f_1 + \dots a_{nn} f_n, \end{aligned} \tag{2.9}$$

$a_{ij} \in C^\infty$.

Zachodzi

Lemat 2.4..2. *Układ (2.9) nie ma w D' rozwiązań odmiennych od klasycznych.*

Szkic dowodu. Zapiszemy (2.9) w postaci wektorowej:

$$\frac{d f}{d x} = \hat{A} f, \quad \hat{A}_{ij} = a_{ij}, \quad f = \text{colon}(f_1, \dots, f_n).$$

Rozpatrzmy macierz klasycznych rozwiązań fundamentalnych $\hat{U}_j^k(x) = f_j^k(x)$ (z kursu równań zwyczajnych wiadomo, że $\hat{U}(x)$ jest macierzą nieosobliwą). Przejdźmy do nowych funkcji $z(x)$, które wprowadza się zgodnie ze wzorem

$$f = \hat{U} z.$$

Wektor-funkcja z spełnia równanie

$$\frac{d \hat{U}}{d x} z + \hat{U} \frac{d z}{d x} = \hat{A} \hat{U} z.$$

Na mocy tego, że $\frac{d\hat{U}}{dx} = \hat{A}\hat{U}$, z spełnia równanie

$$\hat{U} \frac{dz}{dx} = 0.$$

Mnożąc go z lewej strony przez \hat{U}^{-1} , otrzymamy równanie

$$\frac{dz}{dx} = 0.$$

Na mocy poprzedniego lematu, równanie to ma jedynie stałe rozwiązania $z = \text{colon}(C_1, \dots, C_n)$.

Zatem $f = \hat{U} z$ jest kombinacją liniową rozwiązań klasycznych. ■

Wniosek.

Równanie zwyczajne n -go rzędu

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x) = 0, \quad a_j(x) \in C^\infty(R)$$

nie ma w $D'(R)$ rozwiązań odmiennych od klasycznych.

2.4.3. Równanie

$$x f' = 0, \quad x \in D'(R). \tag{2.10}$$

Zacniemy od tego, że równanie $a(x)f' = 0$ nie ma rozwiązań odmiennych od $f = c = \text{const}$ tam gdzie $a(x) \neq 0$. Natomiast w miejscach zerowania się $a(x)$ na ogół pojawiają się rozwiązania odmienne od klasycznych.

W przypadku równania (2.10) rozwiązanie może się różnić od stałej jedynie w p. $x = 0$. Dlatego układ rozwiązań fundamentalnych składa się z dwóch funkcji: $f = 1$ oraz $f = \theta(x)$.

Wniosek. Rozwiązaniem ogólnym równania (2.10) jest funkcja

$$f = C_1 + C_2 \theta(x).$$

2.4.4. Funkcja pierwotna. Rozpatrujemy równanie

$$\frac{dy}{dx} = f, \quad f \in D'(R) \tag{2.11}$$

względem funkcji $y \in D'(R)$.

Lemat 2.4.3. Dla dowolnej $f \in D'(R)$ równanie (2.11) ma rozwiązanie w $D'(R)$.

Szkic dowodu.

1. Zakładamy że rozwiązanie $y \in D'(R)$ istnieje.

2. Dla $\varphi_0 \in \Phi_0$ rozwiązanie dane jest wzorem

$$(y, \varphi_0) = -(f, \psi), \quad \varphi_0 = \psi.$$

3. Dowolną funkcję próbną φ przedstawiamy w postaci

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) \int_R \varphi(\xi) d\xi + \varphi_0(x), \quad (2.12)$$

gdzie $\varphi_0 \in \Phi_0$, zaś φ_1 —dowolna funkcja próbna taka że $\int_R \varphi_1(x) dx = 1$.

Zatem

$$(y, \varphi) = C - (f, \psi),$$

gdzie

$$C = (y, \varphi_1) \int_R \varphi(\xi) d\xi, \quad \varphi_0 = \psi'.$$

4. Definiujemy $y_0 \in D'(R)$ w następujący sposób:

$$(y_0, \varphi) = (y, \varphi_0) = -(f, \psi).$$

5. Poszukiwane rozwiązanie to $y = y_0 + c$, gdzie c —dowolna stała

Uwaga. Ze względu na niejednoznaczność rozkładu (2.12) dystrybucja y_0 nie jest określona jednoznacznie, jednak dwie zdefiniowane w taki sposób dystrybucje różnią się między sobą co najwyżej o stałą.

Przykład 1.

$$\frac{dy}{dx} = \delta(x).$$

Dla dowolnej $\varphi_0 \in \Phi_0$

$$(y, \varphi_0) = -\psi(0),$$

gdzie $\varphi_0 = \psi'$. Z drugiej strony

$$-\psi(0) = \int_0^R \psi'(x) dx, \quad \text{supp } \psi \in K(0, R),$$

czyli

$$(y, \varphi_0) = \int_0^R \psi'(x) dx = \int_0^R \varphi_0 dx = (\theta, \varphi_0) = (y_0, \varphi_0), \quad (2.13)$$

czyli

$$y = \theta(x) + \text{const.} \quad (2.14)$$

Przykład 2.

$$\frac{dy}{dx} = \delta^{(n)}(x).$$

Dla dowolnej $\varphi_0 \in \Phi_0$

$$(y, \varphi_0) = -(\delta^{(n)}, \psi) = -\psi^{(n)}(0).$$

gdzie $\varphi_0 = \psi'$. Z drugiej strony

$$-\psi^{(n)}(0) = \int_0^R \psi^{(n+1)}(x) dx, \quad \text{supp } \psi \in K(0, R),$$

czyli

$$\begin{aligned} (y, \varphi_0) &= \int_0^R \psi^{(n+1)}(x) dx, = \int_0^R \varphi_0^{(n)} dx, = (\theta, \varphi_0^{(n)}) = \\ &= -(\theta', \varphi_0^{(n-1)}) = -(\delta, \varphi_0^{(n-1)}) = \dots = (-1)^n (\delta^{(n-1)}, \varphi_0), \end{aligned}$$

czyli

$$y = (-1)^n \delta^{(n-1)} + \text{const.} \quad (2.15)$$

2.4.5. Pewne równanie algebraiczne w $D'(R)$

Twierdzenie 2.4.2. *Ogólne rozwiązanie równania*

$$x^m u = 0, \quad u \in \mathcal{D}' \quad (2.16)$$

dane jest wzorem

$$u = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^k(x), \quad (2.17)$$

gdzie c_k – dowolne stałe.

Dowód. W tym, że jest to rozwiązanie łatwo się można przekonać bezpośrednio. Rzeczywiście, jeżeli $k < m$, to $\forall \varphi \in \mathcal{D}$

$$(x^m \delta^{(k)}, \varphi) = -(1)^k (\delta, (x^m \varphi)^{(k)}) = 0, \quad \text{gdyż} \quad (2.18)$$

$$(x^m \varphi)^{(k)}(x) \Big|_{x=0} = \sum_{n=0}^k C_{k-n}^m x^{m-k+n} \varphi^{(n)} \Big|_{x=0} = 0. \quad (2.19)$$

Równanie (2.16) jest liniowe względem u , dlatego kombinacja algebraiczna jego rozwiązań jest również rozwiązaniem tego równania.

W celu wykazania że jest to rozwiązanie ogólne, dla funkcji φ stosuje się specjalną reprezentację.

Niech

$$\eta_\varepsilon(x) = \int \omega_\varepsilon(x-y) \chi_{K(0, 2\varepsilon)},$$

gdzie $\chi_{K(0, 2\varepsilon)}$ – funkcja charakterystyczna kuli otwartej $K(0, 2\varepsilon)$, natomiast $\mathcal{D} \ni \omega_\varepsilon$ jest to ε -czapa, którą wprowadziliśmy wcześniej. Jak łatwo się można się przekonać,

$$\eta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \in K(0, \varepsilon) \\ 0 & \text{gdy } x \notin K(0, 3\varepsilon). \end{cases}$$

Zdefiniujmy teraz następującą funkcję:

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^m} \left[\varphi(x) - \eta_\varepsilon(x) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \right] & \text{gdy } x \neq 0, \\ \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} & \text{gdy } x = 0. \end{cases}$$

Wykażemy teraz pomocniczy

Lemat 2.4.4.

(a) ψ ma zwarty nośnik;

(b) $\psi \in C^\infty$.

Dowód. P. (a) wynika z tego, że skończona kombinacja liniowa funkcji o zwartych nośnikach jest funkcją o zwartym nośniku. Jedyne problem z wykazaniem p. (b) polega na dowodzie gładkości funkcji ψ w zerze. Jednak w zerze funkcja ta nie ma osobliwości, gdyż, formalnie rzecz biorąc

$$\psi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(m+j)}(0)}{(m+j)!} x^j,$$

więc $\lim_{x \rightarrow 0} \psi^{(k)}(x) = \frac{\varphi^{(m+k)}(0)}{(m+k)!} k!$.

Dalej, jeżeli $\mathcal{D}' \ni u$ jest rozwiązaniem równania (2.16), to

$$(u, \varphi) = \left(u, x^m \psi + \eta_\varepsilon(x) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \right) = \tag{2.20}$$

$$= (x^m u, \psi) + \sum_{k=0}^{m-1} \varphi^{(k)}(0) \left(u, \eta_\varepsilon(x) \frac{x^k}{k!} \right) = \tag{2.21}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} c_k (\delta^k, \varphi), \quad \text{gdzie } c_k := (-1)^k \left(u, \eta_\varepsilon(x) \frac{x^k}{k!} \right). \tag{2.22}$$

Stwierdzenie jest więc udowodnione.

2.4.6. Zastosowanie twierdzenia 2.4.2 do rozwiązywania równań różniczkowych w \mathcal{D}' Wiedząc, jakie jest rozwiązanie ogólne równania (2.16), możemy "scałkować" podobne do niego równania różniczkowe

Przykład 1. Znaleźć rozwiązanie równania

$$x^n u' = 0, \quad u \in \mathcal{D}'.$$

Dokonując podstawienia $u' = y \in \mathcal{D}'$, otrzymujemy równanie (2.16), którego rozwiązanie dane jest wzorem (2.17). "Całkując" to równanie otrzymamy:

$$u = c_0 \theta(x) + c_1 \delta(x) + c_2 \delta'(x) + \dots + c_{n-1} \delta^{(n-2)}(x) + a_0. \quad (2.23)$$

Przykład 2. W podobny sposób można wykazać, iż rozwiązaniem równania

$$x^n u'' = 0, \quad u \in \mathcal{D}'.$$

jest funkcja uogólnioną

$$u = c_0 x \theta(x) + c_1 \theta(x) + c_2 \delta(x) + \dots + c_{n-1} \delta^{(n-3)}(x) + a_1 + a_0 x. \quad (2.24)$$

Ćwiczenie. Wykazać, iż rozwiązanie ogólne równania

$$x^{n+k} u^{(n)} = 0, \quad u \in \mathcal{D}'.$$

dane jest wzorem

$$u = \theta(x) \sum_{j=0}^{n-1} x^j c_j + \sum_{m=0}^{k-1} b_m \delta^{(m)}(x) + \sum_{s=0}^{n-1} a_s x^s. \quad (2.25)$$

Podobnie jak i w przypadku klasycznym, rozwiązanie ogólne problemu niejednorodnego jest sumą ogólnego rozwiązania problemu jednorodnego oraz rozwiązania szczególnego problemu niejednorodnego.

Przykłady

1. Ogólne rozwiązanie równania

$$x u' = \mathcal{P} \frac{1}{x} \quad u \in \mathcal{D}'.$$

dane jest wzorem

$$u = c_0 \theta(x) + c_1 - \mathcal{P} \frac{1}{x}. \quad (2.26)$$

2. Ogólne rozwiązanie równania

$$x^2 u' = 1 \quad u \in \mathcal{D}'.$$

dane jest wzorem

$$u = c_0 \theta(x) + c_1 \delta(x) - \mathcal{P} \frac{1}{x}. \quad (2.27)$$

3. Ogólne rozwiązanie równania

$$u'' = \delta(x) \quad u \in \mathcal{D}'.$$

dane jest wzorem

$$u = c_0 + c_1 x + x \theta(x). \quad (2.28)$$

2.4.7. Rozwiązanie podstawowe operatorów różniczkowych Przechodzimy do omówienia bardzo ważnego pojęcia rozwiązania podstawowego. Niech dany jest operator różniczkowy o stałych współczynnikach

$$\hat{L}(D) = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha D^\alpha, \quad D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}. \quad (2.29)$$

Definicja 2.4..1. Rozwiązaniem podstawowym (fundamentalnym) operatora $\hat{L}(D)$ nazywa się dystrybucja $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'$, spełniająca równanie

$$\hat{L}(D) \mathcal{E} = \delta(x).$$

Rozpatrzmy równania

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) \mathcal{E} = \delta(t), \quad (2.30)$$

oraz

$$\left(\frac{d}{dt} + a \right) \mathcal{E} = \delta(t). \quad (2.31)$$

W przypadku równania (2.30) rozwiązanie szukamy w postaci $\mathcal{E} = \theta(t) Z(t)$, gdzie $Z(t) \in C^2(\mathbb{R})$. Różniczkując \mathcal{E} mamy:

$$\mathcal{E}' = Z(0) \delta(t) + \theta(t) Z'(t); \quad (2.32)$$

$$(2.33)$$

$$\mathcal{E}'' = Z(0) \delta'(t) + \delta(t) Z'(0) + \theta(t) Z''(t). \quad (2.34)$$

Po podstawieniu do równania (2.30) otrzymamy:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right) \theta(t) Z(t) = Z(0) \delta'(t) + Z'(0) \delta(t) + \theta(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right) Z(t). \quad (2.35)$$

Łatwo więc widać, iż równanie (2.30) będzie spełnione, jeżeli funkcja $Z(t)$ jest rozwiązaniem zagadnienia klasycznego

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right) Z(t) = 0, \quad Z(0) = 0, \quad Z'(0) = 1,$$

ostatecznie więc otrzymujemy:

$$\mathcal{E} = \theta(t) \frac{\sin \omega t}{\omega}. \quad (2.36)$$

Podobnie, szukając rozwiązanie równania (2.31) w postaci $\mathcal{E} = \theta(t) Z(t)$, dochodzimy do wniosku, iż wzór ten będzie opisywał rozwiązanie fundamentalne, jeżeli $Z(t)$ jest rozwiązaniem klasycznym zagadnienia początkowego

$$\left(\frac{d}{dt} + a\right) Z(t) = 0, \quad Z(0) = 1,$$

a więc

$$\mathcal{E} = \theta(t) e^{-at}. \quad (2.37)$$

Stosując metodę indukcji matematycznej, można wykazać, iż w ogólnym przypadku zachodzi

Twierdzenie 2.4..3. *Rozwiązanie w \mathcal{D}' równania*

$$L \left[\frac{d}{dt} \right] = \left\{ \frac{d^n}{dt^n} + \sum_{j=0}^{n-1} a_\alpha \frac{d^j}{dt^j} \right\} \mathcal{E} = \delta(t) \quad (2.38)$$

dane jest wzorem

$$\mathcal{E} = \theta(t) Z(t), \quad (2.39)$$

gdzie $Z(t)$ jest to rozwiązanie klasyczne zagadnienia podstawowego

$$L \left[\frac{d}{dt} \right] Z(t) = 0, \quad Z(0) = Z'(0) = \dots Z^{(n-2)}(0) = 0, \quad Z^{(n-1)}(0) = 1.$$

Rozdział 3

Iloczyn prosty (tensorowy) i splot dystrybucji.

3.1.

3.1.1. Definicja. Określamy iloczyn tensorowy najpierw dla funkcji \mathcal{L}_{Loc} . A więc niech:

$$f \in \mathcal{L}_{Loc}(\mathcal{R}^n), g \in \mathcal{L}_{Loc}(\mathcal{R}^m).$$

Wówczas funkcja $h(x, y) = f(x) \cdot g(y) \in \mathcal{L}_{Loc}(\mathcal{R}^{n+m})$. Określa ona dystrybucję $h = f \otimes g$, która działa na zbiorze $\mathcal{D}'(\mathcal{R}^{n+m})$ w taki sposób:

$$(f \otimes g, \varphi) = \int f(x) \left[\int g(y) \cdot \varphi(x, y) dy \right] dx \quad (3.1)$$

Oczywistym jest, że $f \otimes g = g \otimes f$ dla funkcji lokalnie całkowalnych. Ogólnie przyjmujemy taką definicję:

Definicja 3.1..1 *Iloczynem prostym (tensorowym) dystrybucji $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{R}^n)$ $g \in \mathcal{D}'(\mathcal{R}^m)$ nazywamy dystrybucję $f \otimes g \in \mathcal{D}'(\mathcal{R}^{n+m})$, określoną wzorem:*

$$(f \otimes g, \varphi(x, y)) := \left(f(x), \left(g(y), \varphi(x, y) \right) \right) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{R}^{m+n}). \quad (3.2)$$

Musimy udowodnić, że wzór (3.2) dla każdej pary dystrybucji z odpowiednich przestrzeni rzeczywiście określa funkcjonal liniowy ciągły. Przede wszystkim chcielibyśmy udowodnić, że $(g, \varphi) \in \mathcal{D}(\mathcal{R}^n)$. Spróbujmy więc udowodnić:

Lemat 3.1..1 $\forall_{g \in \mathcal{D}'(\mathcal{R}^m)}, \forall_{\varphi \in \mathcal{D}'(\mathcal{R}^{m+n})} \psi(x) = \left(g(y), \varphi(x, y) \right) \in \mathcal{D}(\mathcal{R}^n)$.

Dowód.

(a) Funkcja $\psi(x)$ jest dobrze określona, ponieważ $\varphi(x, \cdot) \in \mathcal{D}(\mathcal{R}^m) \forall x$.

- b) $\frac{1}{\Delta} \left\{ \psi(\dots x_i + \Delta \dots) - \psi(\dots x_i \dots) \right\} = \left(g, \frac{1}{\Delta} \left[\varphi(\dots x_i + \Delta \dots) - \varphi(x_i) \right] \right) \rightarrow (g, \partial_i \varphi)$ gdy $\Delta \rightarrow 0$, ponieważ funkcjonal g jest ciągły. W podobny sposób wykazuje się istnienie $\mathcal{D}^\alpha \psi(x)$ dla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Wniosek 3.1.1 $\psi \in C^\infty$.

- c) Funkcja $\psi(x)$ ma zwarty nośnik. Wynika to z tego, że φ ma nośnik zwarty, a więc istnieje $K(0, R) \supset \mathcal{R}^{n+m}$ takie, że $\text{supp } \varphi \subset K(0, R)$. A więc jeżeli $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} > R$, wówczas $\varphi(x, \cdot) \equiv 0$ i dlatego $\psi(x) = (g, \varphi(x, \cdot)) = (g, 0) = 0$.

Na mocy lematu 3.1.1 funkcjonal $(f, \psi(x)) = (f, (g, \varphi))$ jest dobrze określony.

Pozostało nam do wykazania:

- (d) że $f \otimes g$ jest funkcjonalem liniowym,

- (e) że jest to funkcjonal ciągły.

1. Dowód punktu (d) pozostawia się czytelnikowi jako ćwiczenie

Ad.(e) $\left\{ \mathcal{D}(\mathcal{R}^{n+m}) \ni \varphi_k \rightarrow \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{R}^{n+m}) \right\} \Rightarrow$ z ciągłości g wynika,

że $\psi_k(x) = (g, \varphi_k) \rightarrow \psi(x) = (g, \varphi)$ punktowo, czyli dla każdego x . Ponieważ ψ_k oraz ψ mają zwarty nośnik, to z punktowej zbieżności wynika również zbieżność w normie jednostajnej (p. na przykład [3]):

$$\left(\psi_k(x) \rightarrow \psi(x) \forall x \in G - \text{zb.zwarty} \right) \Leftrightarrow \sup_{x \in G} |\psi_k(x) - \psi(x)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

3.1.2. Przemienność iloczynu tensorowego. Dla funkcji próbnej $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{R}^{n+m})$, która się przedstawia w postaci kombinacji liniowej iloczynów prostych

$$\varphi(x, y) = \sum u_i(x) \cdot v_i(y), \quad \text{gdy } u_i \in \mathcal{D}(\mathcal{R}^n), v_i \in \mathcal{D}(\mathcal{R}^m), \quad (3.3)$$

przemienność $f \otimes g$ wynika z definicji:

$$\left(f \otimes g, \sum u_i(x) \cdot v_i(y) \right) = \sum \left(f \left(g, u_i(x) v_i(y) \right) \right) = \sum \left(f, u_i(g, v_i) \right) = \quad (3.4)$$

$$= \sum (g, v_i) \cdot (f, u_i) = \dots = \left(g \otimes f, \sum u_i(x) \cdot v_i(y) \right), \quad (3.5)$$

Dla dowolnej $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{R}^{n+m})$ wynika to z następującego lematu:

Lemat 3.1.2 *Zbiór funkcji postaci (3.3) jest gęsty w $\mathcal{D}(\mathcal{R}^{n+m})$.*

Podamy konstrukcję funkcji próbnych postaci (3.3), zbieżnych do dowolnej $\varphi \in \mathcal{D}^{n+m}$. Będziemy korzystać z pewnego znanego twierdzenia, które podamy tutaj bez dowodu:

Twierdzenie 3.1.1. (Weierstrass) Dla funkcji $\psi \in C^N(K(0, R))$ i dowolnie małego $\varepsilon > 0$, istnieje wielomian $P^\varepsilon = \sum_{|\alpha_i| \leq M} A_\alpha^\varepsilon x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_p^{\alpha_p}$ taki, że $\sup_{x \in K} |\mathcal{D}^\beta \psi - \mathcal{D}^\beta P^\varepsilon| < \varepsilon \forall |\beta| \leq N$.

Inaczej mówiąc, wielomiany jednostajnie aproksymują funkcję gładką na zbiorze zwartym.

Niech więc dana jest dowolna funkcja $\psi(x, y) \in \mathcal{D}(\mathcal{R}^{n+m})$ oraz niech dany jest wielomian $P_N^\varepsilon = \sum A_{\alpha, \beta} x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n} y_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot y_m^{\beta_m}$, który przybliży tę funkcję wraz z pochodnymi \mathcal{D}^γ , $|\gamma| < N$ na zbiorze zwartym $K(0, 2\sqrt{2}R)$, gdzie $\text{supp } \varphi \in K(0, R)$.

Niech $e(x) \in \mathcal{D}(\mathcal{R}^n)$ i $h(y) \in \mathcal{D}(\mathcal{R}^m)$ są to funkcje o własnościach:

$$e(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in K(0, R) \\ 0 & \text{dla } x \notin K(0, 2R) \end{cases}$$

$$h(y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } y \in K(0, R) \\ 0 & \text{dla } y \in \mathcal{R} \setminus K(0, 2R) \end{cases}$$

Wtedy zbiór funkcji

$$\psi_N^\varepsilon = e(x) \cdot h(y) \cdot P_N^\varepsilon(x, y) \tag{3.6}$$

- a) należy do zbioru (3.3) (może być przedstawiony w postaci $\psi_N^\varepsilon = \sum u_N^\varepsilon(x) v_N^\varepsilon(y)$)
- b) przybliży funkcję $\varphi(x, y)$ z dowolną dokładnością.

3.1.3. Dalsze własności iloczynu tensorowego.

1. Ciągłość: $(f_k \rightarrow f) \Rightarrow f_k \otimes g \rightarrow f \otimes g$ (to samo dla drugiego składnika).
2. Łączność - przemienność $f(x) \otimes (g(y) \otimes h(z)) = (f(x) \otimes g(y)) \otimes h(z) = \dots$
 $f \otimes g \otimes h = g \otimes f \otimes h = \dots$ itd.
3. $\mathcal{D}_x^\alpha (f(x) \otimes g(y)) = (\mathcal{D}_x^\alpha f(x)) \otimes g(y)$.
4. Niech $a \in C^\infty(\mathcal{R}^n)$ wtedy $a(x) \cdot (f(x) \otimes g(y)) = [a(x) \cdot f(x)] \otimes g(y)$.

Dowody tych stwierdzeń są bardzo elementarne.

5. $(f \otimes g)(x + h, y) = f(x + h) \otimes g(y)$.
6. $f(x) \otimes 1(y) = \left(f(x), \int \varphi(x, y) dy \right) = \int \left(f(x), \varphi(x, y) \right) dy$.

Przykłady:

1. $(f(x) \otimes \delta(y), \varphi(x, y)) = (f(x), (\delta(y), \varphi(x, y))) = (f(x), \varphi(x, 0))$.
2. $(f(x) \otimes \delta'(y), \varphi(x, y)) = -(f(x), (\delta(y), \varphi'_y(x, y))) = -(f(x), \varphi'_y(x, 0))$.

3.1.4. Splot dystrybucji. Splotem funkcji $f, g \in \mathcal{L}_{Loc}(\mathcal{R})$ takich, że:

$$h(x) = \int |g(y) \cdot f(x - y)| dy \in \mathcal{L}_{Loc}$$

nazywamy dystrybucję regularną:

$$f * g(x) = \int g(y)f(x - y)dy = \int f(\xi)g(x - \xi)d\xi = g * f(x) \quad (3.7)$$

Jako funkcja lokalnie całkwalna $f * g$ określa dystrybucję:

$$(f * g(x), \varphi(x)) = \int [g(y)f(x - y)]\varphi(x)dx \quad (3.8)$$

$$= \int \left[\int f(y)g(x - y)dy \right] \varphi(x)dx = \quad (3.9)$$

$$= (g * f, \varphi) = \int [f(y) \cdot g(\xi)]\varphi(y + \xi)d\xi dy \quad (3.10)$$

Przy zamianie zmiennych powyżej stosowaliśmy tw. Fubiniego.

Bardzo ważna uwaga! Splot można określić nie dla każdej pary funkcji lokalnie całkwalnych, a co za tym idzie, nie dla każdej pary dystrybucji. Jest to jednak pojęcie bardzo ważne, dlatego odnotujemy tu kilka przypadków, dla których splot jest dobrze określoną dystrybucją.

- (I) Niech funkcje $f, g \in \mathcal{L}_{Loc}(\mathcal{R}^1)$ oraz niech jedna z nich (np g) ma zwarty nośnik. Wykażemy, że splot istnieje, zakładając, że $supp g \in K(0, R)$. Rozpatrzmy następującą funkcję:

$$h(x) = \int |g(y)f(x - y)| dy = \int_{-R}^R g(y)f(x - y)dy.$$

Czy $h(x) \in \mathcal{L}_{Loc}$? Weźmy $K(0, R_1)$ $0 < R < \infty$ i scałkujemy $h(x)$ w tych granicach:

$$\int_{-R_1}^{R_1} h(x) dx = \int_{-R_1}^{R_1} dx \left(\int_{-R}^R |g(y)f(x - y)| dy \right) = \quad (3.11)$$

$$= \int_{-R_0}^{R_x} |g(y)| dy \left(\int_{-R_1}^{R_1} |f(x - y)| dx \right) \leq \quad (3.12)$$

$$\leq \int_{-R}^R |g(y)| dy \int_{K(0, \max\{R_1, R_2\})} |f(\xi)| d\xi < \infty. \quad (3.13)$$

(II) Niech funkcje $f, g \in \mathcal{L}_{Loc}(\mathcal{R})$, $\text{supp } f \subset \mathcal{R}_+$ oraz $\text{supp } g \subset \mathcal{R}_+$.

$$h(x) = \int_0^x |g(y)f(x-y)|dy,$$

$$\int_{K(0,R)} h(x) = \int_{K(0,R)} dx \left[\int_0^R |g(y)f(x-y)|dy \right] = \quad (3.14)$$

$$= \int_0^R \left(\int_y^R |f(x-y)|dx \right) |g(y)|dy \leq \quad (3.15)$$

$$\leq \int_0^R |g(y)|dy \cdot \int_0^R |f(\xi)|d\xi \leq \infty. \quad (3.16)$$

(III) Niech f, g będą całkowalne na \mathcal{R}^n . Wtedy:

$$\int h(x)dx = \int |g(y)| \int |f(x-y)|dx dy = \int |g(y)|dy \int |f(\xi)|d\xi < \infty$$

Podamy teraz definicję formalną splotu dystrybucji.

Definicja 3.1..2. Niech $f, g \in \mathcal{D}'(\mathcal{R}^n)$ oraz $\mathcal{D}(\mathcal{R}^{2n}) \ni \eta_k, k = 1, 2, \dots$ – ciąg funkcji próbnych, zbieżnych do $1(x, y) \in \mathcal{R}^{2n}$. Jeżeli $\forall \varphi \in \mathcal{R}^n$ istnieje

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(y), \varphi(x+y) \eta_k(x, y))$$

i granica ta nie zależy od ciągu η_k , wówczas tak określoną dystrybucję nazywamy splotem dystrybucji f oraz g i oznaczamy $f * g$.

Uwaga. Przykładem ciągu funkcji η_k , zbieżnych do jedności w \mathcal{R}^{2n} może służyć ciąg $\eta_k = \chi_k^\varepsilon$, gdzie

$$\chi_k^\varepsilon(x) = \int \omega_\varepsilon(x-y) \chi_1\left(\frac{y}{k}\right) dy,$$

χ_1 – funkcja charakterystyczna zbioru $K(0, 1) \in \mathcal{R}^{2n}$, ω_ε – ε -czapa.

Zachodzi

Twierdzenie 3.1..2. Niech $f, g \in \mathcal{D}'(\mathcal{R}^n)$, przy czym jedna z dystrybucji, na przykład g , ma nośnik zwarty (tzn. $\text{supp } g \subset K(0, R)$ dla pewnego $R > 0$). Wówczas

(a) $f * g$ istnieje;

(b) zachodzi wzór

$$(f * g, \varphi) = (f(x) g(y), \eta(y) \varphi(x + y)),$$

gdzie η – dowolna funkcja próbna taka, że $\eta(y) = 1 \quad \forall y \in K(0, R) \supset \text{supp } g$.

Szkic dowodu.

(a) Niech $\text{supp } \varphi \in K(0, R_1) \wedge \text{supp } g \in K(0, R_2)$. Weźmy dowolną funkcję próbną $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{R}^n)$ taką, że $\text{supp } \varphi \in K(0, R_1)$. Wówczas $\varphi(x + y) = 0$ jeżeli $|x + y| > R_1$ i $g(y) = 0$ gdy $|y| > R_2$. Zatem dla dostatecznie dużych n obszar całkowania jest taki, jak pokazane na rys. xxx. Konfiguracja ta już się nie zmienia ze wzrostem n .

(b) $f(x) g(y) \equiv f(x) g(y) \eta(y)$.

Stąd mamy ciąg równości:

$$(f(x) g(y), \varphi(x + y) \eta_k(x, y)) = (f(x) \cdot [g \cdot \eta(y)], \varphi(x + y) \eta_k(x, y)) = \quad (3.17)$$

$$= (f(x) g(y) \varphi(x + y) \eta_k(x, y) \eta(y)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (f(x) g(y), \psi(x, y)), \quad (3.18)$$

gdzie $\psi(x, y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x + y) \eta_k(x, y) \eta(y)$. (p. rys. xxx). Drogą prostych rozumowań dochodzimy do wniosku, że $\psi(x, y) = \varphi(x + y) \eta(y) \in D(R^{2n})$ i działanie to nie zależy od wyboru η .

Wniosek 3.1..2. Zachodzi równość

$$f * \delta = \delta * f = f.$$

Dowód. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{R}^n)$ oraz dowolnej funkcji próbnej $\eta \in \mathcal{D}(\mathcal{R}^n)$ takiej, że istnieje $R > 0$: $\eta(y) = 1 \quad \forall y \in K(0, R)$ (zauważmy, iż $\forall R > 0 \quad \text{supp } \delta \subset K(0, R)$), zachodzi następujący ciąg równości:

$$(f * \delta, \varphi) = (f(x) \delta(y), \varphi(x + y) \eta(y)) = \quad (3.19)$$

$$= (f(x)(\delta(y), \varphi(x + y) \eta(y))) = (f(x), \varphi(x + 0) \eta(0)) = (f(x), \varphi(x)), \quad (3.20)$$

c.b.d.o.

Druga równość, t.j. $\delta * f = f$, wynika z przemienności iloczynu tensorowego. Jest ona również konsekwencją następującego, bardziej ogólnego stwierdzenia, dowód którego polecamy jako ćwiczenie:

Lemat 3.1..3. Jeżeli istnieje $f * g$, to istnieje również $g * f$, przy czym

$$f * g = g * f.$$

3.1.5. Różniczkowanie splotu.

Lemat 3.1..4. *Jeżeli istnieje splot $f * g$, to również istnieje splot $[D^\alpha f] * g$, oraz $f * [D^\alpha g]$ przy czym*

$$D^\alpha [f * g] = [D^\alpha f] * g = f * [D^\alpha g]. \quad (3.21)$$

Dowód. Wystarczy podać dowód dla $D^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_j}$, gdyż dla wyższych pochodnych dowód przeprowadza się indukcyjnie. Zauważmy, więc, że dla dowolnego ciągu funkcji próbnych $\mathcal{D}(\mathcal{R}^{2n}) \ni \eta_k$, zbieżnego do jedności, ciąg $\eta_k + \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j}$ również zmierza do 1(x, y) (p. rys.xxxxxx). Wobec tego, mamy ciąg równości:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} [f * g], \varphi \right) &= - \left(f * g, \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi \right) = - \lim_{k \rightarrow \infty} \left(f(x) g(y), \eta_k(x, y) \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x + y) \right) = \\ &= - \lim_{k \rightarrow \infty} \left(f(x) g(y), \frac{\partial}{\partial x_j} [\varphi(x + y) \eta_k(x, y)] - \varphi(x + y) \frac{\partial}{\partial x_j} \eta_k(x, y) \right) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f(x) g(y), \eta_k(x, y) \varphi(x + y) \right) + \left(f g, \varphi \left[\frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} + \eta_k \right] \right) - (f g, \varphi \eta_k) \right\} \\ &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \left(\left[\frac{\partial f}{\partial x_j} \right] * g, \varphi \right). \end{aligned}$$

Druga równość w (3.21) wynika z tego, iż $\frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x + y) \equiv \frac{\partial}{\partial y_j} \varphi(x + y)$.

Uwaga. Z tego, że istnieje, na przykład, $[D^\alpha f] * g$, nie wynika istnienie $f * g$. Rozpatrzmy naprzykład, równości

$$\theta' * 1 = \delta * 1 = 1.$$

Z drugiej strony, możemy napisać co następuje:

$$\theta * 1' = \theta * 0 = 0$$

Przyczyną braku równości jest nieistnienie splotu $\theta * 1$.

Przykłady.

1. $\delta^{(k)} * f = \delta * f^{(k)} = f^{(k)}$.
2. $\delta(x - a) * f = f(x - a)$.

Dowód.

$$\begin{aligned} (\delta(x - a) * f, \varphi) &= (\delta(x - a) f(y), \eta(y) \varphi(x + y)) = \\ &= (f(y), (\delta(z), \eta(z + a) \varphi(z + a + y))) = \\ &= (f(y), \varphi(a + y)) = (f(\xi - a), \varphi(\xi)) \end{aligned}$$

3.

$$\theta * \theta = \int_{\mathbb{R}^1} \theta(x-y)\theta(y) dy = \int_0^x \theta(x) dy = x \cdot \theta(x). \quad (3.22)$$

Zadania. Znaleźć:

- (a) $\theta(x) * [x \cdot \theta(x)]$;
- (b) $[\theta(x) \cos x] * [x^3 \cdot \theta(x)]$;
- (c) $\delta(x-a) * \delta(x-b)$;
- (d) $\theta(a-|x|) * \theta(a-|x|)$;

3.2. Zastosowania spłotu.

3.2.1. Rozwiązywanie równań niejednorodnych

 Niech

$$\hat{L}(D) = \frac{d^n}{dt^n} + \sum_{k=1}^n a_{n-k} \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}, \quad (3.23)$$

oraz $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'$ – rozwiązanie podstawowe operatora $\hat{L}(D)$, czyli dystrybucja, spełniająca równanie

$$\hat{L}(D)\mathcal{E} = \delta(t).$$

Dalej, niech $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ i istnieje $f * \mathcal{E} = \mathcal{E} * f$. Wówczas zachodzi

Twierdzenie 3.2..1. *Rozwiązanie równania niejednorodnego*

$$\hat{L}(D)u = f, \quad u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1) \quad (3.24)$$

dane jest wzorem

$$u = \mathcal{E} * f. \quad (3.25)$$

Dowód.

$$\hat{L}(D)[\mathcal{E} * f] = [\hat{L}(D)\mathcal{E}] * f = \delta * f = f.$$

3.2.2. Zagadnienia początkowe.

Rozpatrzmy zagadnienie początkowe

$$u'' + \omega^2 u = f(t), \quad t > 0, \quad (3.26)$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} u = u_0, \quad \lim_{t \rightarrow +0} u' = u_1,$$

$f \in C^0(0, +\infty)$. Wprowadźmy następujące funkcje:

$$\tilde{f}(t) = \theta(t) f(t), \quad \tilde{u}(t) = \theta(t) u(t).$$

Oczywistym jest, że funkcje \tilde{f} , \tilde{u} pokrywają się z f , u , gdy $t > 0$. Z drugiej strony, wprowadzając w taki sposób nowe funkcje, zyskujemy to że istnieją odpowiednie sploty, o których mowa w twierdzeniu 3.2..1, zachodzi, bowiem,

Lemat 3.2..1. *Jeżeli $f, g \in C^0(R_+^1)$, wówczas istnieje splot $f * g$. Jest on określony wzorem*

$$f * g(x) = \theta(x) \int_0^x f(x - \xi) g(\xi) d\xi. \quad (3.27)$$

Dowód. Dla f, g , których nośnik jest zawarty w R_+^1 ,

$$f(x - \xi) g(\xi) = \theta(x) f(x - \xi) g(\xi) \chi_{[0, x](\xi)} \Rightarrow f * g(x) = \theta(x) \int_0^x f(x - \xi) g(\xi) d\xi$$

gdzie $\chi_{[0, x]}$ – funkcja charakterystyczna zbioru $[0, x]$. Stąd wynika wzór (3.27).

Zgodnie ze wzorem na pochodne uogólnione, dla funkcji \tilde{u} , pokrywającej się z rozwiązaniem zagadnienia początkowego (3.26) mamy:

$$\tilde{u}' = \{\tilde{u}'\} + \delta(t) u_0, \quad (3.28)$$

$$\tilde{u}'' = \{\tilde{u}''\} + \delta(t) u_1, + \delta'(t) u_0. \quad (3.29)$$

Dlatego \tilde{u} spełnia równanie

$$\tilde{u}'' + \omega^2 \tilde{u} = \tilde{f}(t) + \delta(t) u_1, + \delta'(t) u_0. \quad (3.30)$$

W rozdziale 2.4.7. znaleźliśmy rozwiązanie podstawowe operatora

$$\hat{L}_1(D) = \frac{d^2}{dt^2} + \omega^2.$$

Na mocy lematu 3.2..1, rozwiązanie równania (3.30) można otrzymać, splatając rozwiązanie podstawowe (2.36) z prawą częścią tego równania. A więc,

$$\tilde{u} = \mathcal{E} * \left(\tilde{f}(t) + \delta(t) u_1, + \delta'(t) u_0 \right) = \quad (3.31)$$

$$= \theta(t) \left\{ \frac{1}{\omega} \int_0^t f(\xi) \sin[\omega(t - \xi)] d\xi + u_0 \cos(\omega t) + u_1 \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right\}. \quad (3.32)$$

Dla $t > 0$ jest to rozwiązanie klasyczne zagadnienia początkowego (3.26).

Procedura ta rozszerza się na inne zagadnienia początkowe dla równań zwyczajnych o stałych współczynnikach.

Zadanie. Wykazać, że dla $t > 0$ rozwiązanie klasyczne zagadnienia początkowego

$$\begin{aligned} u' + au &= f(t), & t > 0, \\ \lim_{t \rightarrow +0} u &= u_0, \end{aligned} \quad (3.33)$$

gdzie $f \in C^0(0, +\infty)$, dane jest wzorem

$$u(t) = \theta(t) \int_0^t f(\xi) e^{-(t-\xi)} d\xi + u_0 e^{-t}.$$

3.2.3. Uogólnione zagadnienia Cauchy dla równania falowego oraz równania transportu Niech dla $t > 0$ funkcja $u(t, x)$ jest rozwiązaniem klasycznym zagadnienia początkowego

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(t, x) = f(t, x), \quad (3.34)$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} u(t, x) = u_0(x), \quad \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = u_1(x), \quad (3.35)$$

$f \in C^0([0, \infty) \times R^1)$, $u_0 \in C^1(R^1)$, $u_1 \in C^1(R^1)$. Przedłużamy funkcje f , u zerem w dolnej półpłaszczyźnie:

$$\tilde{u}(t, x) = \begin{cases} u(t, x) & \text{gdy } t > 0, \\ 0 & \text{gdy } t \leq 0, \end{cases}$$

$$\tilde{f}(t, x) = \begin{cases} f(t, x) & \text{gdy } t > 0, \\ 0 & \text{gdy } t \leq 0, \end{cases}$$

Zachodzi

Lemat 3.2..2. Funkcja $\tilde{u}(t, x)$ spełnia równanie

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \tilde{u}(t, x) = \tilde{f}(t, x) + u_0(x) \delta'(t) + u_1(x) \delta(t). \quad (3.36)$$

Dowód. Zachodzą następujące wzory na pochodne uogólnione funkcji \tilde{u} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(t, x) &= \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) & \text{gdy } t > 0, \\ 0 & \text{gdy } t \leq 0, \end{cases} \\ \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}(t, x) &= \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) & \text{gdy } t > 0, \\ 0 & \text{gdy } t \leq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(t, x) &= \left\{ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(t, x) \right\} + u_0(x) \delta(t), \\ \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}(t, x) &= \left\{ \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}(t, x) \right\} + u_0(x) \delta'(t) + u_1(x) \delta(t).\end{aligned}$$

A więc, jeżeli funkcja u jest rozwiązaniem klasycznym zagadnienia początkowego (??), to przedłużona funkcja \tilde{u} spełnia równanie (3.36).

Przez analogię formułujemy uogólnione zagadnienie początkowe:

Definicja 3.2..1. *Uogólnionym rozwiązaniem zagadnienia Cauchy dla równania falowego nazywamy dystrybucję $u \in \mathcal{D}'([0, \infty) \times R^1)$, spełniającą równanie*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(t, x) = f(t, x) + u_0(x) \delta'(t) + u_1(x) \delta(t). \quad (3.37)$$

Zachodzi

Twierdzenie 3.2..2. *Niech \mathcal{E} – rozwiązanie równania*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \mathcal{E} = \delta(t, x), \quad (3.38)$$

*i niech f , u_0 , u_1 , o których mowa w 3.2..1 są takie że istnieją sploty $\mathcal{E} * f$, $\mathcal{E} * u_0 \delta'(t)$ oraz $\mathcal{E} * u_1 \delta(t)$. Wówczas rozwiązanie uogólnionego zagadnienia początkowego dane jest wzorem*

$$u = \mathcal{E} * [f + u_0 \delta'(t) + u_1 \delta(t)].$$

Analogicznie uogólnione zagadnienie początkowe dla równania transportu formułuje się następująco:

Znaleźć dystrybucję $u \in \mathcal{D}'$ spełniającą równanie

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(t, x) = f(t, x) + u_0(x) \delta(t). \quad (3.39)$$

Do rozwiązania tego problemu wykorzystuje się dystrybucja \mathcal{E} , spełniające równanie

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \mathcal{E}(t, x) = \delta(t, x). \quad (3.40)$$

Rozdział 4

Metoda transformacji Fouriera

4.1. Przestrzeń dystrybucji temperowanych

4.1.1. Przestrzeń Schwarz Potężnym narzędziem do odnajdywania rozwiązań uogólnionych równań cząstkowych o stałych współczynnikach jest transformacja Fouriera. Definiujemy ją w następujący sposób: $\forall \varphi \in \mathcal{D}$

$$\hat{\varphi}(\xi) \equiv F[\varphi](\xi) = \int_{R^n} \varphi(x) e^{i(x,\xi)} dx.$$

Widzimy, iż nośnik $\hat{\varphi}$ nie jest zbiorem zwartym, a zatem F nie jest odwzorowaniem przestrzeni $\mathcal{D}(R^n)$ w siebie. Wyjściem z sytuacji jest rozszerzenie przestrzeni funkcji próbnych.

Definicja 4.1..1. *Przestrzenią Schwarz* $\mathcal{S}(R^n)$ nazywamy zbiór

$$\mathcal{S} = \left\{ \varphi \in C^\infty(R^n) : \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^m \|D^\alpha \varphi(x)\| < \infty \right. \\ \left. \forall m \in N \quad \text{oraz} \quad \forall \alpha \in \prod_1^n N. \right\}$$

Zbieżność w \mathcal{S} definiuje się za pomocą przeliczalnej rodziny norm:

$$(\mathcal{S} \ni \varphi_k \rightarrow \varphi \in \mathcal{S}) \iff \\ \iff \left(\forall \alpha, \beta \in N \times N \dots \times N \lim_{k \rightarrow \infty} x^\beta D^\alpha \varphi_k(x) = x^\beta D^\alpha \varphi(x) \quad \forall x \in R^n. \right)$$

Podstawowe własności zbioru \mathcal{S} podane są w poniższym lemacie:

Lemat 4.1..1.

- (a) $\mathcal{S}(R^n)$ jest przestrzenią liniową;
- (b) przestrzeń $\mathcal{D}(R^n)$ jest gęsta w $\mathcal{S}(R^n)$;
- (c) $(\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi) \implies (\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi)$.

Dowód. Ad (b): $\forall \varphi \in \mathcal{S}$ możemy określić następujący ciąg: $\varphi_k = \varphi(x) \cdot \eta\left(\frac{x}{k}\right) \in \mathcal{D}$, gdzie $\mathcal{D} \ni \eta(x)$ jest to funkcja o następujących własnościach:

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } |x| < 1 \\ 0 & \text{gdy } |x| > 1 + \varepsilon. \end{cases}$$

Stwierdza się, że $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$. Niech $n = 1$, zaś $D^\alpha = d/dx$. Mamy wtedy:

$$x^\beta \frac{d}{dx} \varphi(x) \eta\left(\frac{x}{k}\right) = x^\beta \left(\frac{d\varphi}{dx} \eta\left(\frac{x}{k}\right) + \frac{1}{k} \varphi(x) \dot{\eta}\left(\frac{x}{k}\right) \right).$$

Łatwo widać, że ostatnie wyrażenie w prawej części dąży do zera, gdy $k \rightarrow \infty$, wtenczas gdy pierwszy dąży jednostajnie do $x^\beta \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$.

Przykładem funkcji z \mathcal{S} , pełniącej tak samo doniosłą rolę, jak ε -czapa w przypadku przestrzeni \mathcal{D} , jest funkcja $e^{-|x|^2}$.

Analogicznie jak w przypadku \mathcal{D} , zachodzi

Lemat 4.1..2. *Następujące operacje są ciągłe w \mathcal{S} :*

- (a) różniczkowanie: $\mathcal{S} \ni \varphi \rightarrow D^\alpha \varphi \in \mathcal{S}$;
- (b) zamiana zmiennych: $\mathcal{S} \ni \varphi(x) \rightarrow D^\alpha \varphi(Ax + b) \in \mathcal{S}$, gdzie $A \in M_{n \times n} : \det A \neq 0$;
- (c) mnożenie przez funkcję $a \in \Theta_M$, gdzie

$$\Theta_M = \{a \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \forall \alpha \exists C_\alpha \wedge m_\alpha : \\ |D^\alpha a(x)| < C_\alpha (1 + |x|)^{m_\alpha}\}$$

4.1.2. Przestrzeń dystrybucji temperowanych

Definicja 4.1..2. *Dystrybucją temperowaną nazywamy liniowy funkcjonal f , określony na przestrzeni \mathcal{S} i ciągły w metryce słabej, tzn taki, że*

$$\left(\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \right) \implies \left((f, \varphi_k) \rightarrow (f, \varphi) \right).$$

Przestrzeń tę oznaczamy symbolem \mathcal{S}' .

Przykłady dystrybucji temperowanych.

1. Jeżeli $f \in \mathcal{L}_{loc}(R^n)$ i znajdzie się taka liczba naturalna m , że

$$\int |f(x)| (1 + |x|)^{-m} dx < \infty, \quad (4.1)$$

wówczas $f(x)$ określa funkcjonal regularny, należący do $\mathcal{S}'(R^n)$.

2. Każda dystrybucja $f \in \mathcal{D}'$, która ma zwarty nośnik przedłuża się na \mathcal{S}' zgodnie ze wzorem:

$$(f, \varphi) = (f, \eta \cdot \varphi), \quad (4.2)$$

gdzie η – dowolna funkcja próbna z \mathcal{D} , tożsamościowo równa jedności w pewnym otoczeniu $\text{supp } f$.

Uwaga. Na $\mathcal{S}'(R^n)$ w sposób naturalny przenoszą się pojęcia iloczynu tensorowego oraz splotu dystrybucji.

4.2. Przekształcenia Fouriera

4.2.1. Transformacja Fouriera funkcji z przestrzeni \mathcal{S} .

Definicja 4.2..1. Transformacją Fouriera na zbiorze \mathcal{S} nazywamy odwzorowanie, zdefiniowaną zgodnie ze wzorem

$$\mathcal{S} \ni \varphi \Rightarrow \hat{\varphi}(\xi) \equiv F[\varphi](\xi) = \int_{R^n} \varphi(x) e^{i(x,\xi)} dx. \quad (4.3)$$

Własności transformacji Fouriera.

Zachodzi

Lemat 4.2..1.

(a) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{S}$, to $F[\varphi](\xi) \in C^\infty$;

$$(b) \quad D^\alpha (F[\varphi](\xi)) = F[(ix)^\alpha \varphi](\xi); \quad (4.4)$$

$$(c) \quad F[D^\alpha \varphi](\xi) = (-i\xi)^\alpha F[\varphi](\xi); \quad (4.5)$$

Dowód.

Ad [(b)]:

$$D^\alpha (F[\varphi](\xi)) = D^\alpha \int \varphi(x) e^{i(x,\xi)} dx = \int \varphi(x) (ix)^\alpha e^{i(x,\xi)} dx = F[(ix)^\alpha \varphi](\xi);$$

Ad [(c)]:

$$F[D^\alpha \varphi](\xi) = \int [D^\alpha \varphi(x)] e^{i(x,\xi)} dx = (-1)^{|\alpha|} \int [D^\alpha e^{i(x,\xi)}] \varphi(x) dx = (-i\xi)^\alpha F[\varphi](\xi).$$

Ze wzorów (4.4)–(4.5) niemal natychmiast wynika

Wniosek 4.2.1.

$$\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi) = i^{|\beta|+|\alpha|} F[D^\beta (x^\alpha \varphi(x))](\xi).$$

Stąd mamy podstawowe

Twierdzenie 4.2.1. $(\varphi \in \mathcal{S}) \Rightarrow (F[\varphi] \in \mathcal{S}.)$ **Dowód.** $\forall \alpha, \beta$

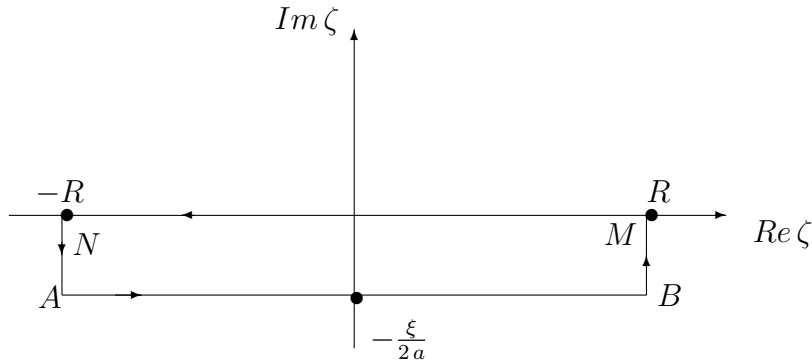
$$|\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi)| \leq \int |D^\beta [x^\alpha \varphi(x)]| dx < \infty. \quad (4.6)$$

4.2.2. Odwrotna transformacja Fouriera.**Twierdzenie 4.2.2.** *Odwrotna transformacja Fouriera dana jest wzorem*

$$F^{-1}[\hat{\varphi}](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \hat{\varphi}(\xi) e^{-i(\xi,x)} d\xi. \quad (4.7)$$

Dowód.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \hat{\varphi}(\xi) e^{-i(\xi,x)} d\xi &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \left[\int_{R^n} e^{i(\xi,y)} \varphi(y) dy \right] e^{-i(\xi,x)} d\xi = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{\rho_k \rightarrow +\infty} \int_{R^n} \varphi(y) \left[\prod_{1 \leq k \leq n} \int_{-\rho_k}^{\rho_k} e^{i\xi_k (y_k - x_k)} d\xi_k \right] dy = \\ &= \frac{1}{(\pi)^n} \lim_{\rho_k \rightarrow +\infty} \int_{R^n} \varphi(y) \prod_{1 \leq k \leq n} \frac{\sin \rho_k (y_k - x_k)}{y_k - x_k} dy = \varphi(x). \end{aligned}$$



Rys. 4.1:

Ostatnia równość wynika z tego, że

$$\lim_{\varepsilon_k \rightarrow +0} \frac{\sin \frac{y_k - x_k}{\varepsilon_k}}{y_k - x_k} = \pi \delta(y_k - x_k), \quad \varepsilon_k = \rho_k^{-1}.$$

Przykład

$$F \left[e^{-a^2 x^2} \right] (\xi) = \int e^{-a^2 x^2 + i \xi x} dx = \frac{1}{a} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}} \int_{C_\xi} e^{-\zeta^2} d\zeta,$$

gdzie $\zeta = ax - \frac{i\xi}{2a}$, $C_\xi = \{ax - \frac{i\xi}{2a} : \xi = \text{const}, \quad -\infty < x < +\infty\}$

Rozpatrzmy całkę

$$\oint_{L_R} e^{-\zeta^2} d\zeta,$$

gdzie L_R – obwód zamknięty, przedstawiony na rys. 4.1. Ponieważ funkcja $e^{-\zeta^2}$ jest holomorphyzna w każdej dziedzinie skończonej płaszczyzny zespolonej, więc, na mocy twierdzenia o residuach [4], całka powyższa jest równa zero. Okazuje się, że odpowiednie całki na odcinkach pionowych NA i BM znikają, gdy $R \rightarrow +\infty$. Odpowiednie oszacowanie przedstawimy tu jedynie dla odcinka BM , gdyż dla NA robi się to całkiem analogicznie.

Po dokonaniu zamiany zmiennych $\zeta = R + iy$, otrzymamy oszacowanie:

$$\begin{aligned} \left| \int_{BM} e^{-\zeta^2} d\zeta \right| &= \left| \int_{-\frac{\xi}{2a}}^0 e^{-(R^2 + 2iRy - y^2)} dy \right| \leq \\ &\leq e^{-R^2} \int_0^{\frac{|\xi|}{2a}} e^{y^2} dy \leq e^{-R^2} e^{|\frac{\xi}{2a}|^2} \left| \frac{\xi}{2a} \right| \rightarrow 0 \text{ gdy } R \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Zatem

$$\int_{C_\xi} e^{-\zeta^2} d\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}.$$

Otrzymaliśmy wzór

$$F \left[e^{-a^2 x^2} \right] (\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a^2}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}}. \quad (4.8)$$

Zadanie. Policzyc

(a) $F \left[x e^{-a^2 x^2} \right];$

(b) $F \left[x^2 e^{-a^2 x^2} \right];$

(c) $F \left[x^n e^{-x^2} \right];$

Wsk.: $F[D^\alpha \varphi] (\xi) = (-i\xi)^\alpha F[\varphi] (\xi).$

4.2.3. Przekształcenie Fouriera dystrybucji temperowanych Jak zwykle, zaczynamy od dystrybucji regularnych. Jeżeli $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$, to

$$F[f](\xi) = \int f(x) e^{i(\xi, x)} dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, i$$

$$\left| F[f](\xi) \right| \leq \int |f(x)| dx < \infty,$$

więc $F[f](\xi)$ jako funkcja ograniczona określa dystrybucję regularną na $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ dla której zachodzą następujące równości:

$$(F[f], \varphi) = \int F[f](\xi) \varphi(\xi) d\xi = \int \left[\int f(x) e^{i(\xi, x)} dx \right] \varphi(\xi) d\xi =$$

$$= \int \left[\int \varphi(\xi) e^{i(\xi, x)} d\xi \right] f(x) dx = (f, F[\varphi]), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Równość tę przyjmujemy za definicję transformacji Fouriera dystrybucji temperowanej:

Definicja 4.2..2.

$$\forall f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \wedge \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad (F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]). \quad (4.9)$$

Zachodzi

Lemat 4.2..2. Transformacja Fouriera odwzorowuje przestrzeń $\mathcal{S}'(R^n)$ w siebie.

- (a) To, że $F[f]$ jest dobrze określony wynika z faktu, iż $(\varphi \in \mathcal{S}(R^n)) \Rightarrow (F[\varphi] \in \mathcal{S}(R^n))$.
- (b) Liniowość jest oczywista.
- (c) Ciągłość w metryce słabej wynika z tego, że F działa na \mathcal{S} w sposób ciągły: $(\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi) \Rightarrow (F[\varphi_k] \xrightarrow{\mathcal{S}} F[\varphi])$. Jest to prawie natychmiastową konsekwencją wzoru (4.6). Niech $\mathcal{S} \ni \varphi_k \rightarrow \varphi \in \mathcal{S}$. Wówczas

$$\begin{aligned} |\xi^\beta D^\alpha F[\varphi_k - \varphi](\xi)| &\leq \int |D^\beta [x^\alpha (\varphi_k - \varphi)(x)]| dx \leq \\ &\leq \sup_{x \in R^n} |D^\beta [x^\alpha (\varphi_k - \varphi)(x)]| (1 + |x|^{n+1}) \int \frac{dx}{1 + |x|^{n+1}} \rightarrow 0 \text{ gdy } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Zatem zachodzi oczywista konkluzja

$$\mathcal{S} \ni \varphi_k \rightarrow \varphi \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad ((F[f], \varphi_k - \varphi) = (f, F[\varphi_k] - F[\varphi]) \rightarrow 0 \text{ gdy } k \rightarrow \infty).$$

Odwrotna transformacja Fouriera w \mathcal{S}' wprowadza się zgodnie ze wzorem:

$$\forall \mathcal{S}' \ni f \quad F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f(-x)] \quad (4.10)$$

Lemat 4.2..3. $F^{-1} \circ F \Big|_{\mathcal{S}'} = F \circ F^{-1} \Big|_{\mathcal{S}'} = Id \Big|_{\mathcal{S}'}$.

Dowód.

$$\begin{aligned} (F^{-1}F[f], \varphi) &= \frac{1}{(2\pi)^n} (F[F[f](-\xi)], \varphi) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \left(F[f](-\xi), \int \varphi(x) e^{i(\xi, x)} dx \right) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \left(F[f](\eta), \int \varphi(x) e^{-i(\eta, x)} dx \right) = \\ &= (F[f], F^{-1}[\varphi]) = (f, F[F^{-1}[\varphi]]) = (f, \varphi). \end{aligned}$$

Własności transformacji Fouriera na zbiorze $\mathcal{S}'(R^n)$

Lemat 4.2..4. *Zachodzą następujące wzory:*

$$(a) \quad D^\alpha F[f](\xi) = F[(ix)^\alpha f(x)](\xi); \quad (4.11)$$

$$(b) \quad F[D^\alpha f(x)](\xi) = (-i\xi)^\alpha F[f](\xi) \quad (4.12)$$

$$(c) \quad F[f(x - x_0)](\xi) = e^{i(\xi, x_0)} F[f](\xi). \quad (4.13)$$

$$(d) \quad F[f](\xi + \xi_0) = F[e^{i(\xi_0, x)} f(x)](\xi). \quad (4.14)$$

Dowód przeprowadzamy, jak zwykle, działając odpowiednią dystrybucją na funkcję próbną.

Zadanie. Wykazać wzory:

$$(a) \quad F[f(x) \cdot g(y)](\xi, \eta) = F[f(x)](\xi) \cdot F[g(y)](\eta); \quad (4.15)$$

$$(b) \quad F[f * g](\xi) = F[f](\xi) \cdot F[g](\xi) \quad (4.16)$$

Przekształcenie Fouriera dystrybucji o zwartych nośnikach.

Twierdzenie 4.2..3. *Jeżeli f - dystrybucja o zwartym nośniku, to*

$$(a) \quad F[f] \in \Theta_M;$$

$$(b) \quad F[f](\xi) = (f(x), \eta(x) e^{i(\xi, x)}),$$

gdzie $\mathcal{D}(R^n) \ni \eta(x)$ - dowolna funkcja próbna, równa jedności w pewnym otoczeniu otwartym $\text{supp } f$.

Dowód. $\forall \varphi \in \mathcal{S}$ oraz $\forall \eta \in \mathcal{D}$, równej jedności na $\text{supp } f$.

$$\begin{aligned} (F[f](\xi), \varphi(\xi)) &\equiv (F[f \cdot \eta](\xi), \varphi(\xi)) = (\eta(x) \cdot f(x), F[\varphi](x)) = \\ &= \left(f(x), \int \eta(x) \varphi(\xi) e^{i(\xi, x)} d\xi \right) = (1(\xi) \cdot f(x), \eta(x) \varphi(\xi) e^{i(\xi, x)}) = \\ &= (1(\xi), (f(x), \eta(x) e^{i(\xi, x)}) \varphi(\xi)) = \int (f(x), \eta(x) e^{i(\xi, x)}) \varphi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

4.2.4. Przykłady Niżej podaje się przykłady zastosowań wzorów, przedstawionych w poprzednich punktach.

$$(a) \quad F[\delta(x - x_0)](\xi) = (\delta(x - x_0), \eta \cdot e^{i(\xi, x)}) = e^{i(\xi, x_0)}. \quad (4.17)$$

$$(b) \quad F[D^\alpha \delta](\xi) = (-i \xi)^\alpha F[\delta](\xi) = (-i \xi)^\alpha. \quad (4.18)$$

$$(c) \quad F[x^\alpha](\xi) = (-i)^{|\alpha|} (2\pi)^n D^\alpha \delta(\xi). \quad (4.19)$$

Dowód.

$$\begin{aligned} F[x^\alpha](\xi) &= F[x^\alpha \cdot 1(x)](\xi) = (-i)^{|\alpha|} F[(i x)^\alpha \cdot 1(x)](\xi) = \\ &= (-i)^{|\alpha|} D_\xi^\alpha F[1(x)](\xi) = (-i)^{|\alpha|} (2\pi)^n D_\xi^\alpha \frac{1}{(2\pi)^n} F[1(-x)](\xi) = \\ &= (-i)^{|\alpha|} (2\pi)^n D^\alpha \delta(\xi). \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$(d) \quad F[\theta(R - |x|)](\xi) = \int_{-R}^R e^{i\xi x} dx = 2 \frac{\sin \xi R}{\xi}. \quad (4.21)$$

Zadanie. Wykazać wzory:

$$(a) \quad F[\theta(x) e^{-ax}](\xi) = \frac{1}{a - i\xi}, \quad a > 0. \quad (4.22)$$

$$(b) \quad F[\theta(x)](\xi) = \pi \delta(\xi) + i \mathcal{P} \frac{1}{x}. \quad (4.23)$$

$$(c) \quad F[e^{-a|x|}](\xi) = \frac{2a}{a^2 + \xi^2}. \quad (4.24)$$

$$(d) \quad F\left[\frac{2a}{a^2 + x^2}\right] = 2\pi e^{-a|x|}. \quad (4.25)$$

Zadanie. Dla $x, \xi \in R^1$ obliczyć transformaty Fouriera

$$(a) \quad F[|x|^k](\xi);$$

$$(b) \quad F[x^k \delta^m(x)](\xi) \quad k \leq m;$$

$$(c) \quad F[x^k \theta(x)](\xi) \quad k = 1, 2, \dots$$

4.3. Zastosowanie transformacji Fouriera

4.3.1. Rozwiązania uogólnione równań liniowych cząstkowych Niech

$$\hat{L}(x, D)u = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha(x)D^\alpha u = f(x) \quad f \in \mathcal{D}' \quad (4.26)$$

jest równaniem liniowym cząstkowym o współczynnikach $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

Definicja 4.3..1. Rozwiązaniem uogólnionym równania (4.26) na obszarze G nazywamy dowolną dystrybucję $u \in \mathcal{D}'$ taką, że dla dowolnego $\varphi \in \mathcal{D}$: $\text{supp}\varphi \in G$

$$(L(x, D)u, \varphi) = (u, L^*\varphi) = (u, \sum (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha \varphi)) = (f, \varphi)$$

Wiemy już, że rozwiązanie takie można przedstawić w postaci splotu:

$$u = \mathcal{E} * f, \quad (4.27)$$

gdzie \mathcal{E} -rozwiązanie podstawowe operatora $L(x, D)$;

$$L(x, D)\mathcal{E} = \delta(x) \quad (4.28)$$

Zachodzi

Lemat 4.3..1. Na to by dystrybucja $\mathcal{E} \in \mathcal{S}'$ była rozwiązaniem podstawowym operatora

$$L(D) = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha D^\alpha, \quad a_\alpha = \text{const},$$

potrzeba i wystarczy by $F[\mathcal{E}] = \hat{\mathcal{E}}$ spełniała równanie:

$$L[-i\xi]\hat{\mathcal{E}} = 1,$$

gdzie $L[-i\xi] = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha (-i\xi)^\alpha$.

Dowód. Stosując transformację Fouriera do (4.26) otrzymujemy: $L[-i\xi]\mathcal{E} = 1$. Dowód w drugą stronę przeprowadza się analogicznie przy użyciu F^{-1} . Problemy przy tym powstają się wtedy, gdy istnieje zbiór punktów ξ_κ takich, że $F[-i\xi_\kappa]=0$, ponieważ to powoduje niejednoznaczność rozwiązań. Na przykład, równanie:

$$\xi \hat{\mathcal{E}} = 1$$

ma następujące rozwiązania:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{x + i0}; \quad \mathcal{E} = \frac{1}{x - i0}; \quad \mathcal{E} = \mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

Problem konstruowania \mathcal{E} w przypadku gdy zbiór $N_\phi = \{\xi_v : L[-i\xi_v] \neq \emptyset\}$ nie jest pusty staje się dość złożony, jednak daje się go, na ogół, rozwiązać w \mathcal{S}' drogą regularyzacji dystrybucji reprezentowanej przez funkcję

$$\hat{\mathcal{E}} = \frac{1}{L[-i\xi]}.$$

Wcześniej była mowa o tym, że przy pomocy rozwiązania podstawowego można rozwiązać problem niejednorodny $L(D)u = f$ w przypadku gdy spłot $\mathcal{E} * f$ istnieje. Dodać tutaj należy, iż technika ta służy również do rozwiązywania szerokiej klasy zagadnień początkowo-brzegowych [1].

W poprzednich rozdziałach przedstawiliśmy rozwiązania zagadnień początkowych dla niejednorodnego równania falowego oraz równania transportu w postaci spłotów odpowiednich dystrybucji. Stosując technikę transformacji Fouriera, skonstruujemy teraz rozwiązania podstawowe dla tych operatorów różniczkowych.

4.3.2. Rozwiązania podstawowe dla operatora falowego oraz operatora transportu. Rozpatrzmy rozwiązanie podstawowe dla operatora transportu:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \kappa \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \right] \mathcal{E}(t, x) = \delta(t, x), \quad (t, x) \in R^{n+1}. \quad (4.29)$$

Stosując transformację Fouriera względem zmiennych przestrzennych, otrzymamy równanie różniczkowe

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathcal{E}}(t, \xi) + \kappa |\xi|^2 \hat{\mathcal{E}}(t, \xi) = 1(\xi) \cdot \delta(t), \quad (4.30)$$

w którym zmienna ξ_k odgrywają rolę parametrów. Rozwiązanie równania analogicznego do (4.30) było wyprowadzane już wcześniej. Ma ono następującą postać (p. zadanie z rozdziału 2.4.7.)

$$\hat{\mathcal{E}}(t, \xi) = \theta(t) e^{-\kappa |\xi|^2 t}. \quad (4.31)$$

Stosując transformację odwrotną, otrzymamy taki wynik:

$$\mathcal{E}(t, x) = \frac{\theta(t)}{(2\sqrt{\kappa \pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4\kappa t}}. \quad (4.32)$$

Analogicznie, stosując transformację Fouriera względem zmiennych przestrzennych do równania

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \right] \mathcal{E}(t, x) = \delta(t, x), \quad (t, x) \in R^{n+1}. \quad (4.33)$$

otrzymamy:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{\mathcal{E}}(t, \xi) + a^2 |\xi|^2 \hat{\mathcal{E}}(t, \xi) = 1(\xi) \cdot \delta(t), \quad (4.34)$$

którego rozwiązaniem jest funkcja (p. rozdział 2.4.7.)

$$\hat{\mathcal{E}}(t, \xi) = \theta(t) \frac{\sin a |\xi| t}{a |\xi|}. \quad (4.35)$$

W zależności od ilości zmiennych przestrzennych transformacja odwrotna daje następujące wyniki [1]:

$$\mathcal{E}_1(t, \xi) = \frac{1}{2a} \theta(at - |x|) \quad \text{gdy} \quad n = 1, \quad (4.36)$$

$$\mathcal{E}_2(t, \xi) = \frac{\theta(at - |x|)}{2a\pi\sqrt{a^2t^2 - |x|^2}} \quad \text{gdy} \quad n = 2, \quad (4.37)$$

$$\mathcal{E}_3(t, \xi) = \frac{\theta(t)}{2\pi a} \delta(a^2t^2 - |x|^2) \quad \text{gdy} \quad n = 3. \quad (4.38)$$

Posługując się wzorami (4.32) oraz (4.36), możemy sformułować następujące twierdzenie w przypadku $n = 1$:

Niech \mathcal{M} jest rodziną funkcji określonych na R^2 , zerujących się przy $t < 0$ i ograniczonych na każdym zbiorze $G_T = \{(t, x); \quad 0 < t < T\}$.

Twierdzenie 4.3..1. *Jeżeli*

(a) $f(t, x) \in \mathcal{M}$;

(b) $u_0(x)$ jest funkcją ograniczoną w R^1 .

Wówczas jedyne wśród funkcji z \mathcal{M} rozwiązanie zagadnienia początkowego (3.39) dane jest wzorem

$$u(t, x) = \int_0^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau, \xi)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi + \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi. \quad (4.39)$$

Rozwiązanie to w sposób ciągły zależy od f oraz u_0 .

Twierdzenie 4.3..2. *Niech*

(a) $f(t, x) \in \mathcal{D}'(R^2)$;

(b) $f(t, x) = 0$ *gdym* $t < 0$;

(c) $u_0, u_1 \in \mathcal{D}'(R^1)$.

Wówczas rozwiązanie zagadnienia początkowego (3.34) dane jest wzorem

$$u = \mathcal{E}_1 * (f + u_0(x) \delta'(t) + u_1(x) \delta(t)).$$

Jeżeli $f \in C^2(t \geq 0)$, $u_0 \in C^2(R^1)$, $u_1 \in C^1(R^1)$, wówczas powyższy wzór daje jedyne rozwiązanie klasyczne zagadnienia początkowego:

$$\begin{aligned} u(t, x) = & + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau, \xi) d\xi + \\ & + \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} u_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2} [u_0(x+at) + u_0(x-at)]. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Rozwiązanie to w sposób ciągły zależy od f , u_0 oraz u_1 .

Przedstawione wyżej wyniki uogólniają się na przypadki wielowymiarowe [1].

LITERATURA

- [1] Vladimirov V.S., *Uravnjenja Matematičeskoj Fiziki*. – Nauka, Moskwa. – 1970.
- [2] Gelfand I.M., *Obobščennyje Funkciji, T. I*. – Fizmatlit, Moskwa. – 1962.
- [3] Maurin K, *Analiza. T. I*. – PWN, Warszawa. – 1970.
- [4] Maurin K, *Analiza. T. 2*. – PWN, Warszawa. – 1971.
- [5] Richtmayer, Morton *Methods of Contemporary Mathematical Physics*.–Springer, New York, 1985.