Akademia Górniczo-Hutnicza imienia S. Staszica
Wydział Matematyki Stosowanej

Vsevolod Vladimirov

WYBRANE ZAGADNIENIA TEORII RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYYH

Kraków–2010

Rozdział 1

Równania różniczkowe zwyczajne

1.1 Pojęcia wstępne

Jak wiadomo, współtwórcą rachunku różniczkowego i całkowego był genialny fizyk (i pierwszy w dziejach tej nauki teoretyk) Isaac Newton. W zbiorze Jego prac zwraca na siebie uwagę zdanie brzmiące następująco: *"Opłaca się rozwiązywać równania różniczkowe"*. I tyle. W zdaniu zawiera się przekonanie Autora o tym, że o fizyce należy mówić w języku równań różniczkowych. 300 lat temu zdanie to nie było takie oczywiste, gdyż rachunek różniczkowy dopiero się wykiełkował. Z biegiem czasu coraz więcej naukowców (w tym, oczywiście nie tylko fizyków) zaczeli podzielać to zdanie, które w obecnych czasach brzmi raczej jak aksjomat.

Czym więc są równania różniczkowe i do czego tak naprawdę służa? Zacznijmy od pewnych analogii. W kursie matematyki szkolenej miało się do czynienia z rozwiązywaniem równań algebraicznych. Przykładem może służyć układ równań liniowych

$$\begin{aligned} 2\,x + y &= 1, \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

lub równanie

$$x^2 - \; x - 6 = 0,$$

zwane równaniem kwadratowym. Rozwiązywanie obu równań polega na znalezieniu liczb, które po podstawieniu do równaniań czyniły by z nich tożsamość. W przypadku układu równań są to liczby $x = y = 1/2$, które są określone jednoznacznie. Równanie kwadratowe spełniają dwie liczby: $x = 3$ oraz $x = -2$. Wiemy oczywiście, że na ogół rozwiązanie równania kwadratowego nie jest określone jednoznacznie. W przypadku równań różniczkowych niejednoznaczność rozwiązania jest raczej reguła, niż wyjątkiem. Przejdźmy zatem do definicji.

Równaniem różniczkowym zwyczajnym (RRZ) rzędu n nazywamy relację

$$F\left(t,\ x(t),\ x'(t),\ ...,x^{(n)}(t)\right) = 0, \tag{1.1}$$

gdzie F- funkcja gładka (tzn. ciągła oraz różniczkowalna) w każdym ze swoich argumentów.

Rozwiązać równanie (1.1) oznacza znaleźć n razy różniczkowalną funkcję $x = \varphi(t)$, która, będąc podstawioną do równania (1.1), uczyni z niego tożsamość.

Przykładem RRZ może służyć równanie logistyczne

$$\frac{d\,P[t]}{d\,t} - r\,P[t]\left(1 - \frac{P[t]}{C}\right) = 0, \tag{1.2}$$

służące do opisu dynamiki populacji (P - liczebność, na przykład, bakteri), przy uwzględnieniu skończoności zasobów pokarmowych (drugie wyrażenie w nawiasach).

Innym przykładem jest równanie

$$\frac{d^2x(t)}{d\,t^2} + k\,x\,(t) = 0, \tag{1.3}$$

opisujące małe drgania wahadła matematycznego (x- miara odcylenia od położenia równowagi, na przykład kąt odcyelenia od pionu). Zauważmy że formalne identyczne równanie opisuje drgania w obwodzie elektrycznym składającym się z cewki oraz kondensatora. W tym drugim przypadku funkcja $x(t)$ opisuje zależność prądu od czasu.

Najprostsze równanie różniczkowe ma postać

$$x'(t) = \frac{d\,x}{d\,t} = f(t), \tag{1.4}$$

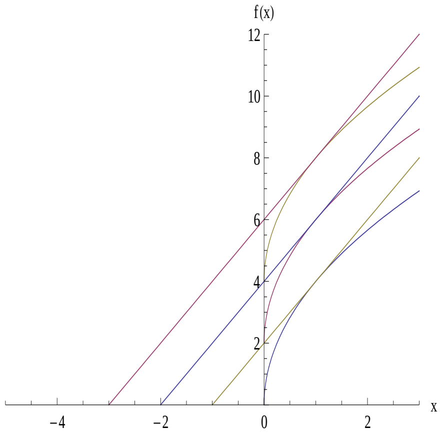
gdzie $f(t)$ - funkcja ciągła. Z rachunku całkowego wiemy że rozwiązanie tego równania dane jest wzorem

$$x(t) = \int f(t)\,d\,t.$$

Funkcja $x(t)$ nazywa się funkcją pierwotną do $f(t)$.

Przykład

$$\frac{d\,x}{d\,t} = \cos t \tag{1.5}$$



Rys. 1.1:

. Równanie to jest równoważne równości różniczek

$$dx = \cos t\, d\, t \equiv\ d\ \sin t.$$

Jak wiadomo, równość róożniczek implikuje równość odpowiednich całek, w danym przypadku równość ta będzie miała postać

$$\int d\, x = \int \cos t\, d\, t.$$

Licząc odpowiednie całki otrzymamy

$$x = \sin t + C.$$

Zatem funkcja $x(t)$, spełniająca RR (1.5) nie jest zadana jednoznacznie, lecz z dokładnością do dowolnej stałej (stałej całkowania). Sens geometryczny stałej występujący w powyższym wzorze jest bardzo przejrzysty: funkcją pierwotną do danej funkcji $f(t)$ nazywa się dowolna funkcja $x(t)$ taka, że $x'(t) = f(t)$. Wiemy, jednak, że procedura obliczenia pochodnej jest niejednoznaczna. Pochodną funkcji można interpretować jako tangens stycznej do wykresu tej funkcji w odpowiednim punkcie. Przesunięcie równoległe wykresu funkcji w kierunku pionowym, jak wiadomo, nie powoduje zmianu to kątu który tworzy styczną z osią poziomą (p. rys.1.1).

Uwaga. Przez analogię procedura znajdowania rozwiązania RR nazywa się *całkowaniem*. Po jednym całkowaniu pojawia się jedna stała całkowania. Jeżeli rząd RR jest większy od jedynki, to rozwiązanie uzyskuje się drogą wielokrotnego cąłkowania (które na praktyce bardzo często jest zastępowane równoważnymi działaniami algorytmicznymi). Stąd wynika ogólna reguła:

Rozwiązanie ogólne RR rzędu n mieści dokładnie n dowolnych stałych.

Przykład. Równanie Newtona dla cząstki o masie m w próżni ma postać

$$m\,\frac{d^2x}{d\,t^2}=0.$$

Za pomocą zamiany zmiennej $\frac{dx}{dt}=y(x)$, równanie to sprowadza się do postaci

$$m\,\frac{d\,y}{d\,t}=0.$$

Całkując otrzymujemy: $y(x)=\frac{dx}{dt}=C_1$. Całkując to równanie jeszcze raz, otrzymujemy rozwiązanie ogólne, zależne od dwóch stałych całkowania:

$$x(t)=C_2+C_1\,t.$$

Powstaje pytanie: co należe zrobić, by rozwiązanie RR nie mieściło dowolnych stałych. W innym sformułowaniu pytanie to brzmi następująco. Przy jakich warunkach rozwiązane RR będzie cechować się jednoznacznością?

Na przykładzie rozwiązania równania Newtona dla cząstki w próżni widzimy, iż rozwiązanie ogólne opisuje ruch jednostajny i prostoliniowy. Żeby jednak móc skorzystać w praktyce z wiedzy zawartej w wycałkowanym wzorze, czyli móc przewidziec położenie cząstki w dowolnej chwili czasu, trzeba mieć więcej informacji, krótko mówiąc, znać "prehistorię ruchu", mianowicie, wiedzieć, w jakim punkcie przestrzeni znajdowała się cząstka i w jakim kierunku ona się poruszała w początkowej chwili czasu. Matematycznie formułuje się to następująco:

$$x(t_0)=x_0,\qquad x'(t_0)=x_1.$$

Mając te dwa dodatkowe warunki, możemy łatwo wyeliminować dowolne stałe, przypisując im absolutnie konkretne wartości

$$C_1=x_1,\quad C_2=x_0-x_1\,t_0,$$

wynikające z dodatkowych *warunków algebraicznych*, nazywanych często danymi początkowymi, lub *danymi Cauchy'ego*. Przez analogię dochodzimy do takiego wniosku.

Rozwiązanie równania rzędu n **prawie zawsze** *staje się jednoznaczne po dołączeniu n warunków algebraicznych (n danych początkowych)*

Użyte sformułowanie "prawie zawsze " nie jest oczywiście ścisłe. Wymaga ono pewnych komentarzy. Okazuje się że w pewnych wyjątkowych sytuacjach, kiedy dane początkowe są zadane niepoprawnie, rozwiązanie wciąż pozostaje niejednoznaczne. Natomiast w innych analogicznych sytuacjach przy źle postawionych danych początkowych rozwiązanie może nie istnieć w ogóle.

Rozpatrzmy następujący przykąd:

$$\frac{d\,x}{d\,t} = \frac{x}{t}. \tag{1.6}$$

Równanie to można przepisać w postaci równości

$$\frac{d\,x}{x} = \frac{d\,t}{t}$$

lub

$$d \log x = d \log t.$$

Z rachunku całkowego jednak wiemy, że równość dóżniczek implikuje równosc odpowiednich całek, **pod warunkiem, że po lewej i po prawej stronie od znaku równości znajdują sie wyrażenia zależne tylko od jednej zmiennej!** W takiej sytuacji mówimy że badane równanie dopuszcza rozdzielenie zmiennych. Ponieważ w tym przykładzie udało nam się uzyskać rozdzielenie zmiennych, więc ostatnie równość implikuje następujący ciąg relacji:

$$\int d \log x = \int d \log t \quad \Leftrightarrow \quad \log x = \log t + \log C \quad \Leftrightarrow \quad x = C\,t.$$

Podstawiając funkcję $x = C\,t$ do równania wyjściowego, możemy przekonać się w tym, że czyni ona z niego tożsamość:

$$\frac{d\,[C\,t]}{d\,t} = C = \frac{C\,t}{t}.$$

I teraz,

- zadając warunke początkowy w postaci

  $$x(t_0) = a, \quad \text{gdzie} \quad t \neq 0,$$

  otrzymamy, rozwiązując równanie algebraiczne

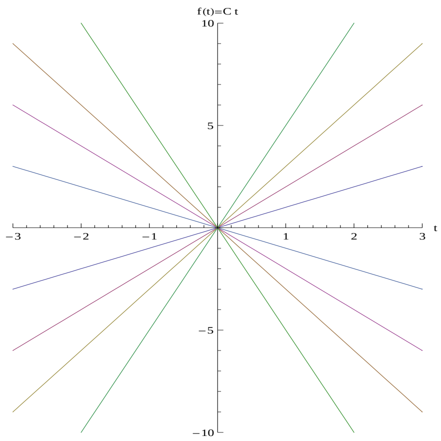
  $$x(t_0) = a = C\,t_0$$

  względem C, jedyne rozwiązanie $x(t) = a\,\frac{t}{t_0}$.

- Zadając warunek początkowy

  $$x(0) = b \neq 0,$$

  otrzymamy niedorzeczność: $b = C \cdot 0$. Przyczyna: przy $t = 0$ prawa strona równania (1.6) jest nieokreślona.



Rys. 1.2:

- Warunek początkowy

  $$x(0) = 0,$$

  jest spełniony przy dowolnej wartości stałej C.

Przyczynę tego można sobie uzmysłowić, rozpatrując zbiór możliwych rozwiązań równania (1.6). Obrazuje go na płaszczyźnie fazowej $(t,\, x)$ pęk linii prostych przechodzących przez początek współrzędnych, rys.1.2. Widzimy że początek współrzędnych jest jedynym punktem na płaszczyźnie, przez który przechodzą wszystkie rozwiązania równania. Dlatego właśnie zadanie warunków początkowych w tym punkcie prowadzi do neijednoznaczności.

Podsumowując to co powiedzieliśmy, wprowadźmy oznaczenie:

Punkt $(t_0,\, x_0)$ *płaszczyzny fazowej nazywa się punktem osobliwym, jeżeli w tym punkcie prawa strona RRZ*

$$\frac{d\,x}{d\,t} = f(t,\, x)$$

przybiera wartość zerową, lub jest nieoznaczona.

Wystawienie warunków początkowych w punkcie osobliwym prowadzi do niejednoznaczności rozwiązania zagadnienia początkowego, lub do niedorzeczności.

1.2 Równania rzędu pierwszego o zmiennych rozdzielających się

Równanie rzędu pierwszego $F(t,\, x(t),\, x'(t)) = 0$ na ogół można rozwiązać względem zmiennej $x'(t)$, przedstawiając go w postaci równoważnej

$$\frac{d\,x}{d\,t} = \varphi(t, x). \tag{1.7}$$

(1.7) nazywamy postacią kanoniczną RRZ rzędu 1. Równanie takie nie umiemy scałkować przy dowolnej prawej stronie. Niżej będą przedstawione podstawowe typy funkcji, dla których potrafimy podać rozwiązanie.

1. Prawa strona nie zależy od zmiennej t:

   $$\frac{d\,x}{d\,t} = \varphi(x).$$

   Przepisując równanie w postaci $\frac{d\,x}{\varphi(x)} = d\,t$, a następnie całkując, otrzymujemy rozwiązanie w postaci uwikłanej:

   $$\int \frac{d\,x}{\varphi(x)} = t + C.$$

2. Prawa strona nie zależy od zmiennej x:

   $$\frac{d\,x}{d\,t} = \psi(t).$$

   Przepisując równanie w postaci $d\,x = \psi(t)\,d\,t$, a następnie całkując, otrzymujemy rozwiązanie w postaci:

   $$x = \int \psi(t) d\,t + C.$$

3. Równanie typu

   $$\frac{d\,x}{d\,t} = \frac{P(t)}{Q(x)}.$$

   Równanie to sprowadza się do kwadratury

   $$\int P(t)\,d\,t = \int Q(x)\,d\,x + C.$$

Oznaczenie. *Wszystkie równania rozpatrzone w tym punkcie nazywamy RR rzędu 1 o zmiennych rozdzielających się.*

Całkowanie innych RR rzędu pierwszego, na ogół, wiąże się z przedstawieniem ich w postaci równań o zmiennyc rozdzielających się.

1.3 Równania, rzędu pierwszego, które się sprowadzają się do równań o zmiennyc rozdzielających się

Typ pierwszy:

$$\frac{d\,x}{d\,t} = f(a\,t + b\,x). \tag{1.8}$$

Stosujemy zamianę zmiennych $z = a\,t + b\,x$. Różniczkując tę równość po t, otrzymamy:

$$\frac{d\,z}{d\,t} = a + b\,f(z),$$

lub

$$\frac{d\,z}{a + b\,f(z)} = d\,t.$$

Całkując powyższe wyrażenie, otrzymamy kwadraturę

$$\int \frac{d\,z}{a + b\,f(z)} = t + C.$$

Przykład:

$$\frac{d\,x}{d\,t} = 2\,t + x.$$

W tym przypadku $z = 2\,t + x$,, zaś $f(z) = z$. Podstawiając to do powyższego równania, otrzymujemy kwadraturę:

$$\int \frac{d\,z}{2 + z} = \ln \frac{2 + z}{C} = t.$$

Stąd otrzymujemy rozwiązanie

$$x = C\,e^t - 2\,(t + x).$$

Typ drugi:

$$\frac{d\,x}{d\,t} = f\left(\frac{x}{t}\right).$$

Stosujemy zamianę zmiennych $z = \frac{x}{t}$. Różniczkując tę równość po zmiennej t otrzymamy:

$$\frac{d\,z}{d\,t} = \frac{t\,x' - x}{t^2} = \frac{f(z) - z}{t}.$$

Jest to równanie o zmiennych rozdzielających się, którego rozwiązanie dane jest wzorem

$$\frac{t}{C} = \exp\left[\int \frac{d\,z}{f(z) - z}\right].$$

Przykład:

$$\frac{d\,x}{d\,t} = \frac{x}{t}\left(1 + \frac{x}{t}\right)$$

Zgodnie z powyższym wzorem $f(z) = z(z+1)$, więc mamy do policzenia całkę

$$\int \frac{d\,z}{f(z) - z} = \int \frac{d\,z}{z + z^2 - z} = -\frac{1}{z}.$$

Ostatecznie, wprowadzając dogodną stałą zgodnie ze wzorem $\tilde{C} = \log C$, otrzymujemy rozwiązanie

$$x = \frac{t}{\tilde{C} - \log t}.$$

1.4 Liniowe równanie różniczkowe rzędu pierwszego.

Liniowym niejednorodnym równaniem różniczkowym rzędu pierwszego nazywamy równanie postaci

$$\frac{d\,x(t)}{d\,t} + p(t)\,x(t) = q(t),$$

gdzie $p(t),\ q(t)$ - wiadome funkcje, przy czym zakładamy że $q(t)$ nie równa się tożsamosciowo zeru.

Stowarzyszonym równaniem jednorodnym nazywamy równanie postaci

$$\frac{d\,\mathring{\mathrm{x}}}{d\,t} + p(t)\,\mathring{\mathrm{x}}(t) = 0.$$

Po przemnożeniu tego równania przez $\frac{dt}{\mathring{x}}$ otrzymujemy równanie o zmiennych rozdzielających się:

$$\frac{d\,\mathring{x}}{\mathring{x}} = -p(t)\,d\,t.$$

Stąd, po stałkowaniu otrzymjemy

$$\mathring{x} = C\,e^{-F(t)}, \quad \text{gdzie} \quad F(t) = \int p(t)\,d\,t.$$

Rozwiązanie problemu niejednorodnego uzyskujemy **metodą uzmienniania stałej**. Polega ona na zamianie stałej C w powyższeym wzorze przez pewną nieznaną funkcję $C(t)$. Zatem szukamy rozwiązanie w postaći $x(t) = C(t)\,e^{-F(t)}$. Po podstawieniu do równania wyjściowego i elementarnych przekształceniach, otrzymamy:

$$\dot{C}(t) = q(t)\,e^{F(t)}.$$

Zatem $C(t) = C_0 + \int q(t)\,e^{F(t)}\,d\,t$. Stąd już lekko można odczytać postać rozwiązania ogólnego problemu niejednorodnego:

$$x(t) = e^{-F(t)}\left(C_0 + \int q(t)\,e^{F(t)}\,d\,t\right).$$

Prrzykład.

$$\frac{d\,y}{d\,x} + y(x) = x$$

Tutaj rolę zmiennej zależnej i niezależnej pełnią, odpowiednio, $y(x)$ oraz x. Z postaci równania odczytujemy że $p(x) = 1$, natomiast $q(x) = x$. Do policzenia mamy całkę

$$F(x) = \int p(x)\,d\,x \equiv \int dx = x.$$

oraz całkę

$$\int e^{F(x)}\,q(x)\,d\,x = \int e^x\,x\,d\,x = e^x\,(x-1).$$

Odpowiedz: Rozwiązanie ogólne ma postać $y(x) = e^{-x}(C_0 + e^x(x-1))$.

1.4.1 Zadania domowe.

Rozwiązać równania:

1.

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{y}{x\ln x}.$$

2.

$$\frac{d\,y}{d\,x} = y\,\sin x.$$

3.

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{y^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4.

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{y}{x}.$$

5.

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{y}{x} + \mathrm{tg}\frac{y}{x}.$$

6.

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{x+y}{x-y}.$$

7.

$$\frac{d\,y}{d\,x} = x + y + \frac{1}{x+y}.$$

8.

$$\frac{d\,y}{d\,x} - \frac{y}{x} = x^2.$$

9.

$$\frac{d\,y}{d\,x} - y\,\mathrm{ctg} x = 2\,x\,\sin x.$$

10.

$$x\,\frac{d\,y}{d\,x} = y + \sqrt{x^2+y^2}.$$

11.

$$\frac{d\,x}{d\,t} = x + \sin t.$$

1.5 Równanie zwyczajne rzędu drugiego

Postać ogólna:

$$F\,(x,\,y,\,y'\,y'') = 0. \tag{1.9}$$

Postać kanoniczna:

$$y'' = \varphi\,(x,\,y,\,y')\,. \tag{1.10}$$

Zagadnienie początkowe:

$$y'' = \varphi\,(x,\,y,\,y')\,, \qquad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1. \tag{1.11}$$

Typy równań, dopuszczających obniżenie rzędu.

Typ 1.

$$y'' = f(x). \tag{1.12}$$

Do obniżenia rzędu stosujemy podstawienie

$$y' = p(x), \qquad y'' = p'(x).$$

Po podstawieniu do (1.12) otrzymamy

$$\frac{d\,p}{d\,x} = f(x).$$

Zatem

$$p(x) = y'(x) = \int f(x)\,d\,x + C_1. \tag{1.13}$$

Całkując (1.13) jeszcze raz otrzymamy:

$$y = C_1 x + \int F(x)\,d\,x + C_2, \qquad \text{gdzie} \quad F(x) = \int f(x)\,d\,x. \tag{1.14}$$

Przykład 1.

$$y'' = e^{-x}.$$

$$\begin{aligned} \frac{d\,p}{d\,x} &= e^{-x}; \\ p(x) = y'(x) &= C_1 - e^{-x}; \\ y &= C_2 + C_1 x + e^{-x}. \end{aligned}$$

Przykład 2. Rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$y'' = x^2, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

$$\begin{aligned} p = y' &= \frac{x^3}{3} + C_1; \\ y(x) &= C_2 + C_1 x + \frac{x^4}{12}; \\ y(0) &= C_2 = 1; \\ y'(0) &= C + 1 = 0; \end{aligned}$$

$$y(x) = 1 + \frac{x^4}{12}.$$

Typ 2.

$$y'' = f(y).$$

Stosujemy podstawienie $y'(x) = p\,[y(x)]$, traktujemy p jako zóżoną funkcję. Różniczkując $p\,[y(x)]$ (traktowaną jako funkcję złożoną) po zmiennej x otrzymamy:

$$\frac{d\,p\,[y(x)]}{d\,x} = p'(y)\,\frac{d\,y}{d\,x} \equiv p'(y)\cdot p(y).$$

Po podstawieniu otrzymamy równanie rzędu pierwszego o zmiennych rozdzielających się":

$$p\frac{d\,p}{d\,y} = f(y); \qquad p\,d\,p = f(y)\,d\,y;$$

$$\frac{p^2}{2} = G(y) + C_1, \qquad \text{gdzie} \quad G(y) = \int f(y)\,d\,y, \quad \text{lub}$$

$$p = \frac{d\,y}{d\,x} = \pm\left[2\,G(y) + C_1\right]^{1/2}.$$

Całkując po raz drugi otrzymujemy rozwiązania w postaci uwikłanej:

$$\int \frac{d\,y}{\left[2\,G(y) + C_1\right]^{1/2}} = C_2 \pm x.$$

Przykład.

$$y'' = \frac{3}{2}\,y^2 \quad \text{lub} \quad p\,\frac{d\,p}{d\,y} = \frac{3}{2}\,y^2 \quad \text{lub} \quad .$$

$$\frac{p^2}{2} = \frac{y^3}{2} + \frac{C_1}{2} \quad \text{stad} \quad p = \frac{d\,y}{d\,x} = \pm(C_1 + y^3)^{1/2}.$$

Rozwiązanie w postaci uwikłanej dane jest wzorem:

$$\int \frac{d\,y}{\sqrt{C_1 + y^3}} = C_2 \pm x.$$

Jak to można sprawdzić:

$$\frac{d}{d\,x}\left[\frac{d\,y}{d\,x}\right] = \frac{d}{d\,x}\left(C_1 + y^3\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(C_1 + y^3\right)^{-1/2} 3\,y^2\,\frac{d\,y}{d\,x} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(C_1 + y^3\right)^{-1/2} 3\,y^2\,\left(C_1 + y^3\right)^{1/2} = \frac{3\,y^2}{2}.$$

Typ 3.

$$y'' = f(y').$$

Podstawienie

$$y' = p(x), \qquad y'' = p'(x)$$

pozwala obniżyć rząd równania:

$$\frac{d\,p}{d\,x} = f(p) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d\,p}{f(p)} = x + C_1.$$

Dalsze postępowanie zależy od funkcji $f(p)$.

Przykład.

$$y'' = \frac{1}{\cos y'}.$$

Mamy zatem, dokonując podstawienia $y' = p(x), \qquad y'' = p'(x)$:

$$\cos p\,d\,p = d\,x \quad \Rightarrow \quad p = \frac{d\,y}{d\,x} = \arcsin(x + C_1) \Rightarrow y + C_2 = \int \arcsin(x + C_1)\,d\,x.$$

Ostatnią całkę można obliczyć stosując metodę całkowania przez części, a następnie dokonując zamiany zmiennej **(zadanie domowe!)**

Typ 4.

W równaniu

$$y'' = f(y,\, y')$$

możliwe jest obniżenie rzędu. Do tego celu wykorzystuje się podstawienie

$$y' = p\,[y(x)]\,, \qquad y'' = p\,p'(y).$$

W wyniku otrzymujemy równanie

$$p\,\frac{d\,p}{d\,y} = f[y,p].$$

Przykład.

$$y'' = \frac{y'^2}{y}$$

Za pomocą podstawienia $y' = p\,[y(x)]\,, \quad y'' = p\;p'(y)$ równanie to udaje się rozwiązać do końca:

$$p\frac{d\,p}{d\,y} = \frac{p^2}{y} \Rightarrow \frac{d\,p}{p} = \frac{d\,y}{y} \Rightarrow p = \frac{d\,y}{d\,x} = C_1\,y \Rightarrow y = C_2\,e^{C_1\,x}.$$

Typ 5.

W równaniu

$$y'' = f(x,\, y')$$

możliwe jest obniżenie rzędu. Do tego celu wykorzystuje się podstawienie

$$y' = p(x), \qquad y'' = p'(x).$$

W wyniku otrzymujemy równanie

$$\frac{d\,p}{d\,x} = f[x,p].$$

Przykład.

$$y'' = \frac{y'}{x}$$

Za pomocą podstawienia $y' = p(x), \quad y'' = p'(x)$ równanie to udaje się rozwiązać do końca:

$$\frac{d\,p}{d\,x} = \frac{p}{x} \Rightarrow \frac{d\,p}{p} = \frac{d\,x}{x} \Rightarrow p = \frac{d\,y}{d\,x} = C_1\,x \Rightarrow \;y = C_2 + C_1\,\frac{x^2}{2}.$$

1.5.1 Zadania domowe

1. $y'' = x\, e^x$.
2. $y'' = -\sin\, x, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$
3. $2\, y\, y'' = (y')^2 + y^2$.
4. $y\, y'' = (y')^3$.
5. $y\, y'' = 1$.
6. $y'' = (y')^2$.
7. $x\, y'' = 2\, x - y'$.

1.6 Równania liniowe rzędu drugiego o stałych współczynnikach

Postać ogolna równania niejednorodnego:

$$\frac{d^2\, x}{d\, t^2} + b\, \frac{d\, x}{d\, t} + c\, x(t) = F(t). \tag{1.15}$$

Stowarzyszony problem jednorodny:

$$\frac{d^2\, y}{d\, t^2} + b\, \frac{d\, y}{d\, t} + c\, y(t) = 0. \tag{1.16}$$

1.6.1 Rozwiązanie problemu jednorodnego.

Rozpoczynamy od problemu jednorodnego. Zanim zabierzemy się do poszukiwania rozwiązań, wykażemy

Lemat 1. Jeżeli funkcje $y_1(t)$ oraz $y_2(t)$ - są rozwiązaniami równania (1.16), to funkcja $z(t) = c_1\, y_1(t) + c_2\, y_2(t)$ jest również rozwiązaniem tego równania.

Dowód. Podstawiając funkcję $z(t)$ do równania jednorodnego i korzystając z liniowości operacj różniczkowania:

$$\frac{d\ (c_1\, y_1(t) + c_2\, y_2(t))}{d\, t} = c_1\, \frac{d\, y_1(t)}{d\, t} + c_2\, \frac{d\, y_2(t)}{d\, t},$$
$$\frac{d^2\ (c_1\, y_1(t) + c_2\, y_2(t))}{d\, t^2} = c_1\, \frac{d^2\, y_1(t)}{d\, t^2} + c_2\, \frac{d^2\, y_2(t)}{d\, t^2}$$

otrzymamy:

$$\frac{d^2 z}{d t^2} + b \frac{d z}{d t} + c\, z(t) = \frac{d^2 (c_1\, y_1(t) + c_2\, y_2(t))}{d t^2}$$
$$+ b \frac{d (c_1\, y_1(t) + c_2\, y_2(t))}{d t} + c\, (c_1\, y_1(t) + c_2\, y_2(t)) =$$
$$= c_1 \left(\frac{d^2 y_1}{d t^2} + b \frac{d y_1}{d t} + c\, y_1(t) \right) + c_2 \left(\frac{d^2 y_2}{d t^2} + b \frac{d y_2}{d t} + c\, y_2(t) \right) = 0,$$

c. b. d. o.

Rozwiązanie problemu jednorodnego poszukujemy w postaci $y(t) = e^{\lambda t}$. Podstawiając do równania (1.16), otrzymujemy

$$e^{\lambda t} \left(\lambda^2 + b\, \lambda + c \right) = 0.$$

Ponieważ funkcja $e^{\lambda t}$ nie jest równa zeru dla żadnego t, więc bez utraty ogólnośći możemy podzielić lewą i prawą strone powyższego równania przez tą funkcję. W wyniku otrzymujemy równanie algebraiczne

$$\lambda^2 + b\, \lambda + c = 0.$$

Jak wiadomo, pierwiastki tegó równania dane są wzorem:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\, c}}{2}.$$

Istnieją tutaj trzy możliwości.

1. $b^2 - 4\, c > 0$, czyli $\lambda_{1,2} \in R$ i $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Wówczas mamy dwa rozwiązania: $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ i $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$. Z lematu 1 wynika, że dla dowolnych stałych $c_1,\ c_2$ funkcja

$$y(t) = c_1\, e^{\lambda_1 t} + c_2\, e^{\lambda_2 t} \tag{1.17}$$

   jest rozwiązaniem problemu jednorodnego. Ponieważ równanie (1.23) jest równaniem rzędu drugiego, rozwiązanie (1.17), zależne od dwóch dowolnych stałych, jest rozwiązaniem ogólnym.

2. $b^2 - 4\, c = 0$, czyli $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \frac{-b}{2}$.

   Zatem powyższa metoda daje tylko jedno rozwiąznie równania (1.16), mianowicie

$$y(t) = c\, e^{-b/2\, t}. \tag{1.18}$$

   Brakujące rozwiązanie niezależne znajdziemy, stosując znaną już nam metodę uzmienniania stałej. W myśl tej metody będziemy poszukiwać rozwiązanie w postaci

$$y(t) = A(t)\, e^{-b/2\, t}.$$

Podstawiając ten ansatz do równania (1.16) otrzymamy:

$$
\begin{aligned}
&0 = \left\{\ddot{A} - b\dot{A} + c\,(b/2)^2\right\} e^{-b/2\,t} + b\,\left\{\dot{A} - (b/2)\,A\right\} + c\,A\,e^{-b/2\,t} = \\
&\left\{\ddot{A} - b\dot{A} + c\,(b/2)^2 + b\,\left[\dot{A} - (b/2)\,A\right] + (b^2/4)\,A\right\} e^{-b/2\,t} = \\
&\left\{\ddot{A} - b\dot{A} + A\,(b/2)^2\right\} e^{-b/2\,t} + b\,\left\{\dot{A} - (b/2)\,A\right\} e^{-b/2\,t} + (b^2/4)\,A\,e^{-b/2\,t} = \\
&= \left\{\ddot{A}\right\} e^{-b/2\,t}.
\end{aligned}
$$

Stąd

$$A = c_1 + c_2\,t.$$

Ogólne rozwiązanie dane więc jest następującym wzorem:

$$y(t) = [c_1 + c_2\,t]\;e^{-b/2\,t}. \tag{1.19}$$

3. $b^2 - 4\,c < 0$. W tym przypadku równanie charakterystyczne ma parę pierwiastków zespolonych

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \alpha + i\,\beta, \qquad \alpha = -b/2, \qquad \beta = \frac{\sqrt{|b^2 - 4\,c|}}{2}. \tag{1.20}$$

Formalnie więc rozwiązanie ogólne można przedstawić w postaci

$$y(t) = e^{\alpha\,t}\left[c_1\,e^{i\,\beta} + c_2\,e^{-i\,\beta}\right].$$

Ponieważ współczynniki $b,\ c$ są liczbami rzeczywistymi, należy raczej oczekiwać istnienia czysto rzeczywistych rozwiązań. Jednak, chcąc pozostać w dziedzinie rzeczywistej, musimy wystawić dodatkowy warunek $y(t) = \bar{y}(t)$. Stąd

$$
\begin{aligned}
&e^{\alpha\,t}\left[c_1\,e^{i\,\beta} + c_2\,e^{-i\,\beta}\right] = e^{\alpha\,t}\overline{\left[c_1\,e^{i\,\beta} + c_2\,e^{-i\,\beta}\right]} = \\
&e^{\alpha\,t}\left[\overline{c_1}\,e^{-i\,\beta} + \overline{c_2}\,e^{i\,\beta}\right].
\end{aligned}
$$

Stąd $c_1 = \overline{c_2} = A + i\,B$ i rozwiązanie ogólne możemy przedstawić w postaci

$$
\begin{aligned}
&y(t) = e^{\alpha\,t}\left[(A + i\,B)\,e^{i\,\beta} + (A - i\,B)\,e^{-i\,\beta}\right] = \\
&= e^{\alpha\,t}\left[2\,A\tfrac{e^{i\,\beta}+e^{-i\,\beta}}{2} + 2\,i^2\,B\tfrac{e^{i\,\beta}-e^{-i\,\beta}}{2\,i}\right].
\end{aligned}
$$

Wprowadzając nowe (dowolne) parametry $\tilde{A} = 2\,A,\quad \tilde{B} = -2\,B$ oraz wykorzystując tożsamości Eulera

$$\cos z = \frac{e^{i\,z} + e^{-i\,z}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{i\,z} - e^{-i\,z}}{2\,i},$$

możemy przedstawić ogólne rozwiązanie w następującej postaci:

$$y(t) = e^{\alpha\,t}\left[\tilde{A}\cos\beta\,t + \tilde{B}\,\sin\beta\,t\right]. \tag{1.21}$$

Przykład 1.

$$y'' - 2\,y' + 5\,y = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm\, 4\,i}{2}.$$

Rozwiązanie ogólne:

$$y(t) = e^t\,(A\cos 2\,t + B\,\sin 2\,t)\,.$$

Zagadnienie początkowe:

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = -4. \tag{1.22}$$

Rozwiązanie zagadnienia początkowego:

$$y(0) = A = 0, \qquad y'(t)|_{t=0} = e^t\,[2\,B\cos 2\,t + B\sin 2t]\,|_{t=0} = 2B = -4.$$

Stąd $y(t) = -2\,e^t \sin 2\,t$.

1.6.2 Zadania domowe.

1. $y'' - 2\,y' + y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$
2. $y'' + 2\,y' + y = 0, \qquad y(0) = 1/2, \quad y'(0) = -1/2.$
3. $y'' + \omega^2\,y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

1.6.3 Rozwiązanie problemu niejednorodnego. Pojęcie rozwiązania fundamentalnego operatora różniczkowego.

Rozpatrzenie tego zagadnienia rozpoczynamy od problemu Cauchy'ego

$$y'' + b\,y' + c\,y = F(t), \tag{1.23}$$

$$y(0) = y_0, \qquad y'(0) = y_1. \tag{1.24}$$

Zachodzi

Lemat 1. Rozwiązanie zagadnienia (1.23), (1.24) da się przedstawić w postaci sumy funkcji $y(t) = V(t) + W(t)$. Funkcja $V(t)$ jest jedynym rozwiązaniem zagadnienia Caucyego

$$\begin{aligned} V'' + b\,V' + c\,V &= 0, \\ V(0) = y_0, \qquad V'(0) &= y_1, \end{aligned} \tag{1.25}$$

funkcja $W(t)$ jest jedynym rozwiązaniem zagadnienia Cauchyego

$$\begin{aligned} &W'' + b\,W' + c\,W = F(t), \\ &W(0) = 0, \qquad W'(0) = 0. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Dowód. Musimy sprawdzić, czy funkcja $V(t) + W(t)$ spełnia równanie (1.23) oraz warunki początkowe (1.24). Spełnienie równania wynika z przyjętych założeń oraz z liniowości równania wyjściowego. Rzeczywiście,

$$\begin{aligned} &\tfrac{d^2}{d\,t^2}(V + W) + b\,\tfrac{d}{d\,t}(V + W) + c\,(V + W) = \\ &= \left[\tfrac{d^2}{d\,t^2}\,V + b\,\tfrac{d}{d\,t}\,V + c\,V\right] + \left[\tfrac{d^2}{d\,t^2}\,W + b\,\tfrac{d}{d\,t}\,W + c\,W\right] = F(t). \end{aligned}$$

Spełnienie warunków początkowych również wynika bezpośrednio z przyjętych założeń:

$$y(0) = V(0) + W(0) = y_0 + 0 = y_0; \qquad y'(0) = V'(0) + W'(0) = y_1 + 0 = y_1.$$

Sposoby rozwiązywania równania (1.16) dla dowolnych wartości współczynników b, c omówiliśmy poprzednio, więc rzeczywistym problemem pozostaje równanie (1.23). Istnieje kilka sposobów rozwiązywania tego równania. Najbardziej popularny polega na "zgadywaniu" funkcji $W(t)$ odpowiadającej zadanej funkcji $F(t)$. Przedstawimy tu jednak bardziej uniwersalny sposób, który faktycznie nie zależy od charakteru niejednorodności w równaniu (1.23). U podstaw tego sposobu leży pojęcie rozwiązania fundamentalnego (podstawowego) operatora różniczkowego

$$\hat{X} = \frac{d^2}{d\,t^2} + b\,\frac{d}{d\,t} + c. \tag{1.27}$$

Definicja. Funkcja $\mathcal{E}(t)$ nazywa się rozwiązaniem fundamentalnym operatora różniczkowego (1.27), jeżeli jest ona dla $t > 0$ rozwiązaniem zagadnienia Cauchyego

$$\hat{X}\,\mathcal{E}(t) = \tfrac{d^2\,\mathcal{E}(t)}{d\,t^2} + b\,\tfrac{d\,\mathcal{E}(t)}{d\,t} + c\,\mathcal{E}(t) = 0, \tag{1.28}$$

spełniającego warunki początkowe

$$\mathcal{E}(+0) = 0, \qquad \mathcal{E}'(+0) = 0. \tag{1.29}$$

A więc do określenia rozwiązania fundamentalnego wystarczy wziąć rozwiązanie ogólne równania (1.16) i określić wartości stałych, przy których spełnione są warunki początkowe określone w równaniu (1.29).

Mając rozwiązanie fundamentalne, dla $\mathcal{E}(t)$ oraz $F(t)$, możemy określić następującą operację zwaną splotem:

$$W(t) = \int_0^t \mathcal{E}(t-\tau) \cdot F(\tau)\, d\tau. \tag{1.30}$$

Zachodzi

Twierdzenie 1. Funkcja $W(t)$ jest rozwiązaniem równania niejednorodnego (1.23). Ponad to spełnia ona warunki początkowe $W(0) = 0, \qquad W'(0) = 0$.

Dowód. Zróżniczkujemy (1.30) raz po czasie, używając definicji podstawowej pochodnej funkcj:

$$\frac{dW(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\int_0^{t+\Delta t} \mathcal{E}(t+\Delta t-\tau) \cdot F(\tau)\, d\tau - \int_0^t \mathcal{E}(t-\tau) \cdot F(\tau)\, d\tau\right] =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\left(\int_0^t + \int_t^{t+\Delta t}\right) \mathcal{E}(t+\Delta t-\tau)\, F(\tau)\, d\tau - \int_0^t \mathcal{E}(t-\tau)\, F(\tau)\, d\tau\right]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\int_0^t \left(\mathcal{E}(t+\Delta t-\tau) - \mathcal{E}(t-\tau)\right)\, F(\tau)\, d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \mathcal{E}(t+\Delta t-\tau)\, F(\tau)\, d\tau\right] =$$

$$\int_0^t \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\mathcal{E}(t+\Delta t-\tau) - \mathcal{E}(t-\tau))}{\Delta t}\, F(\tau)\, d\tau + \lim_{\Delta t \to 0} \left(\mathcal{E}(t+\Delta t-t) \, + O(\Delta t)\right) F(t) =$$

$$\int_0^t \mathcal{E}'(t-\tau)\, F(\tau)\, d\tau + \mathcal{E}(0)\, F(t) = \int_0^t \mathcal{E}'(t-\tau)\, F(\tau)\, d\tau.$$

Skorzystaliśmy w przedostatniej linijce z warunku początkowego $\lim_{\Delta t \to 0} \mathcal{E}(\Delta t) = \mathcal{E}(0) = 0$.

Licząc drugą pochodną $W(t)$ otrzymamy:

$$\frac{d^2 W(t)}{d t^2} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_0^{t+\Delta t} \mathcal{E}'(t + \Delta t - \tau) \cdot F(\tau)\, d\tau - \int_0^t \mathcal{E}'(t - \tau) \cdot F(\tau)\, d\tau \right] =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\left(\int_0^t + \int_t^{t+\Delta t} \right) \mathcal{E}'(t + \Delta t - \tau)\, F(\tau)\, d\tau - \int_0^t \mathcal{E}'(t - \tau)\, F(\tau)\, d\tau \right]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_0^t \left(\mathcal{E}'(t + \Delta t - \tau) - \mathcal{E}'(t - \tau) \right) F(\tau)\, d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \mathcal{E}(t + \Delta t - \tau)\, F(\tau)\, d\tau \right] =$$

$$\int_0^t \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\mathcal{E}'(t+\Delta t-\tau) - \mathcal{E}'(t-\tau))}{\Delta t} F(\tau)\, d\tau + \lim_{\Delta t \to 0} \left(\mathcal{E}'(t + \Delta t - t) + O(\Delta t) \right) F(t) =$$

$$\int_0^t \mathcal{E}''(t - \tau)\, F(\tau)\, d\tau + \mathcal{E}'(0)\, F(t) = \int_0^t \mathcal{E}''(t - \tau)\, F(\tau)\, d\tau + F(t).$$

Przy wyprowadzeniu powyższego wzoru skorzystaliśmy w przedostatniej linijce z warunku początkowego $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \mathcal{E}'(\Delta t) = \mathcal{E}'(0) = 1$.

Podstawiając $W'(t)$ oraz $W''(t)$ do równania niejednorodnego, otrzymamy:

$$W''(t) + b\, W'(t) + c\, W(t) = F(t) + \int_0^t \left[\mathcal{E}''(t - \tau) + b\, \mathcal{E}'(t - \tau) + c\, \mathcal{E}(t - \tau) \right] F(\tau)\, d\tau =$$

$$F(t) + \int_0^t \left\{ \frac{d^2}{d z^2} + b \frac{d}{d z} + c \right\} W(z)|_{z=t-\tau}\, F(\tau)\, d\tau = F(t).$$

Spełnienie warunków początkowych $W(0) = W'(0) = 0$ sprawdza się elementarnie.

Przykład

$$y'' + 4\, y' = 1, \qquad y(0) = 1, y'(0) = -4$$

Równanie charakterystyczne:

$$\lambda^2 + 4\lambda = 0,$$

zatem $\lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = 0$ i rozwiązanie ogólne problemu jednorodnego dane jest wzorem:

$$V(t) = C_1 + C_2\, e^{-4\, t}. \tag{1.31}$$

Jak wiemy, równanie jednorodne "dziedziczy" warunki początkowe równania wyjściowego:

$$V(0) = C_1 + C_2 = 1, \quad V'(0) = -4\, C_2 = -4.$$

Stąd

$$V(t) = e^{-4\, t}.$$

Rozwiązanie fundamentalne $\mathcal{E}$ również opisuje się wzorem (1.31). Stałe $C_1,\ C_2$ obliczamy z warunków początkowych $\mathcal{E}(0)=0,\ \ \mathcal{E}'(0)=1$. Rozwiązując układ równań algebraicznych

$$C_1 + C_2 = 0, \qquad -4\,C_2 = 1,$$

otrzymamy rozwiązanie fundamentalne

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4}\left(1 - e^{-4\,t}\right).$$

Zatem, zgodnie ze wzorem (1.30), rozwiązanie problemu niejednorodnego otrzymamy, obliczając splot $\mathcal{E} * F(t)$:

$$\mathcal{E} * F(t) = \int_0^t \tfrac{1}{4}\left(1 - e^{-4\,(t-\tau)}\right)\cdot 1\, d\,\tau =$$

$$\tfrac{1}{4}\left[\tau - e^{-4\,t}\tfrac{1}{4}e^{4\,\tau}\right]|_{\tau=0}^{\tau=t} =$$

$$\tfrac{1}{4}\left[t - \tfrac{1}{4}e^{-4\,t}\left(e^{4\,t}-1\right)\right] =$$

$$\tfrac{1}{4}\left[t - \tfrac{1}{4}\left(1 - e^{-4\,t}\right)\right].$$

Odpowiedź: $y(t) = e^{-4\,t} + \frac{1}{4}\left[t - \frac{1}{4}\left(1 - e^{-4\,t}\right)\right] = \frac{1}{16}(4\,t - 1) + \frac{17}{16}\,e^{-4\,t}$.

1.6.4 Zadania domowe.

1.

$$y'' + 4\,y = 1 = F(t); \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

2.

$$y'' - y' = e^{-t}, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$$

3.

$$y'' - y' - 6\,y = x^2, \qquad y(0) = 0, quad y'(0) = 2.$$

4.

$$y'' - y = x - 1, \qquad y(0) = 1 = y'(0).$$

1.6.5 Zastosowania. Drgania własne oraz drgania wymuszone. Rezonans. Dudnienia.

Rozpatrzny równanie

$$y'' + \omega^2 y = A\, sin\beta\, t, \tag{1.32}$$

oraz stowarzyszone równanie

$$z'' + \omega^2 z = 0. \tag{1.33}$$

Jak łatwo widać, równanie charakterystyczne problemu jednorodnego

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

ma parę pierwiastków czysto urojonych $\lambda_{1,2} = \pm\omega$. Zatem ogólne rozwiązanie równania jenorodnego ma postać

$$z(t) = C_1 \cos\omega\, t + C_2 \sin\omega\, t. \tag{1.34}$$

Uwaga. *Rozwiązanie (1.32)opisuje ruchy (drgające) okresowe. Wielkość ω nazywamy częstością drgań.*

Rozwiązanie fundamentalne $\mathcal{E}(t)$, które jest również przedstawia się w postaci (1.34) znajdziemy, rozwiązując zagadnienie algebraiczne

$$\mathcal{E}(0) = 0, \qquad \mathcal{E}'(0) = 1.$$

Łatwo się sprawdza, że rozwiązanie dane jest wzorem

$$\mathcal{E}(t) = \frac{\sin\omega\, t}{\omega}.$$

Rozwiązanie szczególne problemu niejednorodnego spełniające zerowe watunki początkowe znajdziemy, obliczanąc splot $\mathcal{E} * A\, sin\beta\, t$:

$$\mathcal{E} * A\, sin\beta\, t = \frac{A}{\omega} \int_0^t \sin\omega\,(t-\tau)\, \sin\beta\,\tau\, d\tau =$$

$$= \frac{A}{2\,\omega} \int_0^t \{\cos[\omega\, t - \tau\,(\omega+\beta)] - \cos[\omega\, t + \tau\,(\beta-\omega)]\}\; d\tau.$$

Otrzymaliśmy wzór

$$W(t) = \frac{A}{2\,\omega} \int_0^t \{\cos[\omega\, t - \tau\,(\omega+\beta)] - \cos[\omega\, t + \tau\,(\beta-\omega)]\}\; d\tau. \tag{1.35}$$

I teraz są tutaj dwie możliwości:

- Pierwsza: $\omega \neq \beta$ (przypadek nierezonansowy). W tym przypadku stosując zamiany zmiennych otrzymamy:

$$W(t) = \frac{A}{2\,\omega} \left\{ \frac{\sin\beta\,t + \sin\omega\,t}{\omega+\beta} + \frac{\sin\beta\,t - \sin\omega\,t}{\omega-\beta} \right\}. \tag{1.36}$$

  Wniosek: *W przypadku gdy $\omega \neq \beta$, rozwiązanie problemu jednorodnego jest kombinacją algebraiczną "drgań własnych" o częstości ω oraz "drgań wymuszonych" o częstości β.*

- Druga: $\omega = \beta$ (przypadek rezonansowy). W tym przypadku, licząc całki po prawej stronie wzoru (1.35) otrzymamy:

$$\tfrac{A}{2\,\omega} \int_0^t \{\cos[\omega\,t - 2\,\tau\,\omega] - \cos[\omega\,t]\}\, d\,\tau = \tfrac{A}{2\,\omega^2}[\sin\omega\,t - \omega\,t\,\cos\omega\,t].$$

  Zatem

$$W(t) = \frac{A}{2\,\omega^2}[\sin\omega\,t - \omega\,t\,\cos\omega\,t]. \tag{1.37}$$

  Wniosek: *W przypadku gdy $\omega = \beta$, rozwiązanie opisuje drgania o częstości ω, przy czym amplituda tychdrgań nieograniczeni rośnie w czasie.*

1.6.6 Dudnienia.

Ogólne rozwiązanie problemu niejednorodnego (1.32) przedstawia się jako suma ogólnego rozwiązania problemu niejednorodnego oraz rozwiązania szczególnego problemu niejednorodnego danego wzorem (1.36), czyli

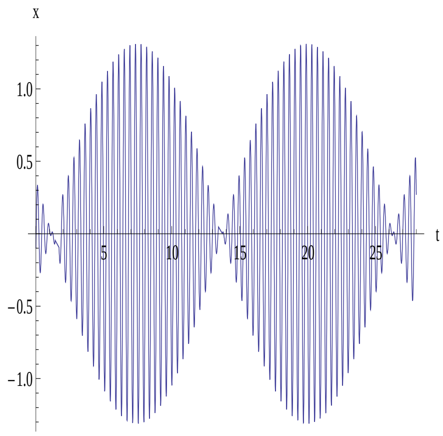
$$\begin{aligned} y(t) &= C_1\,\cos\omega\,t + C_2\,\sin\omega\,t + \tfrac{A}{2\,\omega}\left\{\tfrac{\sin\beta\,t+\sin\omega\,t}{\omega+\beta} + \tfrac{\sin\beta\,t-\sin\omega\,t}{\omega-\beta}\right\} = \\ & C_1\,\cos\omega\,t + C_2\,\sin\omega\,t + \tfrac{2\,A}{2\,\omega\,(\omega^2-\beta^2)}(\omega\,\sin\beta\,t - \beta\sin\omega\,t) \end{aligned} \tag{1.38}$$

Ciekawa sytuacja zachodzi, gdy $\beta = \omega + \varepsilon$, $|\varepsilon| << 1$ zaś współczynniki dobrane w sposób następujący:

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = \frac{A}{\omega\,(\omega-\beta)}.$$

Wówczas rozwiązanie (1.38) przybiera postać:

$$y(t) = \frac{A}{\omega^2-\beta^2}\,(\sin\beta\,t + \sin\omega\,t.)$$



Rys. 1.3:

Z dokładnością do $O(\varepsilon^2)$ wzór ten można przedstawić w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
y(t) &\cong -\tfrac{A}{2\,\varepsilon\,\omega}\,(\sin{(\omega+\varepsilon)\,t}+\sin{\omega\,t}) = -\tfrac{A}{2\,\varepsilon\,\omega}\,(\sin{\omega\,t}\,\cos{\varepsilon\,t}+\sin{\varepsilon\,t}\,\cos{\omega\,t}+\sin{\omega\,t}) = \\
&= -\tfrac{A}{2\,\varepsilon\,\omega}\left(\sin{\omega\,t}\left[\cos^2{\tfrac{\varepsilon\,t}{2}}-\sin^2{\tfrac{\varepsilon\,t}{2}}+1\right]+\cos{\omega\,t}\,2\sin{\tfrac{\varepsilon\,t}{2}}\cos{\tfrac{\varepsilon\,t}{2}}\right) = \\
&= -\tfrac{A}{\omega\,\varepsilon}\cos{\tfrac{\varepsilon\,t}{2}}\sin{[t(\omega+\varepsilon/2)]}.
\end{aligned}$$

Wyrażenie $-\frac{A}{\omega\,\varepsilon}\cos\frac{\varepsilon\,t}{2}$ w tym wzorze odgrywa rolę amplitudy wolno zmienającej się w czasie, Drugi człon opisuje część drgającą z częśtpością lekko odmienną od ω. W wyniku powstają "dudnienia", tak jak pokazano na rys. 1.3.

1.7 Układy równań liniowych o stałych współczynnikach

Rozpatrzmy układ

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d\,x_1}{d\,t} = a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + ... + a_{1n}\,x_n; \\
&\tfrac{d\,x_2}{d\,t} = a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + ... + a_{2n}\,x_n; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\tfrac{d\,x_n}{d\,t} = a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + ... + a_{nn}\,x_n;
\end{aligned} \tag{1.39}$$

Postać macierzowa układu jest taka:

$$\frac{d}{d\,t}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .... & ..... & ..... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{1.40}$$

Układ równań (1.39) ((1.40)) nazywamy układem równań liniowych o stałych współczynnikach.

Uwaga. *w takiej postaci można przedstawić jednorodne równanie liniowe rzędu drugiego, o stałych współczynnikach*

$$y'' + b\,y' + c\,y = 0,$$

jeżeli wprowadzić nowe zmienne $y_1 = y, \quad y_2 = y'$ *Otrzymamy wtedy równoważny układ równań postaci (1.39)*

$$\begin{aligned} y_1' &= \qquad\quad y_2, \\ y_2' &= -c\,y_1 - b\,y_2. \end{aligned}$$

Rozwiązanie równania (1.40) poszukujemy w postaci $\vec{X(t)} = e^{\lambda\,t}\,\vec{X_0}$, gdzie

$$\vec{X(t)} = (x_1(t), ...x_n(t),)^T\,, \quad \vec{X_0} = (x_{1\,0}, ...x_{n\,0},)^T\,,$$

$x_{i\,0}$ - stałe, $(\cdot)^T$- operacja transponowania.

Po podstawieniu tego ansatzu do równania wektorowego (1.40) i uwzględnieniu tego, że $e^{\lambda\,t} \neq 0$, otrzymamy równanie algebraiczne

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{22} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2n} & \\ .... & ..... & ..... & ...... & .. \\ a_{n1} & ... & a_{nn-1} & a_{nn} - \lambda & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{bmatrix} = 0.$$

Warunkiem koniecznym istnienia rozwiązań niezerowych jest zerowanie się wyznacznika macierzy. Przyrównując wyznacznik do zera, otrzymujemy równanie algebraiczne stopnia n względem λ. Jest to zagadnienie na wartości własne.

Zachodzi

Lemat. *Ieżeli wszystkie wartości własne są rzeczywiste różne, to rozwiązanie ogólne równania (1.40) dane jest wzorem*

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ .... \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} C_k\,e^{\lambda_k\,t} \begin{bmatrix} x_{k\,1} \\ x_{k\,2} \\ .... \\ x_{k\,n} \end{bmatrix}, \tag{1.41}$$

gdzie $[x_{k\,1},\ x_{k\,2},\ ....,x_{k\,n}]^T$ - jest to wektor własny macierzy $\hat{A}$, odpowiadający wartości własnej λ_k, czyli rozwiązanie równania wektorowego

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .... & ..... & ..... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k\,1} \\ x_{k\,2} \\ .... \\ x_{k\,n} \end{bmatrix} = \lambda_k \begin{bmatrix} x_{k\,1} \\ x_{k\,2} \\ .... \\ x_{k\,n} \end{bmatrix},$$

$C_1, ...C_n$- dowolne stałe.

Zagadnienie Cauchyego ma postać: (1.40) oraz n warunków początkowych

$$x_1(0) = x_{1\,0}, \quad x_2(0) = x_{2\,0}, \quad , ..., x_n(0) = x_{n\,0},$$

gdzie $x_{1\,0}$, $...x_{n\,0}$ - zadane stałe. Żeby rozwiązać zagadnienie początkowe, należy rozwiązać równanie macierzowe

$$\sum_{k=1}^{n} C_k \begin{bmatrix} x_{k\,1} \\ x_{k\,2} \\ .... \\ x_{k\,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1\,0} \\ x_{2\,0} \\ .... \\ x_{n\,0} \end{bmatrix}. \tag{1.42}$$

Lemat 2. *Jeżeli wartości własne macierzy $\hat{A}$ są rzeczywiste i różne, wowczas zbiór wektorów własnych tej macierzy odpowiadających różnym wartościom własnym stanowi bazę w przestrzeni n-wymiarowej, a zatem równanie wektorowe (1.42) ma jedyne rozwiązanie.*

Przykład.

$$y'' + y' - 2\,y = 0$$

Układamy r-nie charakterystyczne

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0, \quad \text{stad} \quad \lambda_1 = 1,\ \ \lambda_2 == 2.$$

Zatem rozwiązanie ogólne ma postać

$$y(t) = C_1\,e^t + C_2\,e^{-2\,t}.$$

Rozwiązując zagadnienie początkowe

$$y(0) = C_1 + C_2 = 1, \qquad y'(0) = C_1 = 2\,C_2 = -1,$$

otrzymamy $C_1 = 1/3, \quad C_2 = 2/3$.

Zagadnienie to można przepisać w postaci układu równań

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

$y_1(0) = 1, y_2(0) = -1$.

Zagadnienie własne dla macierzy stojącej w prawej stronie równania ma postać

$$det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & -1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0,$$

stąd $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2$.

Wektory własne znajdziemy rozwiązując równanie

$$\begin{bmatrix} -\lambda_i & 1 \\ 2 & -1-\lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1\,i} \\ x_{2\,i} \end{bmatrix} = 0;$$

Rozwiązanie, jak łatwo widać jest następujące:

$$\begin{bmatrix} x_{1\,1} \\ x_{2\,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_{1\,2} \\ x_{2\,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Zatem rozwiązanie ogólne ma postać

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = C_1\, e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2\, e^{-2\,t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązując równanie

$$\begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

otrzymamy $C_1 = 1/3,\ C_2 = 2/3$, czyli następujące rozwiązanie zagadnienia Cauchy:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\, e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{2}{3}\, e^{-2\,t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie to pokrywa się z odpowiednim rozwiązaniem zagadnienia początkowego dla równania skalarnego rzędu drugiego.

1.7.1 Zadania domowe.

Rozwiązać następujące zagadnienia początkowe:

1.
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \qquad y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 1.$$

2.
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \qquad y_1(0) = -1,\ y_2(0) = 0.$$

3.
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \qquad y_1(0) = -1,\ y_2(0) = 2.$$

1.8 Układy dynamiczne. Klasyfikacja punktów stacjonarnych na płaszczyźnie

W przypadku ogólnym układ równań różniczkowych dla n funkcji ma postać

$$\begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1\left(t;\ x_1,\ x_2...,x_n\right); \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2\left(t;\ x_1,\ x_2...,x_n\right); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n\left(t;\ x_1,\ x_2...,x_n\right),; \end{array} \tag{1.43}$$

gdzie $f_1,\ f_2,...f_n$ - wiadome funkcje zależne od $n+1$ zmiennych $(t, x_1, ...x_n)$. O funkcjach tych będziemy zakładać, że są one różniczkowalne.

Definicja 1. *Układ (1.43) nazywa się* **układem autonomicznym** *jeżeli funkcje* $f_i,\ i = 1,...n$ *nie zależą od zmiennej* t. Układ autonomiczny ma postać

$$\begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1\left(x_1,\ x_2...,x_n\right); \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2\left(x_1,\ x_2...,x_n\right); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n\left(x_1,\ x_2...,x_n\right).; \end{array} \tag{1.44}$$

Układy równań, których prawe strony nie zależą od t, przyjeto jeszcze nazywać **układani dynamicznymi** .

Definicja 2. *Punkt* $(x_{1,0},\, x_{2,0}, ...x_{n,0}) \in R^n$ *nazywa się punktem stacjonarnym układu (1.44), jeżeli* $f_i(x_{1,0},\, x_{2,0}, ...x_{n,0}) = 0,\ i = 1, ...n.$

W małym otoczeniu punktu stacjonarnego można rozpatrywać zamiast pełnego układu (1.44) jego **linearyzację.** Rozpatrzmy prawą stronę tego układu. Każdą funkcję $f_i(x_1,\, x_2, ...x_n)$ w otoczeniu punktu $(x_{1,0},\, x_{2,0}, ...x_{n,0})$ można przedstawić w postaci

$$f_i(x_1,\, x_2, ...x_n) = f_i(x_{1,0},\, x_{2,0}, ...x_{n,0}) + \textstyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_{1,0},\, x_{2,0}, ...x_{n,0})\,(x_k - x_{k,0}) + O(|x|^2) \equiv$$

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_{1,0},\, x_{2,0}, ...x_{n,0})\,(x_k - x_{k,0}) + O(|x|^2).$$

Człon $f_i(x_{1,0},\, x_{2,0}, ...x_{n,0})$ został opuszczony ponieważ jest to wartość funkcji f_i w punkcie stacjonarnym, a zatem równa się ona zeru dla każdego $i = 1, 2, ...n$. W związku z powyższym zachodzi

Stwierdzenie 1. Układ dynamiczny w otoczenui punktu stacjonarnego $(x_{1,0},\, x_{2,0}, ...x_{n,0})$ da się przedstawić w postaci

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ .... \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .... & ..... & ..... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ .... \\ \xi_n \end{bmatrix} + O(|\xi|^2), \tag{1.45}$$

gdzie

$$\xi_k = x_k - x_{k,0}, \qquad a_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_{1,0},\, x_{2,0}, ...x_{n,0}), \quad i,\, j = 1, 2, ...$$

Oznaczenie. Układ (1.45) nazywa się linearyzacją układu dynamicznego (1.44).

Okazuje się że przy pewnych warunkach rozwiązania układu (1.44) oraz rozwiąznia układu liniowego (1.45) w małym otoczeniu punktu stacjonarnego są niemal identyczne. Ponieważ rozwiązywać (analizować) układ liniowy na ogół jest niezmiernie prościej, niż układ pełny, opłaca się określić warunki umożliwiające taką podmianę. To, czy zachowanie pełego układu w otoczeniu punktu stacjonarnego rzeczywiście jest reprezentowane przez jego linearyzację zależey od wartości własnych macierzy linearyzacji układu (1.45). Przeanalizujemy to na przykładzie układu w R^2, podając przy okazji klasyfikację prostych punktów stacjonarnych.

A więc rozpatrujemy układ równań

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \hat{A} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}. \tag{1.46}$$

Definicja 3. *Zbiór zmiennych* $(\xi, \eta) \in R^2$ *nazywamy płaszczyzną fazową układu (1.46).*

Oznaczenie. *Portretem fazowym układu (1.46) nazywamy zbiór linii, w płaszczyźnie* (ξ, η)*, które tworzą rozwiązania* $(\xi[t], \eta[t])$ *tego układu .*

Przystępujemy do klasyfikacji punktów stacjonarnych układu (1.46).

1. Wartości własne $\lambda_1, \ \lambda_2$ macierzy $\hat{A}$ są rzeczywiste, różne, dodatnie. Niech dla określoności $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. W tym przypadku punkt $(0, 0)$ przestrzeni fazowej nazywa się źródłem. Istnieje zamiana zmiennych $(\xi, \eta) \to (y_1, y_2)$ taka że w nowych zmiennych układ (1.46) ma postać

   $$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}. \tag{1.47}$$

   Rozwiązanie tego układu dane jest wzorem

   $$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \qquad y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

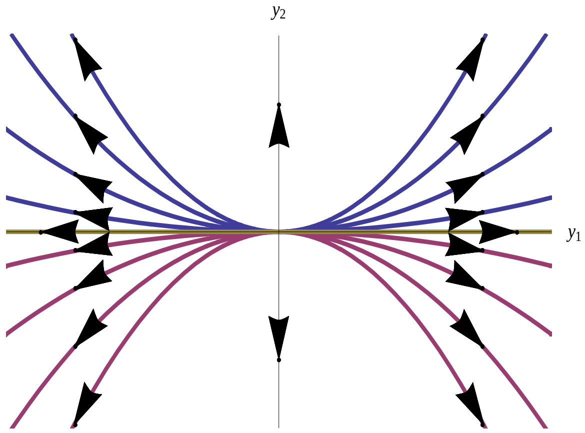
   W przypadku, gdy $C_1 \neq 0$, rozwiązanie to można też przepisać postaci równoważnej, przedstawiając y_2 jako funkcję y_1:

   $$y_2 = C_3 \, y_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}},$$

   $$C_3 = C_2 \begin{cases} 1/\left(C_1\right)^{\lambda_2/\lambda_1} & \text{gdy } C_1 > 0, \\ -1/\left(|C_1|\right)^{\lambda_2/\lambda_1} & \text{gdy } C_1 < 0. \end{cases} \tag{1.48}$$

   Portret fazowy układu (1.53) w tym przypadku wygląda tak, jak to jest pokazane na rys. 1.4. Zwrocmy uwagę na to że osie współrzędnych są trajektoriami fazowymi układu. Oś pozioma odpowiada przypadku $C_2 = 0$; oś pionowa odpowiada przypadku osobliwemu $C_1 = 0$. Te dwie trajektorie fazowe nie mogą być wyrażone wzorem (1.48).

2. Wartości własne $\lambda_1, \ \lambda_2$ macierzy $\hat{A}$ są rzeczywiste, różne, ujemne. Niech dla określoności $0 > \lambda_1 > \lambda_2$. W tym przypadku punkt $(0, 0)$ przestrzeni fazowej nazywa się zlewem.



Rys. 1.4:

Jak i w poprzednim przypadku, istnieje zamiana zmiennych $(\xi,\,\eta) \to (y_1,\,y_2)$ taka że w nowych zmiennych układ (1.46) ma postać

$$\frac{d}{d\,t}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}. \tag{1.49}$$

Zauważmy teraz, że zamiana zmiennej niezależnej $t \to \tau = -t$ odzworowuje układ (1.49) w układ

$$\frac{d}{d\,\tau}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\lambda_1| & 0 \\ 0 & |\lambda_2| \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \tag{1.50}$$

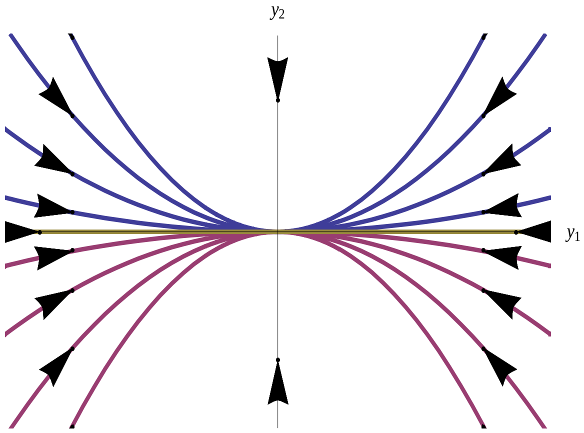
równoważny (1.53). Przekształcenie $t \to \tau = -t$ nazywa się odbiciem zmiennej czasowej. Prowadzi ono do tego że ruch wzdłuż każdej trajektorii fazowej odbywa się w przeciwnym kierunku. Poza tym portret fazowy pozostaję bez zmian. Wynika stąd że portret fazowy układu (1.49) będzie taki, jak pokazano na rys. 1.5.

3. Wartości własne λ_1, λ_2 macierzy $\hat{A}$ są rzeczywiste, niezerowe i mają różne znaki. Niech dla określoności $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$. W tym przypadku punkt $(0,\,0)$ przestrzeni fazowej nazywa się siodłem. Istnieje zamiana zmiennych $(\xi,\,\eta) \to (y_1,\,y_2)$ taka że w nowych zmiennych układ (1.46) ma postać

$$\frac{d}{d\,t}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & -|\lambda_2| \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}. \tag{1.51}$$

Rozwiązanie tego układu dane jest wzorem

$$y_1 = C_1\,e^{\lambda_1\,t}, \qquad y_2 = C_2\,e^{-|\lambda_2|\,t}.$$



Rys. 1.5:

w przypadku, gdy $C_1 \neq 0$, rozwiązanie to można też przepisać w postaci równoważnej, przedstawiając y_2 jako funkcję y_1:

$$y_2 = C_3 \, y_1^{-|\lambda_2/\lambda_1|},$$

gdzie

$$C_3 = C_2 \begin{cases} 1/\left(C_1\right)^{\lambda_2/\lambda_1} & \text{gdy } C_1 > 0, \\ -1/\left(|C_1|\right)^{\lambda_2/\lambda_1} & \text{gdy } C_1 < 0. \end{cases} \tag{1.52}$$

Portret fazowy układu (1.53) w tym przypadku wygląda tak, jak to jest pokazane na rys. 1.4. Zwrocmy uwagę na to że osie współrzędnych są trajektoriami fazowymi układu. Oś pozioma odpowiada przypadku $C_2 = 0$; oś pionowa odpowiada przypadku osobliwemu $C_1 = 0$. Te dwie trajektorie fazowe nie mogą być wyrażone wzorem (1.48). Portret fazowy jest przedstawiony na rys. 1.6.

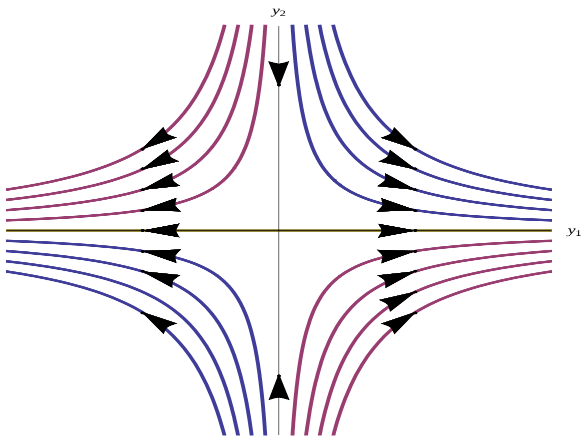
4. Wartości własne $\lambda_1,\ \lambda_2$ macierzy $\hat{A}$ są czysto urojone: $\lambda_{1,2} = \pm\, i\,\omega$.W tym przypadku punkt $(0,\,0)$ przestrzeni fazowej nazywa się środkiem. Istnieje zamiana zmiennych $(\xi,\,\eta) \to (y_1,\,y_2)$ taka że w nowych zmiennych układ (1.46) ma postać

$$\frac{d}{d\,t}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}. \tag{1.53}$$

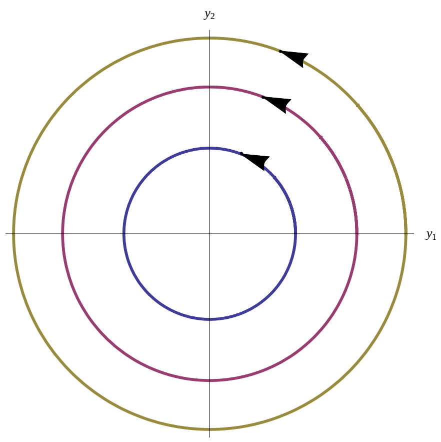
Rozwiązanie tego układu dane jest wzorem

$$y_1 = A\cos\omega\, t + B\sin\omega\, t \qquad y_2 = \omega\left[B\cos\omega\, t - A\sin\omega\, t\right].$$

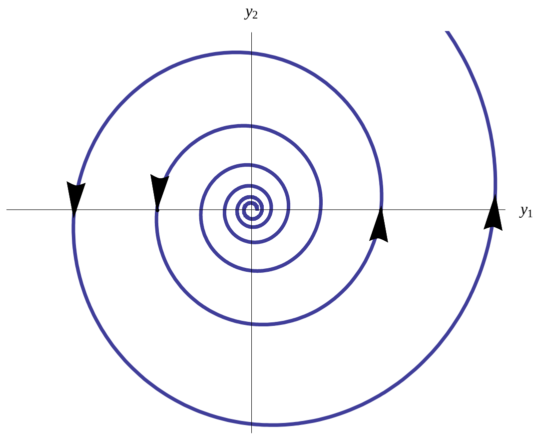
Rozwiązania są funkcjami okresowymi, są to elipsy. w przypadku $\omega = 1$ elipsy przechodzą w okręgi koncentryczne, rys. 1.7.



Rys. 1.6:



Rys. 1.7:



Rys. 1.8:

5. Wartości własne λ_1, λ_2 macierzy $\hat{A}$ są zespolone: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\,\omega$.W tym przypadku punkt $(0, 0)$ przestrzeni fazowej nazywa się ogniskiem. (niestabilnym w przypadku gdy $\alpha > 0$ oraz stabilnym gdy $\alpha > 0$). Portret fazowy ogniska odpowiadający wartości $\alpha = 0.1$, $\omega = 1$ przedstawionno na rys. 1.8.

Zachodzi

Twierdrdzenie. *Charakter punktów stacjonarnych oraz przebieg trajektorii w ich otoczeniu nie zmienia się przy dodaniu małych członów zaburzających dla wszystkich wymienionych przypadków za wyjątkiem środka.*

1.9 Odpowiedzi

Do 1.3.1:

1. $y(x) = C\,\log(x);$
2. $y(x) = C\,\exp\left[-\cos x\right]$
3. $y(x) = \frac{1}{C - \arcsin x}$
4. $y(x) = C\,x$
5. $y(x) = x\arcsin[C\,x]$
6. $\arctan\frac{y}{x} - \log\frac{y}{x} = \log C\,x$

7. $\log\left[x^2+y^2+2\,x\,y+x+y+1\right]-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x+y+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)=x$

8. $y(x)=\frac{x^3}{2}+C\,x$

9. $y(x)=\sin x\,(x^2+C)$

10. $y(x)=x\sinh\log\left(x\,C\right)$

11. $x(t)=C\,e^x-\frac{1}{2}\left[\sin x+\cos x\right]$

Do 1.4.1:

1. $y(x)=C_1+x\,C_2+(x-2)\,e^x$

2. $y(x)=1-2\,x+\sin x$

3. $y(x)=C_2+\exp\left[\frac{x^2}{2}+x\,C_1\right]$

4. $y(x)=C_1\ \exp\left[-x\right]\left(\exp\left[x\right]+C_2\right)^2$

5. Nie wyraża się w funkcjach elementarnych

6. $y(x)=C_2-\log\left[x+C_1\right]$

7. $y(x)=\frac{x^2}{2}+C_2+C_1\ \log x$

Do 1.5.2:

1. $y(x)=e^x\,(1-x)$

2. $y(x)=\frac{1}{2}\,e^{-x}$

3. $y(x)=\frac{\sin\omega\,x}{\omega}$

Do 1.5.4:

1. $y(x)=\frac{1+3\ \cos 2\,x}{4}$

2. $y(x)=\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{7}{2}e^x-3$

3. $y(x)=\frac{56}{135}e^{3\,x}-\frac{7}{20}e^{-2\,x}-\frac{1}{108}(18\,x^2-6\,x+7)$

4. $y(x)=1-x-2\ \sinh x$

Do 1.6.1:

1. $y_1(x) = e^{-3\,x}\,(2\,e^{2\,x} - 1)\,, \qquad y_2(x) = e^{-3\,x}\,(3 - 2\,e^{2\,x})$

2. $y_1(x) = e^{-x}\sin x \qquad y_2(x) = e^{-x}\,(\sin x - \cos x)$

3. $y_1(x) = -\frac{1}{4}e^{-3\,x}\,(3 + e^{4\,x})\,, \qquad y_2(x) = -\frac{1}{4}e^{-3\,x}\,(e^{4\,x} - 9)$